

專 論

初始流場對引用SMAC方法模擬水躍之影響

Effects of Initial Flow Field on the Application of SMAC Method in the Simulation of Hydraulic Jump

淡江大學水資源及環境工程學系教授

施 清 吉

Ching-Chi Shih

摘 要

本研究使用 SMAC 方法模擬水躍，採用三種不同型別的初始流場：空晶格無下游洩水閘門，空晶格並配合一下游洩水閘門與空晶格但有一下游初始水深。模擬結果是針對水躍本體深度之探討，前兩者不易造成淹沒流，只適宜模擬流經一緩坡的超臨界流，不適宜模擬水躍。而後者卻適用於水躍，可是較理想的適用範圍為上游福祿數須介於 3.9 至 5.5 之間。一般而言，SMAC 方法模擬之水躍剖面均較偏低，這可能因本研究只使用較簡單的阻力模式，且以單一摩擦因子 ($f = 0.03$) 代表渠底阻力，無法反映水躍機構。SMAC 方法所展示的顆粒分佈顯示 此方法極適宜模擬自由面急劇變化的流況。

關鍵詞：自由面，水躍，SMAC 方法，流動模擬。

ABSTRACT

The method of SMAC (Simple Marker and Cell) is utilized to simulate a hydraulic jump, and three different types of the initial flow field are: (1) empty without a downstream sluice gate, (2) empty with a downstream sluice gate, and (3) not empty but with a downstream depth which is different from the given upstream depth. The first two types of the initial flow are not apt to result in a submerged flow, which are suitable to simulate a supercritical flow over a mild slope and but not appropriate for simulating a hydraulic jump; while one will eventually end up a submerged flow and is applicable to simulate a hydraulic jump in a reasonable range approximately from 3.9 to 5.5 of the upstream Froude number. Generally speaking, the water surface profile as predicted by the present investigation is mostly lower than that obtained by various investigators, such as Subramanyas, the discrepancy of which could be possibly due to over simplified resistance equations as used in this study. A moderate value of the friction factor f , such as 0.03, can not reflect the main characteristics of the hydraulic jump. However, the distribution and the spread of markers do show that this scheme is good for simulating flows with a rapid change in the free surface.

Key words : Free surface, Hydraulic jump, SMAC method, Flow simulation.

一、前言

在渠流中 (Open channel flow)，水躍表示流動由超臨界流 (Supercritical flow) 轉變成次臨界流 (Subcritical flow)，其主要特徵是在發生水躍現象之前與之後，自由面 (Free surface) 有明顯的變化，同時導致了大量的能量損失 (Energy losses)。能量變化過程包括了由動能 (Kinetic energy) 轉變成位能 (Potential energy) 及不可回復 (Irreversible) 的能量損失。實地量測對於理論的驗證有決定性的影響，但就經濟觀點而言，藉助電子計算機對流動的模擬，成為另一種探討水躍可行的方法。此外，利用數值模擬 (Numerical simulation) 的靈活性、彈性與方便性，以往不易處理與探討的現象均可由數值模擬予以研究。本文利用由傳統的 MAC (Marker and Cell) 方法演變成的 SMAC (Simplified Marker and Cell) 來模擬水躍。流況為二維 (Two dimension)，常密度與常黏滯性 (Viscosity)；而統御方程式 (Governing equations) 則採用雷諾 (Reynolds) 運動方程式 (Chippade et al., 1994) 與連續方程式 (continuity equation)。SMAC 方法為一顯性有限差分技巧 (Explicit finite difference scheme)。初始流場為一空流場 (Empty flow field) 或已知水位之流場接著有一沿流向 (Flow direction) 的均勻流 (Uniform flow)，自左邊流入計算網格 (computational mesh)，其底為水平，而後再自計算網格的右邊流出，且維持一連續流出 (Continuative outflow)。本文探討之連續流出包括三種不同的初始流場：一是空晶格 (Empty cell)；二是空晶格但配合一下游洩水閘門；三是非空晶格但有一已知水位的初始深度，但爾後之深度為浮動，決定於流動。數值模擬與前人研究之比較以躍體 (Jump body) 水位為主。摩擦因子 (Friction factor) f 設定為 0.03 (Munson, 1990)。

二、理論基礎

採用雷諾運動方程式與連續方程式做為統御方程式。邊界條件則依所需的情況予以各別設定。

2-1 統御方程式

考慮一個二維流場，其流向與垂直坐標軸分別以 x 與 y 軸表示，對應的速度分量分別為 u 與

v ，對應的重力加速度分別為 g_x 與 g_y ，時間坐標為 t ，流體密度與機動黏度分別為 ρ 與 ν ，若流體為不可壓縮 (Incompressible)，則連續方程式簡化為：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

式中，因變數 (Independent variable) 正上發的 ' - ' 代表對時間取平均的值，例如 $\bar{u} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t u dt$ 。如果分子運動所導致的黏滯效應遠小於亂流的振盪 (Fluctuation)，則描述平均速度 u 與 v 的 Reynolds 運動方程式可簡化為 (Daily et. al., 1966)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \\ - \frac{\partial(\frac{\bar{p}}{\rho})}{\partial x} + g_x + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-\bar{u}'v') \dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \\ - \frac{\partial(\frac{\bar{p}}{\rho})}{\partial y} + g_y + \frac{\partial}{\partial x}(-\bar{v}'u') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}^2) \dots\dots (3) \end{aligned}$$

式中， $-\bar{u}^2$ ， $-\bar{v}'u'$ 與 $-\bar{v}^2$ 再乘以密度 ρ 就代表由亂流振盪而導致的 Apparent stress，俗稱為渦度應力 (Eddy stress)。一般而言，上述渦度應力的處理均仿照黏滯應力 (分子運動) 的處理方式，將渦度應力視為速度梯度與一係數的乘積。所不同的是，速度採用平均速度，而且係數不只視流體種類而異，同時受流動的影響。此外為了區分亂流振盪對縱向 (流向) 與垂直方向的動量傳輸間的差異。因此，沿 x 與 y 的渦度粘滯係數 (Eddy viscosity coefficient) 分別以 ϵ_x 與 ϵ_y 表示，其因次 (Dimension) 同分子粘滯係數 ν 相同，均為長度的平方除以時間。根據上述的原則且利用式(1)，則式(2)與(3)就可分別轉換為

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\bar{p}}{\rho}) + g_x + \epsilon_x \nabla^2 \bar{u} \dots (4)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\bar{p}}{\rho}) + g_y + \epsilon_y \nabla^2 \bar{v} \dots (5)$$

示於式(4)與(5)的渦度粘滯係數受流體種類與流動的影響，故不同的領域可能有不同的考量。以含自由面 (Free surface) 的渠流而言，常見的為 Fischer et. al., (1975) 的經驗公式，即

$$\frac{\epsilon_x}{u_* h} = 0.45 \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\varepsilon_y}{u_* h} = 0.067 \dots\dots\dots (7)$$

式中， u_* 為摩擦速度(Friction velocity)，定義為

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

其中 τ_0 為作用於渠底的剪應力。式

(6)與(7)的渦度粘滯係數是沿深度 h 的平均值。一般渠流分析都是源自 Saint Venant 運動方程式，通常係以深度與斷面平均速度為因變數。因此渦度粘滯係數只能以一整體(Overall)方式予以處理，通常係採用沿深度的平均值。式(1)，(4)與(5)並配合(6)與(7)為本研究模擬水躍之控制方程式(Governing equations)。計算之範圍俗稱為計算網格，形狀為矩形，其邊界條件述於下。

2-2 邊界條件

(一)左側入流邊界條件(Left inflow boundary condition)

計算網格之左側為一已知的超臨界流，其深度與斷面平均速度分別為 y_L 與 V_L ，所以左側的入流邊界條件就是速度 U_L 與深度 y_L 分別為已知速度 V_L 與深度 h_L ，即 $U_L = V_L$ ， $y_L = h_L$ 。這兩個值也是模擬的初始值，不因不同的時段(Time)或循環(Cycle)而改變。

(二)渠底邊界條件(bottom boundary condition)

計算網格之底邊適巧為渠底，水平速度與垂直速度須分別滿足下列兩條件：

$$\bar{u}|_{bottom} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\bar{v}|_{bottom} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

(三)右側出流邊界條件(Right continuative outflow boundary condition)

為允許流場之流體能繼續流出計算網格，且以對上游影想最小的情況為原則，所以在計算網格之右邊界，沿 x 方向的速度梯度假設為 0，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{right} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}|_{right} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

(四)自由面邊界(Free surface boundary condition)

自由面的位置為未知數，位於計算網格上邊之下，其間的空間必須足夠大，以便容許不同時刻之水位變化。在自由面上的邊界條件，傳統 MAC 方法是採用連續方程式與應力消散(Stress vanish)(Hirt et at, 1968; Nichols et at., 1971)。前者是指式(3)，而後者又分為剪應力消散與正應力

消失等兩種。剪應力消散為

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

而正應力消散卻為

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{\bar{p}}{\rho} + 2\varepsilon_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\bar{\sigma}_y = -\frac{\bar{p}}{\rho} + 2\varepsilon_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

式(13)與(14)中， $\bar{\sigma}_x$ 與 $\bar{\sigma}_y$ 分別代表沿 x 與 y 軸之正應力(Normal stress)。

SMAC 將速度視為速度勢能函數(Velocity potential function) Φ 的梯度，由此，利用速度勢能函數的修正來滿足連續方程式。速度勢能函數只用來滿足連續方程式而與動量方程式無關。速度勢能函數與速度分量間的關係為

$$\bar{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dots\dots\dots (15)$$

$$\bar{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \dots\dots\dots (16)$$

速度勢能函數在自由面的條件是基於無剪應力，所以

$$\Phi|_{free\ surface} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

而在固體邊界上，則法線速度必須等於 0，故

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

式中， n 代表法線。

三、數值計算

數值計算之架構，先引用式(4)與(5)之差分式計算下時段(Advanced time step)或下循環(advanced cycle)的暫時速度(temporary velocity)；但是此速度並無法滿足連續方程式，式(1)，必須一再迭代與修正。直到代入連續方程式後的殘餘值或發散量(Dilation)小於容許誤差，才可求得下時段的真正速度。接著利用上述所得之真正速度計算顆粒的新位置，由顆粒之分佈即可曉得下時段的自由面。

MAC 方法係採用交錯格點(Staggered grid point)，如圖一所示；相關的因變數並不是定義於格點上。晶格的四邊只有法線速度，而無切線速度。以第 (i, j) 個晶格而言，晶格右邊與左邊只有水平速度，但無垂直速度，分別以 $u_{i,j}$ 與 $u_{i-1,j}$ 表之；右下註腳 'i' 與 'j' 分別代表晶格在 x 軸與 y 軸

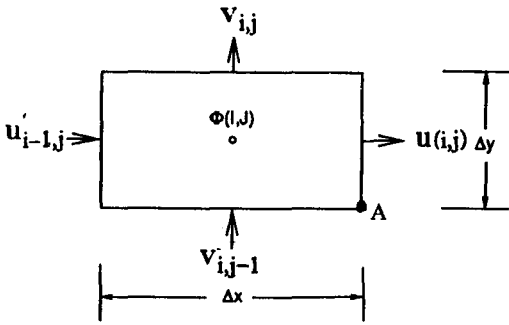


圖 1. 晶格示意圖

之位置。同理，晶格的上邊與下邊只有垂直速度並無水平速度，分別以 $v_{i,j}$ 與 $v_{i,j-1}$ 表示。另外，定義於晶格中心的因變數與參數計有壓力 P 、速度勢能函數 Φ 與重力加速度 g 。

為了便於執行，計算網路通常採用長方形，其間的水平線與垂直線將之分割成許多晶格。沿 x 軸與 y 軸之晶格尺寸 (Size) 分別以 Δx 與 Δy 表示，同時其晶格總數分別以 $IBAR$ 與 $JBAR$ 表示。因此，計算網路共有 $IBAR \times JBAR$ 個晶格。由於晶格只有法線速度沒有切線速度；因此，任何須引用切線速度的邊界條件必須以另一方式表示之。參閱圖一，若晶格底邊正好為渠底，則位於 A 點切線速度必須等於 0。MAC 只好於其下虛設一個晶格，再以 $u_{i-1,j} = -u_{i,j}$ ，表示不滑動條件；若為滑動條件，則改以 $u_{i-1,j} = u_{i,j}$ 示之。此外，針對每一晶格，由式(4)與(5)求得的速度之修正與迭代均須與鄰近的四個晶格有關。基於上述的理由，在計算網路之外再圍繞一圈虛擬晶格 (Plantom Cell) 或稱邊界晶格 (Boundary Cell)。加上虛擬晶格後，全部的晶格數為 $(IBAR + 2) \times (JBAR + 2)$ 。其次，為了便於認識，另定義 $IP1 = IBAR + 1$ ， $JP1 = JBAR + 1$ ， $IP2 = IBAR + 2$ ， $JP2 = JBAR + 2$ 。以 i 與 j 代表晶格位置之指標 (Index)，前者代表為沿 x 軸，而後者代表為沿 y 軸。所以計算網路的範圍為 I 自 2 至 $IP1$ ， J 自 2 至 $JP1$ 。

3-1 下時段速度的初始值

時段以右上註腳表示，'n' 與 'n+1' 分別代表現時段與下時段；正上方 '^' 代表迭代值；右上註腳的括弧代表迭代階次，示於其內的 '0' 為初始值；右下註腳 'i' 與 'j' 分別代表沿 x 軸的第 i 個與

沿 y 軸的第 j 個晶格。由式(4)與(5)可得知速度的初始值為

$$(\hat{u}_{ij}^{n+1})^{(0)} = \bar{u}_{ij}^n + \Delta t \left\{ -FUX^n - FUY^n + VISX^n + g_x + \frac{(\frac{P}{\rho})_{ij}^n - (\frac{P}{\rho})_{i+1,j}^n}{\Delta x} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

$$(\hat{v}_{ij}^{n+1})^{(0)} = \bar{v}_{ij}^n + \Delta t \left\{ -FVX^n - FVY^n + VISY^n + g_y + \frac{(\frac{P}{\rho})_{ij}^n - (\frac{P}{\rho})_{i,j+1}^n}{\Delta y} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

式中， FUX^n ； FUY^n ； FVX^n ； FVY^n 代表對流加速度 (Convective acceleration) 之差分式，而 $VISX^n$ ； $VISY^n$ 則代表摩擦力之差分式。其詳式可參閱周，1994。對流項差分式均含一上游權重參數 (Upstream weighting factor) α 。若上游差分式採用中央差分法 (Center differencing) 則 $\alpha = 0$ ；若採用上風差分法 (Upstream differencing)，則 α 改以 1 計。介於這兩種特殊情況的值，即表示兩速度之差分以 $(1 + \alpha) / 2$ 及 $(1 - \alpha) / 2$ 之比例予以分配。其次，為了選避免摩擦力項內之粘滯係數所造成之數值不穩定，本研究採用 (Golafshani, 1988) 所用之微分方程式。

3-2 迭代與修正

由連續方程式，式(1)，採用中央差分法，即可得對應的差分式，且其殘餘值定義為發散量 (Dilation) \hat{D} ，故

$$\hat{D}_{ij}^{n+1} = \frac{\hat{u}_{i,j}^{n+1} - \hat{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\hat{v}_{i,j}^{n+1} - \hat{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \dots \dots (21)$$

下時段速度必須滿足式(21)，或其殘餘須小於容許誤差，否則須予修正。傳統 MAC 方法是利用壓力變化 ($\frac{\Delta P}{\rho}$) 與發散量來修正下時段的的速度 (Shih, 1993)。但 SMAC 方法卻間接地引入速度勢能函數 Φ ，藉著速度勢能函數的迭代來修正下時段的的速度。採用中央差分法，由式(19)與(20)，即可求得下時段速度的迭代式。

$$(\hat{u}_{ij}^{n+1})^{(h+1)} = (\hat{u}_{ij}^{n+1})^{(h)} - \frac{\hat{\Phi}_{i+1,j}^{(h)} - \hat{\Phi}_{i,j}^{(h)}}{\Delta x}, h \geq 0 (22)$$

$$(\hat{v}_{ij}^{n+1})^{(h+1)} = (\hat{v}_{ij}^{n+1})^{(h)} - \frac{\hat{\Phi}_{i,j+1}^{(h)} - \hat{\Phi}_{i,j}^{(h)}}{\Delta y}, h \geq 0 (23)$$

式中 h 代表迭代階次。 $h = 0$ 時，其值為初始值，可由式(19)與(20)計算而得；其他階次的迭代速度都

是由式(22)與(23)求得。任何階次的速度必須滿足連續方程式(1)。將式(22)與(23)代入式(1)可得

$$(\hat{D}_{i,j}^{n+1})^{(n+1)} = (\hat{D}_{i,j}^{n+1})^{(n)} - \frac{1}{(\Delta x)^2} (\hat{\Phi}_{i+1,j}^{(n)} - 2\hat{\Phi}_{i,j}^{(n)}) - \frac{1}{(\Delta y)^2} (\hat{\Phi}_{i,j+1}^{(n)} - 2\hat{\Phi}_{i,j}^{(n)}) \quad (24)$$

如果下時段速度滿足連續方程式，則式(24)等號右邊等於0，若不滿足連續方程式，式(24)就可提供速度勢能函數的下次疊代值；即

$$\hat{\Phi}_{i,j}^{(n+1)} = \frac{(1+\beta)}{\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)} \left[-(\hat{D}_{i,j}^{(n)})^{(n)} + \frac{(\hat{\Phi}_{i+1,j}^{(n)} + \hat{\Phi}_{i-1,j}^{(n)})}{(\Delta x)^2} - \frac{(\hat{\Phi}_{i,j+1}^{(n)} - \hat{\Phi}_{i,j-1}^{(n)})}{(\Delta y)^2} \right] - \beta \hat{\Phi}_{i,j}^{(n)} \dots\dots\dots (25)$$

式中， $\hat{\Phi}_{i-1,j}^{(n+1)}$ 與 $\hat{\Phi}_{i,j-1}^{(n+1)}$ 為下次疊代值。針對沿x軸之第i個與沿y軸的第j個晶格而言，其左與其下的速度勢能函數 Φ 之值業已求得。這是由於j方向之修正順序係自下而上，而i方向自左而右。此外，式(25)含一鬆弛常數(Overrelaxation parameter) β ，其值介於0與1之間，為提高數值穩定與增快收斂速度。

MAC方法係採用發散量是否小於容許誤差做為下時段速度滿足連續方程式與否的依據。而今改以速度勢能函數 Φ 為對象；因此，停止疊代與修正的判斷式變為：

$$\left| \frac{|\Phi_{i,j}^{(n+1)}| - |\Phi_{i,j}^{(n)}|}{|\Phi_{i,j}^{(n+1)}| + |\Phi_{i,j}^{(n)}|} \right| < 1 \times 10^{-5} \dots\dots\dots (26)$$

3-3 邊界條件

在程式開始運算之前，必須在虛擬晶格上設定符合所求之問題的初始與邊界條件(Initial and boundary condition)，同時也須於計算網格內設定諸變數與參數的初始值。此外，當程式開始運算第一個循環(Cycle)或時段(Time step)後，以及在每一個新循環或新時段的開始等情況，除了左側入流邊界外，其它的邊界條件皆須重新設定之。數值模擬所需之邊界條件包括左側入流邊界、渠底邊界、右側出流邊界與自由邊界等四種。自由面所位於之晶格，稱為表面晶格(Surface cells)；充滿水之晶格為充斥晶格(Full cells)；而沒有水之晶格則稱為空晶格(Empty cells)。

除了引進速度勢能函數 Φ 用以修正下時段速度外，對邊界條件之執行SMAC方法也不同于傳

統MAC方法。SMAC方法並不像傳統MAC方法，每次修正下時段速度後就緊接著處理邊界條件，而是在求得下時段的真正速度後，才處理邊界條件。

自由面的邊界條件計有：剪應力等於零、符合連續方程式與正應力等於零。傳統MAC方法只引用前兩者，而SMAC方法再引用三者。利用剪應力等於零之條件來設置空晶格的水平速度，而表面晶格的垂直速度則用連續方程式求得。以上一晶格為空晶格的表面晶格為例，首先處理表面晶格的垂直速度，但這視右晶格是否為空晶格而有所差異。若右晶格不是空晶格，則表面晶格與空晶格間的垂直速度，就利用表面晶格的其它三個速度分量由連續方程式計算而得；如果右晶格是空晶格，則先以其下充斥晶格的水平速度取代表面晶格的水平速度，以符合剪應力等於零的條件，而後再依上述方法計算垂質速度。同樣的原則可應用於其它三種狀況：左為空晶格的表面晶格、右為空晶格的表面晶格與下為空晶格的表面晶格，但速度分量須對應的改變。總之，至目前為止能處理的自由面邊界只有兩種；一是只有一個空晶格，二是加一個相鄰空晶格(仍然與表面晶格為鄰)，參閱施，1994。

3-4 下時段之質點位置

當程式開始運算，流場內的質點便會隨著流場內的速度場及壓力場，做適當的移動。下時段的的速度場經由上述前三節的執行後，就成為下時段的真正值；接著，就可計算下時段之質點新位置，以便設定各晶格的新旗號。最後，再根據晶格的新旗號，又可曉得下時段的自由面。

SMAC方法中採用面積-權重方法(Area weighting scheme)由晶格速度來計算已知位置的質點速度(u_p 與 v_p)，右下註腳'p'代表質點。所以質點的水平速度與垂質速度分別為

$$u_p^{n+1} = A_1 u_1^{n+1} + A_2 u_2^{n+1} + A_3 u_3^{n+1} + A_4 u_4^{n+1} \dots\dots (27)$$

$$v_p^{n+1} = A_1 v_1^{n+1} + A_2 v_2^{n+1} + A_3 v_3^{n+1} + A_4 v_4^{n+1} \dots\dots (28)$$

式(27)與(28)分別為質點p在下時段的水平速度與垂直速度，而該質點在前時段的水平座標與垂直座標分別為 x_p^n 與 y_p^n 。所以該質點在下時段的新座標為

$$\frac{x_p^{n+1}}{\Delta x} = \frac{x_p^n}{\Delta x} + \bar{u}_p \frac{\Delta t}{\Delta x} \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{y_p^{n+1}}{\Delta y} = \frac{y_p^n}{\Delta y} + \bar{v}_p \frac{\Delta t}{\Delta y} \dots\dots\dots (30)$$

根據下時段的質點座標， $x_p^n + 1$ 與 $y_p^n + 1$ ，即可知質點所處的晶格，然後再檢查此晶格四周相鄰的晶格狀況，充斥晶格或表面晶格或空晶格，就可重新訂定此晶格在下時刻的旗號。含任何質點的晶格可能為充斥晶格，也可能為表面晶格，但不可能為空晶格，只有不含任何質點的晶格才能直稱為空晶格。在前時段的充斥晶格若於下時段其四週有一個空晶格與它相鄰，則此晶格在下時段的旗號就改為表面晶格。相反地，若一晶格原為表面晶格，但在下時段就不再與任何空晶格為鄰，則此晶格在下時段的旗號就改為充斥晶格。最後，因為質點會隨著流體的運動，而跑出計算網格，所以必須在左側入流邊界隨時補充質點。

四、結果與討論

晶格尺寸 $\Delta x' (= \Delta x/y_1)$ 與 $\Delta y' (= \Delta y/y_1)$ 均為無因次，其中 y_1 為已知的超臨界流深度，位於計算網格之左側。在模擬過程中， $\Delta x' = 0.5$ ，而 $\Delta y'$ 採用 1/2、1/3 與 1/4 等三個值，視出流情況而定。所以計算網格採用均勻晶格。其次，速度均以超臨界流之斷面平均速度 V_1 予以無因次化。無因次化的好處為左側入流邊界條件均為 1，即 $U_1' = U_1/V_1 = 1$ 與 $y_1' = y_1/y_1 = 1$ ，不因不同的福祿數而改變。沿 x 軸與 y 軸的晶格數分別定義為 **IBAR** 與 **JBAR**。**IBAR** 的值視上游福祿數 F_{r1} 的多寡而定，沿 x 軸的晶格必須涵蓋水躍本體 (Jump body)，其長度 L_1 以躍後深度 y_2 之六倍計，即 $L_1 = 6y_2$ 。另一方面，水躍前與水躍後之深度比為

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8F_{r1}^2}) \dots\dots\dots (31)$$

以 $F_{r1} = 8$ ，由上述原則即可求得 $L_1/y_1 = 64.95$ ，但 $\Delta x' = 0.5$ ，故 **IBAR** = 129。隨著 F_{r1} 值的減小，**IBAR** 值也跟著減小。其次，**JBAR** 的值不但視上游福祿數 F_{r1} 而定，同時也受 $\Delta y'$ 的影響。以 $F_{r1} = 8$ 為例，由式 31 得知 $y_2/y_1 = 10.825$ ，若 $\Delta y' = 1/4$ ，水躍深度 y_2 即佔 43 個晶格，加上足夠的預留空間，故 **JBAR** 設為 51。計算網格內之晶格即相當於 $2 \leq i \leq \text{IP1}$ ， $2 \leq j \leq \text{JP1}$ 。兩側的左右

虛擬晶格分別位於 $i = 1$ 與 $i = \text{IP2}$ ，且 j 自 1 至 JP2 ；上、下邊界晶格所在之列分別為 $j = 1$ 與 JP2 ；同時 i 自 1 至 IP2 。

如前章所述，由於水躍前的流速 V_1 與 y_1 分別做為速度尺度與深度尺度。因此無因次化的初始速度 U_1' 與初始深度 y_1' 均等於 1，而且在計算過程中其值始終保持不變。這一點不像模擬堰流，其時只有初始速度為一固定輸入值，但是深度卻是浮動的，在模擬過程中將會一直修正，最後趨近於某一定值。發生水躍時，最明顯的現象為流況由超臨界流轉變成次臨界流，水位突然之間由淺變深，而且是大幅度的上升，其深度比示於式 31，所以這一現象就成為模擬水躍之首要重點。易言之，若上游福祿數 F_{r1} 為已知時，則水躍深度應接近式 31 的推側值。此外，水躍長度 L_1 也為少數的共識之一，一般採用 $L_1 = 6y_2$ 。除了上述的水躍長度與深度外，水躍本體的種種現象是一直隨著時間在改變的；水面線的情況也不例外。但是以長時間的平均而言，水躍本體內的種種現象應呈現某些蛛絲馬跡可言。以目前情況而言，只有水躍水面線較為多人探討，同時它兼具上述的共識。因此本文以 **Rajaratnam et al. (1968)** 的研究結果為判斷相關因子對模擬水躍的影響之依據。無因次的水躍剖面 (Jump profile) 可表示為

$$\eta = f(\lambda) \dots\dots\dots (32)$$

式中， λ 與 η 為無因次距離與深度， $\lambda = x/X$ ， x 軸原點設於水躍起點， $X = y_1 [5.08F_{r1} - 7.82]$ ， h 為深度，原點設於渠底點。 $h = 0.75 \eta \times (y_2 - y_1) + y_1$ ，式 32 的函數關係示於文獻 **Subramanya, (1985)**。模擬水位 H 與 h 間的差距為

$$\Delta H_{dv} = \sum_{i=2}^{\text{LJUMP}} (H_i - h_i) \dots\dots\dots (33)$$

式中，**LJUMP** 為水躍範圍所佔的晶格數 (水平)，視上游福祿數 F_{r1} 而定，而右下注腳 'i' 代表晶格水平位置。模擬水位 H_i 與式 32 的推側水位 h_i 之吻合程度反映於水位差距 ΔH_{dv} 之標準偏差 ΔHSD ，其值愈小就表示模擬水位愈接近於式 32 的水面線而已，因為這僅代表相對於式 32 的水面線，模擬水位的起伏比較小而已。上游福祿數 F_{r1} 的值愈大，則水躍的水面線，愈崎嶇不平，絕非

一條平滑曲線，這時候的標準偏差必須再輔以水位剖面的判斷。

如第一章所述，初始流場可分為三大類。一是無下游洩閘門，二是有一下游洩水閘門（位於沿 x 軸的第 IP_2 個晶格）。這兩類的初始流場均為空晶格。第一大類的連續出流條件再分成三種：(一) $U_{IP_2,J} = U_{IP_1,J}$, $V_{IP_2,J} = V_{IP_1,J}$, (二) $U_{IP_2,J} = U_{IP_1-1}$, $V_{IP_2,J} = V_{IP_1-1,J}$, (三) $U_{IP_2,J} = 2U_{IP_1,J} - U_{IP_1-1,J}$, $V_{IP_2,J} = 2V_{IP_1,J} - V_{IP_1-1,J}$ ；其間的差異在於採用不同的差分式以表示 $\partial u/\partial x = 0$ 與 $\partial v/\partial x = 0$ ，分別命名為 A_1 、 A_2 與 A_3 型。第一大類的 $\Delta x' = 0.5$, $\Delta y' = 0.5$ 。第二大類又分為七種型別，不同之處在於下游洩水閘門間隙的大小，計有 $a = 3/2y_1$, $4/3y_1$, $5/4y_1$, y_1 , $3/4y_1$, $2/3y_1$ 與 $1/2y_1$ 等七種分別以 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 、 B_6 與 B_7 表之。晶格之水平尺度 $\Delta x'$ 仍然為 0.5 ，但垂直尺度 $\Delta y'$ 有三種： $\Delta y' = 1/2$ 、 $1/3$ 與 $1/4$ 。故， B_1 、 B_2 、 B_3 型為下游閘門間隙大於上游水深 y_1 ，而 B_4 型則其間隙恰巧等於上游水位，剩下三型均小於上游水位。其次，參閱式(10)與(11)，代表連續出流的差分式只採用第一大類的第三種。第三大類的初始流場並不為空晶格，計算網格包括兩種不同的初始深度，一是水躍前的已知深度 y_1 ，另一是接近水躍的深度；前者為定值，但後者卻為浮動。晶格尺度與第一大類相同。這一大類不再細分，只有一型，命名為 C 型。

上游福祿數 $F_{r1} (= V_1/\sqrt{gy_1})$ 的範圍在 1.4 與 8 之間，模擬時間 T 設為 400 。如眾所知，水躍會逐漸向上游移動，因而淹沒上游的已知深度 y_1 。模擬過程中以第二行的水位高度 $H(2)$ 為判斷的依據，若 $H(2)/y_1$ 大於 1.5 就停止模擬，其對應的時間稱之為淹沒時間（無因次），以 T_{subm} 表之。如果淹沒時間太早，例如小於 0.4 ，則其流況就不深入探討。這種現象只發生於 C 型的初始流場，模擬結果發現若上游福祿數小於 3.9 ，都會形成這種現象。因為較低福祿數的超臨界流的強度不足以克服下游之高水壓，上游一下子就淹沒了。此外， $SMAC$ 方法可適於模擬水位急劇變化的流況，因為這種技巧是利用顆粒的分佈來標示水面線。但是，高上游福祿數極易導致顆粒飛離自由面，且上升至相當不合理的高度。這時候，水位差距 ΔH_{av} 之標

准偏差 HSD 就會變得非常大，本文設定其最大值为 10 。同樣地，形成這種現象業不列入探討。模擬結果顯示只有 B 型的初始流場才會呈現這種現象。

雖然初始流場有十一種不同的型別 A_1 、 A_2 、 A_3 、 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 、 B_6 、 B_7 與 C ，但是模擬結果卻顯示下列的現象。首先式(10)與(11)的差分式不因不同的差分技巧而異。即 A_1 、 A_2 與 A_3 等三型的模擬結果完全相同。因此，第二與第三大類的探討只須採用其中一種差分式即可，用不著如第一大類一般，分別再細分成三種，探討每一種差分式的影響。另外在第二大類之下的不同型別， B_1 至 B_7 ，其間的差異是在於下游閘門間隙之大小，或閘門高度。閘門高度分成三種：一是高於上游水深 y_1 一個晶格，二是與上游水深在同一高度，三是低於上游水深一個晶格。在本文的模擬中，渠底到上游自由面的晶格數 L_2 有三種即 $L_2 = 2.3$ 與 4 ，對應之 Δy 分別 $1/2y_1$ 、 $1/3y_1$ 與 $1/4y_1$ 。本研究發現高於上游水深一個晶格與低於上游水深一個晶格的兩模擬結果完全一致。以 $L_2 = 3$ 為例，這相當於初始流場的型別為 B_2 與 B_6 ；易言之，這兩種型別只須探討其中之一種型別即可。同樣的現象也出現於其他的晶格數 ($L_2 = 2$ 與 4)。這個現象也同樣顯示於渠流的其他場合，例如有二個交替水深，有二個共軛深度。這之間是否有關聯，並不得而知，僅是一種猜測而已。不但如此， B_1 、 B_4 、 B_7 與 A_1 等型別之模擬結果也都相同，易言之，這四種型別的初始流場只須探討其中一種就夠了。總之，由原先的十一種型別減為四種型別即 A_1 、 B_2 、 B_3 與 C 。

式(3)為定量時的水躍剖面，但 $SMAC$ 方法為一顯性技巧；任何定量流之分析均須以變量流的觀點予以處理，而後再判斷是否已足夠趨近於定量流。但斷的方法甚多。本文使用的方法頗類似於判斷停止疊代的方式，參閱式(6)。但是並不針對兩個相鄰的疊代，而改為針對兩個相鄰的時段（或循環），同時只考慮深度。所以由式(3)得知

$$DEVMAX = MAX \left\{ \left| \frac{H_{n+1}^*}{H_{n+1}^*} - \frac{H_{n+1}^*}{H_{n+1}^*} \right| \right\} \quad (4)$$

其值要小於多少才能視為已非常趨近於定量流，這往往因不同的問題而異，必須檢視實際上的模

擬結果才能訂定。

4-1 淹沒時間

除非壅高的水位已抵達計算網格的左端邊界

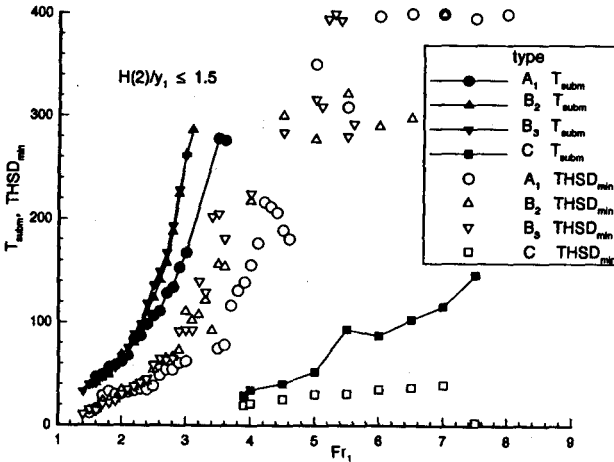


圖 2. 淹沒時間 T_{subm} 與最小標準偏差時間 THD_{min}

(第二行晶格)，淹沒了上游的已知水位 y_1 ($H(2)/y_1 = 1.5$)，因而停止模擬外，模擬時間 T (無因次) 均設為 400。不同的初始流場及上游福祿數 F_{r1} 影響淹沒時間 T_{subm} 甚鉅，其結果示於圖二。不論那一種型別，上游福祿數對淹沒時間的影響非常明顯，而且非常一致；隨著上游福祿數的增加，淹沒時間均呈遞增。上游福祿數愈大，就代表水躍高度愈大，湧向上游移動的速度也跟著愈快，即俗稱「湧」速愈快。然而初始流場是否為空晶格或含一初始深度(下游)對淹沒時間就呈現明顯的差異。參閱圖 2 的實心符號，左邊的三條曲線，其型別分別為 A_1 、 B_2 與 B_3 ，其初始流場全為空晶格。大約上游福祿數超過了 3 之後，淹沒時間就變成相當大。目前摩差因子 f 的值是設為 0.03，或許提高摩擦因子之值可稍微減小淹沒時間 T_{subm} 。此外，以淹沒時間而言，是否含有下游洩水閘門，其影響並不大明顯。易言之，若初始流場是空晶格，SMAC 方法可模擬任何超臨界流水位壅高的流況。另一方面，若初始流場不再是空晶格，而改用兩種不同的初始深度如 C 型的初始流場。以計算網路晶格之中央為分界點，左邊 ($1 \leq i \leq IP2/2$) 的初始深度與速度分別為 y_1 與 V_1 ，在模擬過程中只有第一行晶格之深度與速度始終維持為定值；右邊 ($IP2/2 + 1 \leq i \leq IP2$) 的初始深度與速度分別為 y_2 ，與 0，其中 y_2 是水躍後之水深再乘一比值。針對每一個上游福祿數 F_{r1} ，本研究曾嘗試多種不同的比值，自 0.5 到 2.5。模擬結果發現只有部份的上游福祿數 $3.9 \leq F_{r1} \leq 7.5$ ， y_1 才不致於即刻被淹沒 ($T_{subm} = 0.3$)。因此只有這一範圍之數據才展示於圖二，參閱 C 型之數據分佈。高福祿數的超臨界流一旦形成水躍，則「湧」速必增快，因而即刻淹沒上游，這是可理解的。至於低福祿數也出現即刻被淹沒的情形，可能是由於超臨界流本身強度不足以克服向上游移動的水躍。所以在很短的時間內，上游即刻被淹沒。形成即刻被淹沒之最主要原因，是決定於第二行晶格的容許深度，目前其相對於上游的深度 y_1 的比值是設為 1.5，即 $H(2)/y_1 = 1.5$ 。若提高這個比值，淹沒就可能延後形成，而且展示於圖 2 的上游福祿數 F_{r1} 之範圍也同時擴大，不再是只介於 3.9 與 7.5 之間。關於這一點本文將再詳細探討於後。

的初始深度與速度卻分別為 y_1 與 V_1 ，在模擬過程中只有第一行晶格之深度與速度始終維持為定值；右邊 ($IP2/2 + 1 \leq i \leq IP2$) 的初始深度與速度卻分別為 y_2 ，與 0，其中 y_2 是水躍後之水深再乘一比值。針對每一個上游福祿數 F_{r1} ，本研究曾嘗試多種不同的比值，自 0.5 到 2.5。模擬結果發現只有部份的上游福祿數 $3.9 \leq F_{r1} \leq 7.5$ ， y_1 才不致於即刻被淹沒 ($T_{subm} = 0.3$)。因此只有這一範圍之數據才展示於圖二，參閱 C 型之數據分佈。高福祿數的超臨界流一旦形成水躍，則「湧」速必增快，因而即刻淹沒上游，這是可理解的。至於低福祿數也出現即刻被淹沒的情形，可能是由於超臨界流本身強度不足以克服向上游移動的水躍。所以在很短的時間內，上游即刻被淹沒。形成即刻被淹沒之最主要原因，是決定於第二行晶格的容許深度，目前其相對於上游的深度 y_1 的比值是設為 1.5，即 $H(2)/y_1 = 1.5$ 。若提高這個比值，淹沒就可能延後形成，而且展示於圖 2 的上游福祿數 F_{r1} 之範圍也同時擴大，不再是只介於 3.9 與 7.5 之間。關於這一點本文將再詳細探討於後。

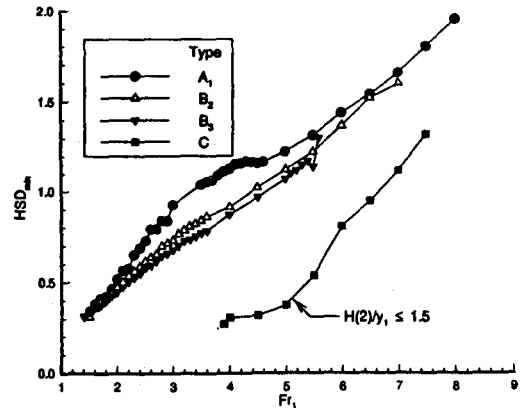


圖 3. 最小標準偏差 HSD_{min}

4-2 水位差距之最小標準偏差

在未淹沒之前，參閱式(3)，水位差距 ΔH_{av} 的標準偏差 HSD 是隨著時間或循環的增加而一直在改變的。在這一段時間內，最小標準偏差 HSD_{min} 受制於不同型別的連續流出條件以及不同之上游福祿數 F_{r1} ，其值 HSD_{min} 及對應之時間 $THSD_{min}$ 分別示於圖 3 與圖 2 (參閱空心符號的分佈)。無論那一種斜別 A_1 、 B_2 、 B_3 與 C 的初始流場，最小標準偏差 HSD_{min} 均隨著上游福祿數 F_{r1} 的增加而明顯

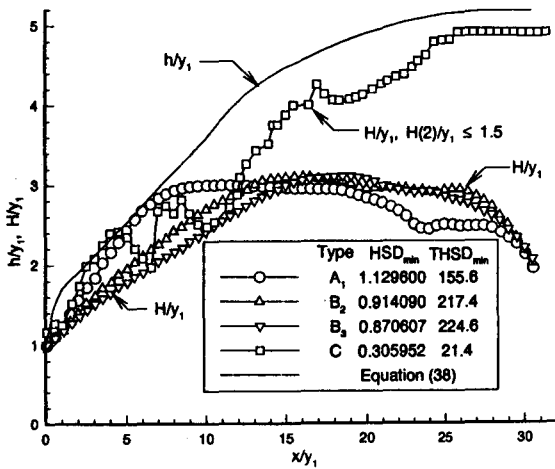


圖 4. 模擬躍體剖面

的遞增。圖 3 的上面三條曲線分別為 A_1 、 B_2 、 B_3 型，初始流場都是空晶格，而底下一條的初始流場並不是空晶格，而是有一初始深度。很明顯地，圖 3 顯示若上游福祿數 $F_{r,1}$ 介於 3.9 至 7.6 之間，以初始流場不是空晶格而有一初始深度的模擬結果較好。但展示於圖 3 的 C 型數據（參閱實心方形符號）是第二行晶格的容許水位小於上游的已知水位 y_1 的 1.5 倍。若提高這個比值，模擬效果並不可能因此改善。若上游福祿數 $F_{r,1}$ 小於 3.9，那只好採用初始流場是空晶格的初始流場。在此情況下，是否於下游安置一洩水閘門對模擬結果並沒有多大的影響，安置比不安置只能稍稍減小最小標準偏差 HSD_{min} 的值而已，參閱 A_1 、 B_2 、 B_3 等三型的數據分佈。

對應於圖 3 的最小相對偏差，其對應時間 $THSD_{min}$ 示於圖 3，以空心符號表示。以不同圖形符號代表不同型別的初始流場，實心符號代表淹沒時間 T_{subm} 。以同一型別而言，即同一圖形符號，時間 $THSD_{min}$ 均落在 T_{subm} 之下方。參閱圖 2 的空心符號，其分佈較為零散；一般而言，無論是那一種初始流場，隨著上游福祿數 $F_{r,1}$ 的增加，時間 $THSD_{min}$ 均呈遞增的走勢。但是若初始流場是空晶格，其最小標準偏差 HSD_{min} 遠比初始流場有一初始深度 $y_{2,1}$ 大得多。

4-3 水面線

最小標準偏差 HSD_{min} 反映的現象有兩方面：一是整段水位剖面是否趨近於式 (32) 所推測之水

位，二是其期間的起伏變化。SMAC 技巧描述水位變化是藉助於流場內的顆粒分佈。因此，水面線即相當於最高顆粒的高度之連線。模擬結果的典型代表 ($F_{r,1} = 4.0$) 展示於圖 4，實線代表式 (32) 的水躍剖面而模擬結果以不同的圖形的空心符號代表不同的型別 A_1 、 B_2 、 B_3 與 C 等的初始流場。參閱圖形符號為圓形，正三角形及倒三角形的數據分佈，這三組數據的初始流場都是空晶格。水面線壅高的幅度並不太，同時接近水躍末端並呈現水位下降的現象，水面線的起伏也不明顯。水躍前端的水位以 A_1 型較符合式 (32) 的推測水位，其餘兩型 B_2 與 B_3 均相當偏離式 (32) 的推測水位。總之，初始流場是空晶格，較不適宜於模擬水躍的水面線。這三組數據的摩擦因子 f 均設定為 0.03，或許再提高摩擦因子的值，可能會提高水位壅高的幅度，使其水位剖面較接近式 (32) 的推測值。方形數據代表初始流場有一初始深度但不是空晶格，圖 4 顯示，以水面線而言，這種初始流場，較易獲得接近式 (32) 的水躍剖面。這四組型別的上遊福祿數為 $F_{r,1}$ 均為 4.0，而第二行晶格的水位均小於上游的已知水位 y_1 的 1.5 倍。

對應於圖 4 的四種型別，水面下的顆粒分佈分別展示於圖 5 至圖 8。從顆粒的散佈情形大致可

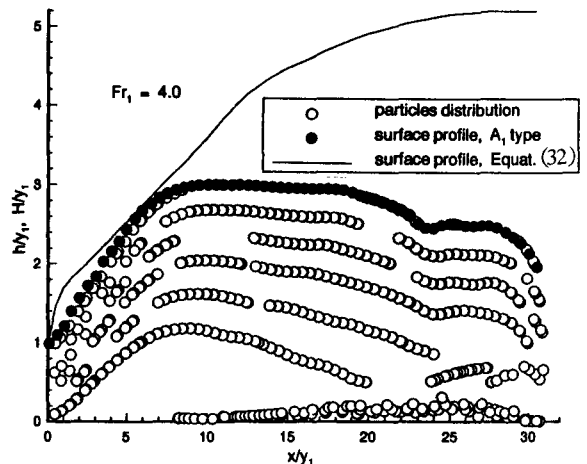


圖 5. A_1 型初始流場之顆粒分佈

看出速度的變化，若顆粒的散佈很均勻，就代表速度很均勻，例如圖 8 的右半段。零亂的顆粒散佈即代表不均勻的速度分佈，例如漩渦的形成等等，這種情形以圖 8 的左半段最為顯著。圖 5 至圖 7 的初始流場都是空晶格，流體是自模擬的開始，

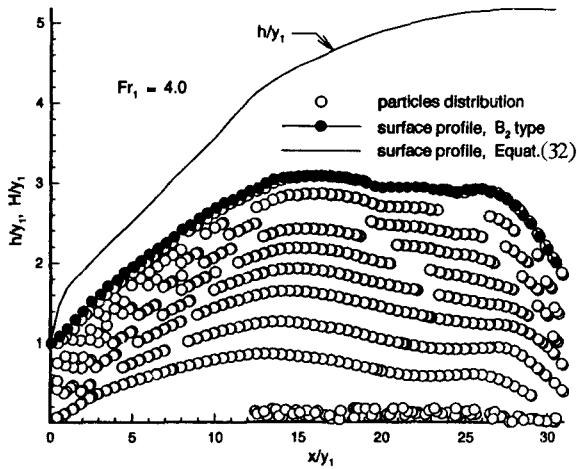


圖 6. B_2 型初始流場之顆粒分佈

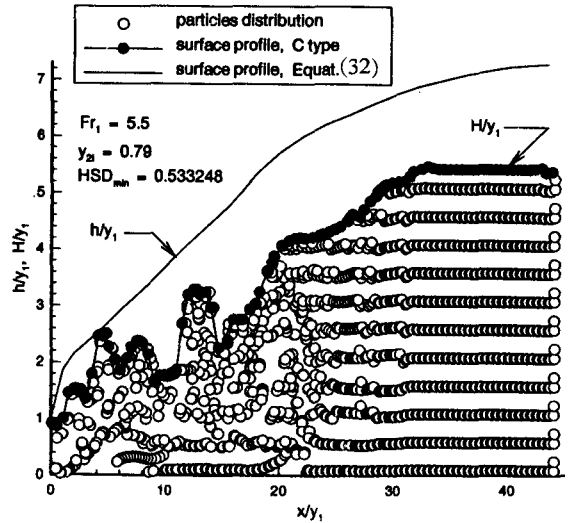


圖 9. $F_{r1} = 5.5$ 之顆粒分佈

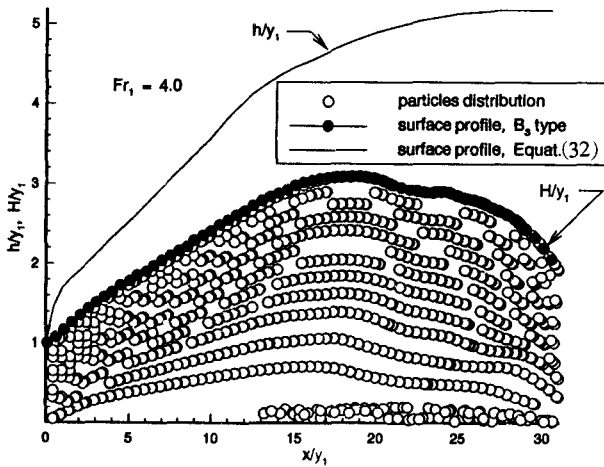


圖 7. B_3 型初始流場之顆粒分佈

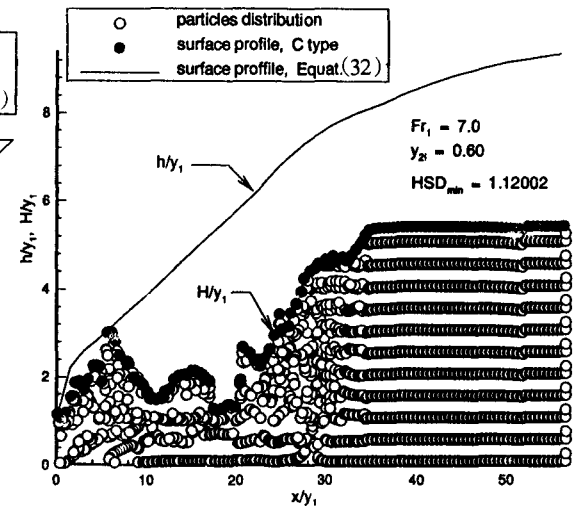


圖 10. $F_{r1} = 7$ 之顆粒分佈

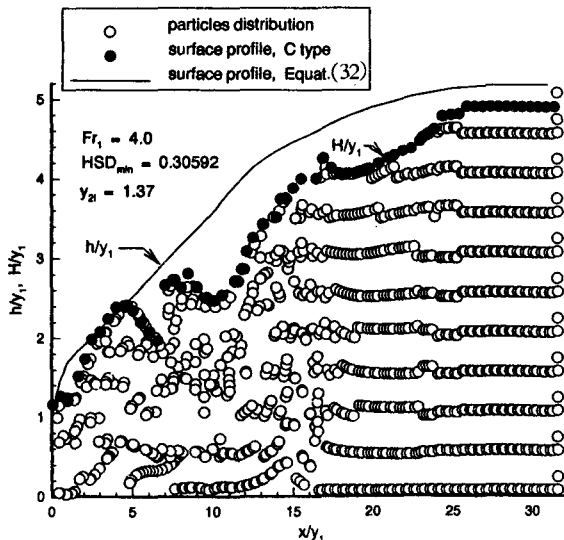


圖 8. C型初始流場之顆粒分佈

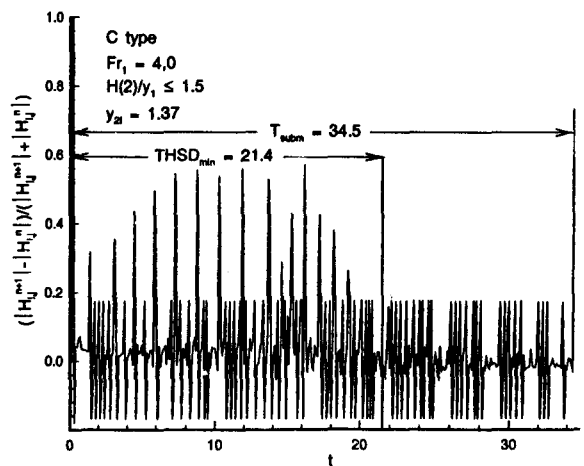


圖 11. C型之差距 ΔH 歷線

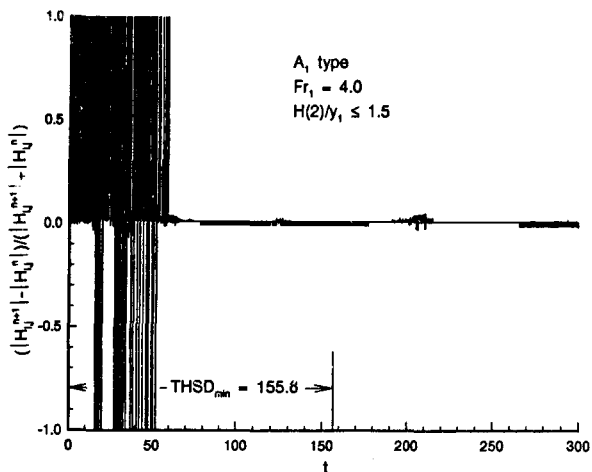


圖 12. A 型之差距 ΔH 歷線

由左邊起流向右邊，除了渠底的阻力外，並沒有明顯的阻力。因此顆粒的分佈就顯得相當均勻，只呈現因渠底阻力而壅高的現象。其次無顆粒的範圍即代表其內的速度太快，致使該範圍的顆粒都被拋至範圍外。例如靠近渠底的左邊，形成一大片空白，但其下游及左上方均累積一大堆顆粒。這種現象也出現於緊接自由面之下方。這正反映自由面之不規則性，也正是水躍剖面之特徵。圖 8 至圖 10 為同一系列的模擬結果，初始流場均為 C 型，不是空晶格而是有一初始深度 $y_{2,i}$ ，對應之上游已知福祿數 $Fr_{1,i}$ 分別為 4.0、5.5 與 7.0。C 型的初始流場會導致淹沒，因而中斷模擬，參閱圖 2。在未淹沒前，最小標準偏差 HSD_{min} 深受初始深度 $y_{2,i}$ 的影響，而後者又視上游福祿數 $Fr_{1,i}$ 的值而定。上游福祿數自 4.0 至 7.5，間距為 0.5，若初始深度以相對水躍後的深度之比值而計，其比值分別為 1.37、0.98、0.842、0.79、0.70、0.68、0.60 與 0.56。比較圖 8 至圖 10 的模擬水面與式 (32) 的推測，即可發現較理想的模擬結果的模擬結果之上游福祿數大致僅介於 4.0 至 6.0。一般而言，C 型的模擬水位線與顆粒散佈大致還合理，但是模擬水面均在推測的水面線之下，圖 10 尤為顯著。如前所述，形成淹沒及中斷模擬的判斷依據是視第二行晶格的水位高度而定。相對於上游已知深度 y_1 ，其比值是設為 1.5。為了提高模擬水位，作者曾嘗試提高其水位，分別為 2.0 與

2.5。但模擬結果完全與比值為 1.5 時的情況相同。在此作者認為使用 SMAC 模擬水躍，其剖面的主要影響因子可能來自阻力。目前本研究的摩擦因子設定為 0.03，也許再提高摩擦因子之值可使模擬的水躍剖面更趨近於式 (32) 之推測。此外，以一單一之數值代表阻力，這或許無法足以代表阻力之真向，必須改用更合理的模式 [Liu et al., 1994]。

4-4 趨近於定量流之判斷依據

SMAC 方法為一顯性法，任何定量流之流況模擬必須以時間累進的方法予以處理，直到前後兩時段的變化（因變數）小到一個相當小的特定值為止，則最後的時段即視為相當於定量流的情況。因變數的選擇及特定值的大小均視問題而異。若以水位為依據，則其差距如式 (33) 所示。是否已趨近於定量流可直接檢視差距隨時間的變化，或差距的根均方（Root mean square）。前者呈現急劇振盪，且遞減，但不明顯；而後者只有在模擬的前時段呈現急劇振盪，而後就不再振盪且呈現單調遞減，較易於判斷何時已趨近於定量流。本文不沿用前兩方法，改採用式 (34)。初始流場為空晶格與含一初始深度之典型結果分別展示於圖 11 與圖 12。圖 11 與圖 12 均顯示當標準偏差為最小時，差距 ΔH ($= (|H_{i,j}^{n+1}| - |H_{i,j}^n|) / (|H_{i,j}^{n+1}| + |H_{i,j}^n|)$) 遠已落在急劇變化的範圍外，參閱 $THSD_{min}$ 所示的垂直線。以趨近於定量流的立場而言，初始流場為空晶格與含一初始深度的差異有兩方面：一是在急劇變化範圍外，前者的差距 ΔH 遠小於後者，分別為 10^{-2} 與 10^{-1} 左右；二是前者不淹沒，但後者會淹沒，一旦形成淹沒，模擬深度水位會突然急劇上升而不是緩慢地改變。由於上述的第二種特點，若初始流場含一初始深度，則其趨近於定量流的時刻將介於一個相當明確的時段內。

五、結論

針對水躍本體（Jump body）內的水位而言，或簡稱為水躍剖面，引用 SMAC 方法模擬水躍的初始流場並不適宜採用空晶格，這僅相當於水自計算網格左邊流入的流況而已。由於渠底之阻力，模擬水位沿流向會逐漸壅高；但無法上升

至超臨界流的另一共軛深度。即使於計算網格的右邊設置一洩水閘門，模擬水位並不受明顯的影響。因此，雖然本研究的初始流場之類別計有：空晶格且無洩水閘門，空晶格但配合一下遊洩水閘門與非空晶格有一初始深度等三類。然而以模擬水躍剖面的效果而言，真正的類別應減為兩種：一是空晶格，二是非空晶格但有一初始深度。

初始流場是空晶格與非空晶格間的最大差異之一，就是前者不會淹沒，但後者會淹沒。若第二行晶格的水位 $H(2)$ 與上游初始深度 y_1 間的比值超過 1.5 倍，就視為模擬流況已轉變成淹沒流，同時中斷模擬。初始流場為空晶格，不論上游福祿數 F_{r1} 的大小，第二行晶格的水位與上游初始深度間的比值 $H(2)/y_1$ 都小於 1.5，大致在 1.2 至 1.45 之間。這正是本研究採用 1.5 作為判斷依據的理由。然而，模擬流況一旦轉變成淹沒流，則下個時段的比值 $H(2)/y_1$ 就會突然增加了好幾倍，而不是慢慢遞增，延續了好幾個時段。因此，淹沒時間易於判斷，而且非常明確。初始流場為非空晶格的淹沒時間隨著上游福祿數 F_{r1} 的增加而略為遞增，大致小於 $40y_1/V_1$ 。

以式(3)所示的水躍剖面而言，初始流場為非空晶（但含一初始深度 y_{2i} ）的模擬結果較為理想，取決於兩者的最小標準偏差 HSD_{min} 。但是，適用的上游福祿數 F_{r1} 只介於 3.9 至 7.5；在這範圍外的上游福祿數，其模擬一下子就中斷了，因為流況很快就轉變成淹沒流。一般而言，上游福祿數在上述的範圍內，模擬的水躍剖面都低於式(3)所推測的，這種差異隨著上游福祿數 F_{r1} 的增加而趨顯著。所以若初始流場採用非空晶格，利用 SMAC 方法模擬水躍大致只適宜於上游福祿數 F_{r1} 介於 3.9 至 5.5 的超臨界流。此外，每一不同的上游福祿數都有一個對應的初始深度 y_{2i} ，使其標準偏差為最小。易言之，初始深度 y_{2i} 對模擬剖面的影響頗鉅。

水躍的特性可部份藉助於顆粒分佈予以了解。以這一點而言，初始流況為非空晶格之模擬流況較具水躍特徵。因為初始流況為空晶格，模擬流況只能反應渠底阻力的影響而已，無法反映

由超臨界流轉變成次臨界流的特徵。

除了初始流場是否為空晶格以及初始深度 y_{2i} 對模擬結果的影響外，阻力的計算也是極需考慮的因素之一。雖然渠流與管流有頗多相通之處。因此，本研究以一單一之值的摩擦因子（ $f = 0.03$ ）來代表阻力。這或許由於過於簡單導致模擬結果不太理想。因此不同摩擦因子的值與不同的阻力模式對模擬的影響，都是值得進一步探討。

以 SMAC 方法所展示的顆粒分佈而言，這種數值模擬技巧極適宜於模擬急劇變化的流況，例如水躍。而水躍為一極具複雜的流動其本體內的機構（Mechanism）之得以展示，首先仰賴其自由面的模擬是否正確。

Reference

1. Chippada, S., Ramaseswamy, B., and Wheeler, M. F., 'Numerical Simulation of Hydraulic Jump', Int. J. Numer. Methods Fluids, 37, pp.1381-1397, 1994.
2. Daily, J. W., and Harleman, Donald R. F., Fluid Dynamics, Addison-Wesley Pub. Co, Inc., Reading, Mass., 1966.
3. Fischer, H. B., and Hanamura, T., 'The Effect of Roughness Strip on Transverse Mixing in Hydraulic Models', Water Resources Res., vol. 11, no.2, pp.362-364, April 1975.
4. Golafshani, M., 'A simple Numerical Technique for transient Creep Flows with Free Surface', Int. J. for Numerical Methods in Fluids., vol.8, pp.897-912, 1988.
5. Hirt, C. W., 'Heuristic Stability Theory for Finite Difference Equations', J. Comput. Phys., Vol.2, pp.339-355, 1968.
6. Liu, Q. and Drewes, U. 'Turbulence Characteristics in Free and Forced Hydraulic Jumps', J. Hyd. Res., vol. 132, no.6., pp.877-898, 1994.
7. Munson, B. R., Young, Donald F., and Okiishi, T. H., Fluid Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.
8. Nichols, B. D., and Hirt, C. W., Improved Free-

- Surface Boundary Conditions for Numerical Incompressible Flow Calculations', J. Comput. Phys., vol. 8, pp.4344-448, 1971
9. Rajaratnam, N., and Subramanya, K., 'Profilee of the Hydraulic Jump', J. of Hyd. Div., Proc. ASCE, Paper no. 5931, pp.663-673, May 1968.
10. Subramanya, K., Flow in Open Channeels, India, p. 196,1982.
11. 周恆毅, '自由跌水之數值模擬', 淡江大學水資源及環境工程研究所碩士論文, 台北, 1994。
12. 施清吉, 蕭文福, '應用 MAC 並配合高度函數於二維堰流', 農業工程學報, vol.39, no. 3, pp. 1-12, 1993。
13. 施清吉, '初始深度對模擬堰流之影響', 農業工程學報 vol.40, pp.6-12, no. 4, 1994.

收稿日期：民國 84 年 4 月 14 日

接受日期：民國 84 年 4 月 27 日

(上接第 60 頁)

- 區大眾捷運系統防洪排水設計之研究」, 研究報告第一百號, 民國七十八年十二月。
15. 洪華生, 鄧漢忠, 工程或然率, 中國土木水利工程學會, 民國七十年三月。
16. 蔡清彥, 「老天的臉色」, 重點科技簡介叢書, 行政院國家科學委員會編印, 1990。
17. 余濬, 「降雨設計雨型之研究」, 台灣大學土木工程學研究所碩士論文, 民國七十七年六月。
18. 林國峰、張守陽, 「台灣地區雨型之初步研究」, 台灣大學水工試驗所研究報告第一一八號, 民國八十年七月。
19. 林國峰、張守陽, 「台灣地區雨型之研究(一)」, 台灣大學水工試驗所研究報告第一百四十四號, 民國八十一年十二月。
20. 林國峰、張守陽, 「台灣地區雨型之研究(二)」, 台灣大學水工試驗所研究報告第一百六十三號, 民國八十二年六月。
21. 徐享崑、游保杉, 「雨量時間分佈之研究」國科會專題計畫成果報告, NSC-82-0410-E-006-177, 民國八十三年三月。
22. 張守陽, 「台灣地區降雨分佈之特性(一)北部地區」, 國科會專題計畫成果報告, NSC-82-0115-E-027-032, 民國八十三年三月。
23. 林國峰、張守陽, 「台灣地區雨型之研究(三)」, 台灣大學水工試驗所研究報告第一百九十三號, 民國八十三年六月。

收稿日期：民國 84 年 2 月 20 日

修正日期：民國 84 年 6 月 26 日

接受日期：民國 84 年 6 月 28 日