農業工程學報 第41卷第2期
中華民國84年6月出版

Journal of Chinese Agricultural Engineering
Vol. 41. No. 2, June 1995

專 論

計畫網路時程成本問題之切割解法

A Cut Algorithm for a Project Network Time/Cost Problem

國立臺灣大學農業工程學研究所教授
劉 佳 明

摘 要

本文介紹計畫網路時程／成本抵換問題 (Project time/cost trade-off problem)[2] 的一個網路切割演算法。這個問題是在關鍵路線法 (Critical path method) 所考慮的工作順序之外，還容許工作可多付代價以趕工。因此，實際工作時間可長於或短於正常工作時間，但是卻不能短於最趕工作時間。而且各工作除了額外支付趕工的直接成本，還必須分擔整個計畫的辦公費、管理薪資等經常性的間接成本，所以若縮短完成時間，各別工作雖要爲趕工付出趕工成本，但是整個計畫卻減少了間接成本。本文所介紹的方法就是要安排各項工作的時程以使總成本爲最小。

上述問題能以線性規劃模式表示，所以可用標準方法一簡單形體法 (Simplex method) 求解，但是由於它的對偶 (Dual) 問題具有網流 (Network flow) 型式，因此傳統上是以效率極高的網流方法 [2] 求解。爲了免於藉助非必要而且抽像的對偶問題，本文直接處理原題，根據簡單形體法的原理，專爲它發展出效率與網流方法一樣高的網路切割簡形法 (Network cut simplex method)[11,12] 。

一個計畫的順序關係能以網路圖來表示，對關鍵路線法而言，每一個工作在網路中有一個對應的管線，該工作的正常工作時間是以對應管線的長度表示，這個方法的主要步驟就是在求起點至各節點的最長路線所形成的張成樹 (Spanning tree)，而樹中連接起點到終點的部份就是所謂的關鍵路線。在上述的網路最長路線張成樹中的管線就稱爲枝子，其實際工作時間爲正常值或最趕值，其它管線則稱爲弦，其實際工作時間不能小於最趕值，可能是在趕工也可能有寬餘時間。枝子的實際工作時間一旦確定，便可由起始節點開始沿枝子求得網路各節點的時間，而各弦的實際工作時間就是各該弦二端節點時間的差值，因此方案的時程與成本便可隨而算得。

因爲時程成本問題所考慮的因素不只是時間，另外還有成本，所以網路各管線除了以長度表示工作時間，還能以寬度值表示趕工一單位時間的成本。因此一個工作的趕工時間與成本分別能以切割網路所截下管線的長度與面積來表示。切割法就是對計畫網路反覆進行切割以期降低成本，每次切割還使二條管線的地位

對調：一條由枝子變成弦，另一條由弦變成枝子，因而形成新的張成樹。切割反覆進行，直到不再能降低成本時停止，最後的解就是使成本最小的時程方案。
關鍵詞：時程，網路，計畫時程成本抵換，線性規劃，簡形法，切割演算法。

ABSTRACT

A cut algorithm for a linear program of project time/cost trade-off problem is presented. It is assumed that expediting any job of a project in less than its normal time, but more than its crash time, is possible at a linear additional cost. Apart from these dircet costs of shortening duration times of jobs, a linear indirect cost of the project completion time is also assumed. The objective of the problem is to find a schedule so that the total of the direct and the indirect costs is minimized.

The algorithm is a specialization of the simplex method. In each iteration, a schedule, identified by a spanning tree with branches just at their normal or carsh times, is cut and turns into another schedule, which corresponds to another spanning tree, with improved total cost. This direct approach is visual and thus insightful.

The pure primal algorithm avoids the traditional transition to the less tangible dual network flow program and yet the efficiency is the same as the network flow methods.
Keywords: Schedule, Network, Project/time cost trade-off, Linear program, Simplex, Cut algorithm.

一、前　　言

本文將介紹計畫時程／成本抵換 (Project time/cost trade-off) 問題 [2] 的線性規劃模式及其高效率的網路切割法。此模式是在關鍵路線法 (Critical path method,CPM) 所考慮的工作順序之外，另又考慮多付費用趕工的因素。因此每個趕工的工作有其直接成本，而整個計畫則還需分擔間接成本，包括辦公費管理薪資等經常性的開支。所以縮短計畫完成時間雖要爲趕工的各別工作付出趕工成本，但同時卻也減少了全計畫的間接成本。若整體考量這二類成本，可以安排所有工作的時程使得總成本爲最小。

這是一個線性規劃問題，因此可以用標準解法－簡單形體法 (Simplex method) 來求最佳解。此法又稱單純形體法，故簡稱簡形法或單純形法。這個方法在變數與限制式較多時，所需要的記憶量與計算時間非常龐大。Fulkerson[2] 發現這個線性規劃問題的對偶 (Dual) 是網流 (Network flow) 問題，故可用網流的高效率方法解決計算量的問題。後來 Phillips 與 Dessouky[4] 發展出網路切割與流量二種觀念兼用的解法，其步驟是以切割網路管線長度（即決定趕工時間）的方式逐漸改善方案的成本，但是在決定切割對象與其成本（即趕工成本）時，還是採用了網流的觀念。

本文根據簡形法的原理，不涉及任何型式的對偶網流問題，直接針對原題發展網路切割簡形法 (Network cut simplex method)[9-12]，此法採用網路的張成樹 (Spanning tree)、割集 (Cut set)（分別相當於起點至各節點的最長線路的聯集、趕工管線集合）與切割等觀念 [1]，有系統的比較網路的可能切割與成本，選擇其降低成本速率最快者，逐步改善方案。此解法有圖形上的直觀意義，不必藉抽象的偶題求解即能發揮網路計算的效率，因此易於了解，方便推廣，而且實用。

二、計畫時程／成本權衡問題

已知一計畫包含許多工作，有些工作之間有順序的關係，一個工作必需在它的先行工作完成之後才能開始，如果以一個箭號線段代表一項工作，則順序的關係能以網路圖來表示，如圖 0。（見第四節）網路中各項工作以其後端與前端二

個事件節點編號的有序對 (i,j) 表示，工作 (i,j) 的正常工作時間記爲 n_{ij}，簡稱正常工時。這個工作可以趕工，每提前一單位時間完工必需多付出的趕工成本爲 c_{ij}，但是工作時間若超過正常工時，並不能因此節省成本。而工作時間並有其下限，不能少於最趕工時 m_{ij}。除了計畫各工作趕工的直接成本，公司另外還應負擔辦公費管理薪資等間接成本，整個計畫的單位時間間接成本爲 c_0。縮短計劃完成時間雖要付出各別工作的趕工成本，同時卻也減少了計畫的間接成本。因此安排時程，使得直接與間接二類成本的總和最小，便是所要建立模式的目標。

假設計劃的開始與結束時間分別爲 T_1 與 T_n，計劃中工作 (i,j) 的實際工作時間爲 T_{ij}，它可開始與須結束的時間分別爲 T_i 與 T_j，其趕工時間爲 $\triangle T_{ij}$，則時程問題可以表示成下列的線性規劃模式：

使下列目標函數值最小

$$Z=C_0(T_n-T_1)+\sum c_{ij}\triangle T_{ij} \quad (0)$$

滿足限制式

$$T_j-T_i-T_{ij}\geq 0 \quad (1)$$

$$T_{ij}+\triangle T_{ij}\geq n_{ij} \quad (2)$$

$$T_{ij}\geq m_{ij} \quad (3)$$

$$\triangle T_{ij}\geq 0 \quad (4)$$

限制式中的變數 T_{ij} 可以消去，且知工作 (i,j) 的趕工時間有其上限 $\triangle t_{ij}=n_{ij}-m_{ij}$，故模式能夠簡化，其目標函數仍爲原式 (0)，限制式則可化爲

$$T_j-T_i+\triangle T_{ij}\geq n_{ij} \quad (5)$$

$$\triangle T_{ij}\leq\triangle t_{ij} \quad (6)$$

$$\triangle T_{ij}\geq 0 \quad (7)$$

本文以下討論均針對此簡化後的模式。各式中每一對下標 i,j 表示一個工作，式 (0) 第二項乃對所有工作之和。所有工作在目標函數中均有一個對應項，而在結構式 (5)、上限式 (6) 與下限式 (7) 中則各有一個對應式。起始節點 1 的節點事件時間通常令爲 $T_1=0$。

上列模式能以網路圖表示，圖 0 即爲表 3 範例的資料網路圖（本節所提圖表均請見第四節）。資料圖也可以分成時程圖以及成本圖（如第四節圖 1(a) 及 1(b)）。網路圖與模式資料的關係如下：

*1.*每根管線各代表一項工作 (i,j)，因此在資料網路圖中對應有三個數值，依序是正常工時 n_{ij}，趕工上限 $\triangle t_{ij}$ 以及單位趕工成本 c_{ij}。計畫的單位時間間接成本爲 c_0。

*2.*每一節點 i 有一對應事件時間 T_i，稱爲其節點值或節點時間，對起自此節點的工作而言，此值表示該工作可開始的最早時間，對指向此節點的工作而言，此值表示該工作須結束的最遲時間，各方案網路圖之節點時間填註在節點圓圈內。

*3.*對任一節點而言，所有指向該節點的工作是所有引自該節點工作的先行工作。

*4.*時程網路圖可以表現每項工作實際工時與正常工時的差距，因此每根管線除了標註其正常工時，若實際工時小於正常工時，表示有趕工的情況，則在正常工時之後以「-」號連接趕工之時間 $\triangle T_{ij}$；若實際工時大於正常工時，表示工作有寬餘時間，則在正常工時之後以「+」號連接寬餘時間。參考第四節圖 2(a)。

*5.*成本網路圖對應有兩個數值。二者分別表示在目前方案下該工作截短與嵌加一單位時間之成本，因此與單位趕工成本不完全相同。參考第四節圖 2(b)。

*6.*爲了表示整個計畫的間接成本也可以在網路圖上加一根從起點到終點的管線，但是本文不擬採用這個方式，不加這條管線，間接成本各別考慮。

三、網路切割解法

一個計畫的順序關係能以網路圖來表示，網路切割解法 [9-12] 利用圖論與網路論的一些基本概念 [1,3] 來解時程成本問題。

網路的一個張成樹是連結了網路的所有節點而且沒有迴路的一個管線集合，張成樹與時程方案有對應關係。網路中屬於張成樹的管線稱爲枝子，其實際工作時間或爲正常值或爲最趕值，其它的管線稱爲弦。枝子的值一旦確定，便可由起始節點開始沿枝子求得各節點的時間，弦的實際工作時間則可由弦二端節點的時差算得，因此各管線趕工成本與時程方案的成本便可算得。在第四節各圖中所有粗管線表示枝子，細管線爲弦。

若截斷張成樹的任一枝子，則樹分成二部

份，但是枝斷弦連，有些弦也要與枝子一併截斷才能使網路分成二部份，因此這些管線的集合稱爲割集。每條枝子各有其對應的割集，一株張成樹所有枝子所對應的割集合稱爲這株樹的基本割集組。

網路切割解法的初始解是利用關鍵路線法求得的，它將各工作的正常工時當作對應管線的長度，求得起點至各節點最長路線所形成的張成樹，此樹所對應的時程方案可作爲初始解。

因爲時程成本問題不單考慮時間還考慮成本，所以各工作所對應的管線在長度之外還有寬度，一個工作的趕工時間與成本分別能以切割網路管線所截下部分的長度與面積來表示。網路切割簡形法是對工作計畫網路反覆進行切割以形成不同的張成樹，即不同方案，來降低成本。切割一條枝子所對應的割集一單位長度代表增減該割集各元素的工作時數一單位，因此總成本會隨著變動，這就是一個枝子（割集）的單位切割淨成本。比較一個方案所對應的樹中各枝子的單位切割淨成本，選其中最有利者予以切割，並漸增其切割量，則割集中的一條弦將先到達其最趕或正常工時，這條弦因此變成枝子，而原來的枝子卻因切割而變成弦，於是形成一株新的張成樹，也就是一個新方案。網路切割簡形法就是在挑枝子予以切割、找弦線代換成枝子與按此策略嵌截成新樹等步驟之間反覆進行，直到切割無益時停止，所得即爲最佳解。

本節對切割簡形法的四個步驟先作一般說明，下節將以簡例進行演算，可以對照閱讀。

步驟0：尋找初始方案

如果將正常工時當作各網路管線的長度，用類似求最短路線的方法，求起點至其它各節點的最長路線，則這些最長路線的聯集組成一株張成樹，樹中連接起點到終點的部分就是關鍵路線。

不考慮原問題趕工因素的關鍵路線法 [1-3] 所得到的最佳解，其實就是這株張成樹的對應解。這個解可以當作切割解法的初始方案。若以最趕工時代替正常工時，所得到的方案也可當初始解。

步驟一：決定目前方案基本割集組

前文已經說明張成樹連結了網路的所有節點，若截斷任一枝子，則樹分成二部份，所有節點亦分成兩個集合：一個是枝子前端所屬的集合，以B表示，一個是枝子後端所屬的集合，以A表示。但是A,B兩個集合間的管線除了截斷的枝子還另外有一些弦。必須將這些弦一併截斷，整個網路圖才會真正分成兩個集合，因此一個枝子及所對應的這些必須同時截斷的弦，合稱爲一個基本割集。每根枝子都有一個對應的基本割集，而一株張成樹所有枝子所對應的基本割集則合稱爲一個基本割集組，切割解法的第一個步驟便是針對目前所考慮的方案定出它的基本割集組。請注意本文所謂切割泛指截短與嵌加，並不只是截短。

步驟二：決定各割集淨成本及切割最有利的割集

當枝子切割時，整個圖形中只有屬於割集的弦會受影響。所以割集切割時成本的改變爲

淨成本＝枝子切割成本＋∑割集中各弦切割成本

而在決定割集中各管線的切割成本，必需根據各管線的切割型態與工時狀態來決定：

1. 切割型態：管線的指向決定切割型態，
   ①弦與枝同指向時：其切割型態與枝相同，即枝嵌則弦嵌，枝截則弦截。
   ②弦與枝反指向時：其切割型態與枝相反，即枝嵌則弦截，枝截則弦嵌。
2. 工時狀態與切割成本：工時狀態與切割成本的關係可歸納如下列原則與表 1，

表 1. 割集各管線的單位切割成本

管線情況	枝子		弦	
	正常工時	最趕工時	有寬餘	有趕工
截短	單位趕工成本	∞	0	單位趕工成本
嵌加	0	-單位趕工成本	0	-單位趕工成本

①實際工時大於正常工時（有寬餘時間）時：不論截短或嵌加，成本皆爲零。

②實際工時等於正常工時時：截短則有趕工成本；嵌加則成本爲零。

③實際工時在正常與最趕工時之間時：截短有趕工成本；嵌加則有收益，其絕對值等於趕工成本值，因爲原先此段已有趕工，故增加實際工時等於減少趕工。

④實際工時等於最趕工時（趕工達上限）

時：截短的成本為無限大；嵌加則有收益，其絕對值等於趕工成本。

成本網路圖可以按照上表繪成，所以知道枝子的切割型態便可查出各管線的切割成本，並據以求出各割集的切割淨成本，其值標在枝子邊的中括號之內，請參考第四節圖 1(b) ～ 4(b)。

以上述方法求得所有基本割集的淨成本，取其中最有利的割集作為擬嵌截的割集。參考第四節圖 1(a) ～ 3(b) 中的虛線。若所有的割集嵌截的淨成本均為正，則表示目前方案已是最佳解，因此停止演算，否則進行下一步驟。

步驟三：決定切割量

擬嵌截割集的切割量是割集中各管線可變動量中的最小者，而各管線的可變動量表示從目前工時狀態變動到最趕工時、正常工時或最長工作時間的可變動範圍。因此決定各管線的可變動量時亦必需根據切割及工時狀態而定，其原則可歸納如下表：

表 2. 割集各管線的可變動量

管線情況	枝子		弦	
	正常工時	最趕工時	有寬餘	有趕工
截短	趕工上限	0	寬餘時間	實際工時－最趕工時
嵌加	沒有限制	趕工上限	沒有限制	趕工時間

步驟四：修正舊方案為新方案

根據選定的割集及切割量可將舊方案修正而得到新方案，修正的原則如下：

1. 管線的修正：屬於所選割集的管線按其型態嵌截。不屬於所選割集的則不受影響。
2. 張成樹與節點值的修正：所選割集的枝子退出樹成為弦，決定切割量的弦則加入成為枝子，新樹於是形成，所有的節點值與弦的趕工與餘寬值也重新決定。
3. 總成本的修正：新方案總成本可直接求得，也可由舊方案修正得到：新案總成本＝舊案總成本＋單位切割淨成本×切割量。

在步驟四之後又回到步驟一，如此反覆進行，直到步驟二中所有割集的嵌截淨成本均為正，表示嵌截不再有利，這時才到達最佳解而停止演算，以上網路切割解法的步驟可繪成圖 0(a) 的流程。弦退化為枝子的情況在此並未考慮。

表 3. 計畫工時成本資料表

工作編號	工作項目	正常工時	最趕工時	可趕上限	單位趕工成本
#1	1-3	5	2	3	3
#2	1-2	5	2	3	4
#3	1-4	6	4	2	3
#4	2-3	4	2	2	2
#5	2-4	7	3	4	1
#6	3-5	3	0	3	4
#7	4-5	3	3	0	∞
單位時間間接成本				7	

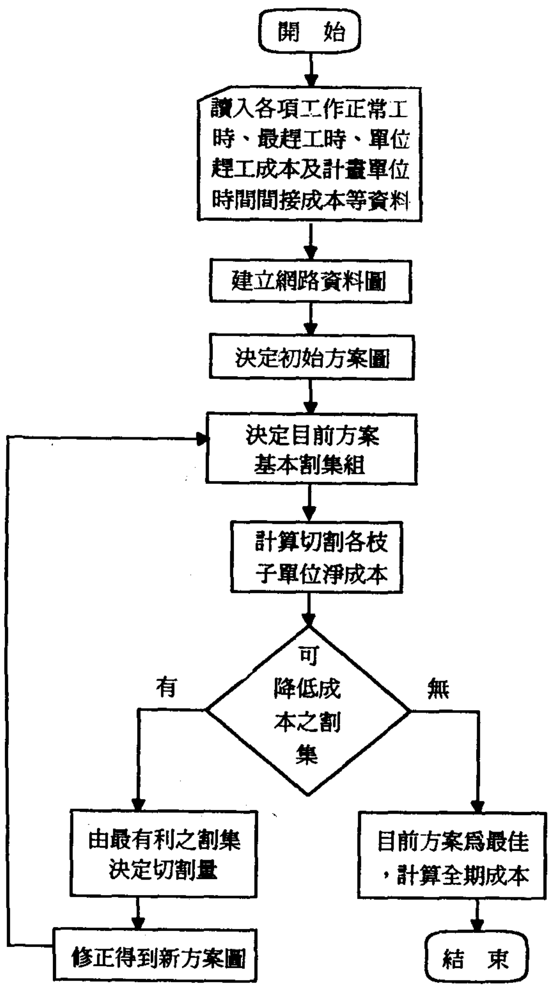

圖 0(a) 計畫網格切割簡形法流程圖

四、簡例演算

以上介紹了計畫時程與成本權衡問題及其網路切割解法的流程。本節將以簡單實例具體說明各演算步驟。

一計畫各工作的順序、工時與成本等資料列如表 3，將其繪成如圖 0(b) 的網路請注意，此圖節點圓圈內數字爲節點編號，以下各圓則爲節點值。爲求成本最小之時程方案，乃按上節網路切割解法的步驟演算如下：

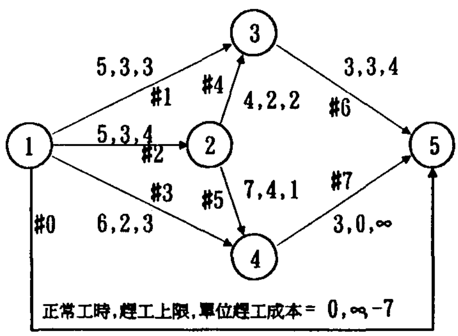

圖 0(b) 計劃網路簡例資料圖

步驟一～步驟二：

根據關鍵路線法可得到初始方案（圖 1(a)），其所對應的基本割集組及淨成本可歸納如下表。圖 1(b) 爲初始方案的成本網路圖。

表 4. 初始解單位切割淨成本表

基本割集			枝子成本	弦成本		淨成本
枝	弦					
#2$^-$	#1$^-$,#3$^-$	#0$^-$	4	0+0	-7	-3
#4$^-$	#1$^-$,#6$^-$		2	0+0		2
#5$^-$	#6$^-$,#3$^-$	#0$^-$	1	0+0	-7	-6
#7$^-$	#6$^-$	#0$^-$	∞	0	-7	∞

上標「-」表示截短，「+」表示嵌加

步驟三：

由表 4 可選定割集 {#5,#6,#3,#0} 切割，其淨成本 -6 最爲有利。另由表 2 或圖 1(a) 及表 3 可知，割集中各管線的可變動量依序爲 {4,3,6,15}，所以切割量爲其中的最小值 3，由管線 #6 所決定。

步驟四：

管線 #5 退出張成樹，管線 #6 進入。割集 {#5, #6,#3,#0} 的管線均截短 3 單位，其餘管線維持不變。總成本變化 (-6) × 3=-18 單位。所以新方案（方案二）時程與成本如圖 2(a) 與 2(b) 所示。

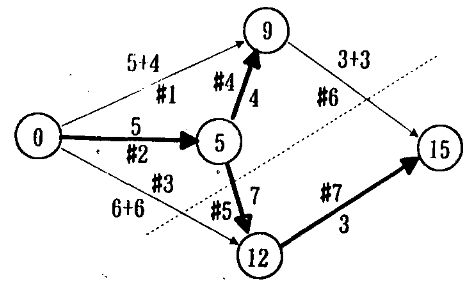

圖 1 (a) 方案一時程圖

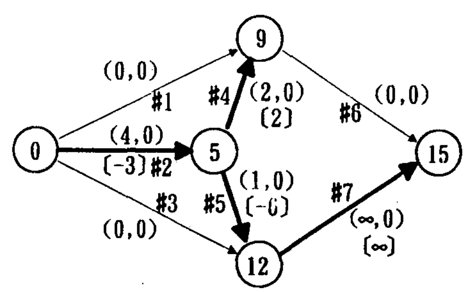

圖 1 (b) 方案一成本圖

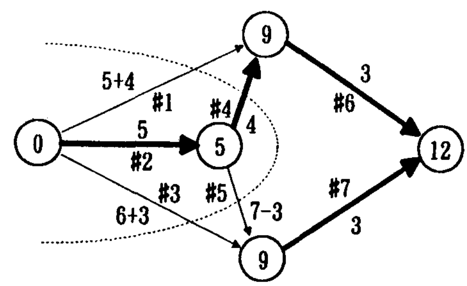

圖 2 (a) 方案二時程圖

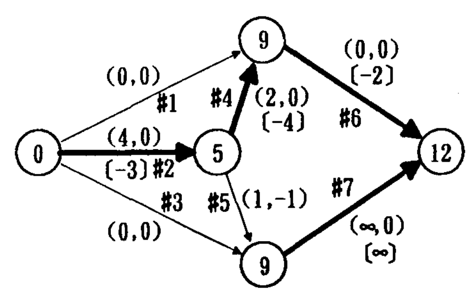

圖 2 (b) 方案二成本圖

步驟四之後重回步驟一，開始新的回合。

按照上述步驟反覆演算，經過三次切割後達到最佳解。在最佳解時各割集的淨成本如表5，整個簡例的三次切割演算過程可歸納如表6與圖5。

表 5. 最佳解單位切割淨成本表

基本割集			枝子成本	弦成本		淨成本
枝	弦					
#3^{-}	#1^{-},#2^{-}	#0^{-}	3	0+4	-7	0
#5^{-}	#2^{-},#4^{-}		-1	4-2		1
#6^{-}	#1^{-},#2^{-}		4	0-2		2
#7^{-}	#1^{-},#4^{-}	#0^{-}	∞	0+2	-7	∞

上標「-」表示截短，「+」表示嵌加

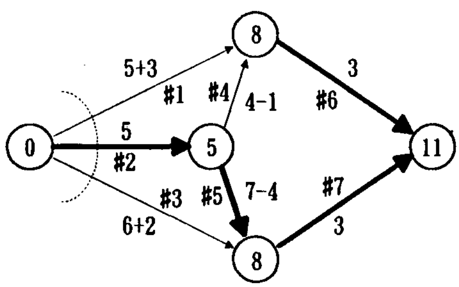

圖 3 (a) 方案三時程圖

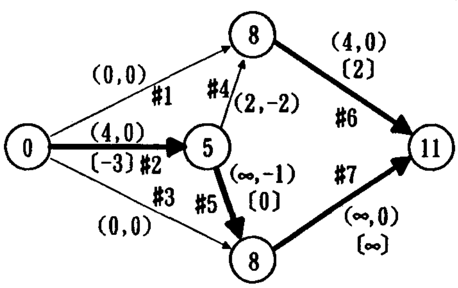

圖 3 (b) 方案三成本圖

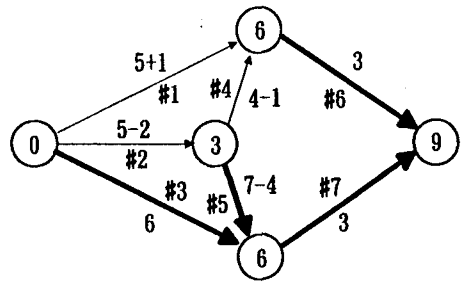

圖 4 (a) 方案四時程圖

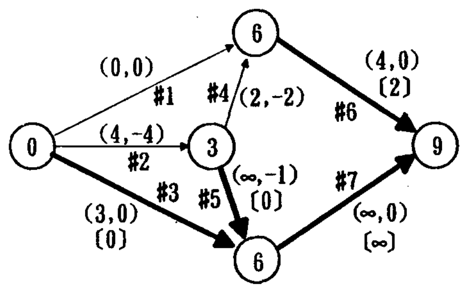

圖 4 (b) 方案四成本圖

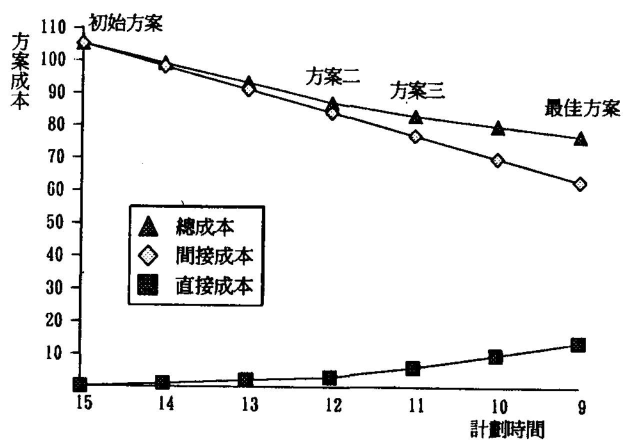

圖 5 計劃時程成本圖

表 6. 簡例方案切割過程表

方案	割集		單位切割成本			切割量	計畫時間	方案成本		
	枝	弦	枝	弦	淨			間接	直接	總
一	#5	#6,#3,#0	1	0+0−7	-6	3	15	105	0	105
二	#4	#1,#5,#3,#0	2	0+1+0−7	-4	1	12	84	3	87
三	#2	#1,#3,#0	4	0+0−7	-3	2	11	77	6	83
四	最佳解						9	63	14	77

五、基本解、張成樹與簡形法

考慮本文第二節所列計劃網路成本問題的線性規劃模式，若管線數目爲 m，節點數目爲 n，則因爲每一個節點 i 有一個對應節點時間 T_i，但是起始節點時間設定爲零 T_1 =0 乃一常數，故共有節點變數 n-1 個；而每一條管線 (i,j) 有二個對應變數，趕工時間 $\triangle T_{ij}$ 與寬餘時間（即結構式(5)中未列出的餘變數）。因此管線變數共有2m個，節點與管線變數全部共有 2m+n-1 個。對應於每一條管線有四個限制式：包括一個結構式(5)、一個趕工時間上限式(6)、一個趕工時間下限式(7)與一個未列出的寬餘時間下限式。每條管線的二個管線變數恆成對地出現在同一個結構式中，故不能同爲基本變數，但是可以同爲非基變數，而節點變數並沒有上限或下限，故恆爲基本變數。如果從 m 條管線中適當地挑出其中的 (n-1) 條（稱之爲弦），令其二個對應變數的值均爲上限或下限，且令其它 m-(n-1) 條管線（稱之爲枝子）的一個變數值爲上限或下限，則這些在上限或下限的管線變數共有 2(n-1)+m-(n-1)=m+n-1 個，稱爲非基本變數，剩下枝子的另外 m-(n-1) 個管線變數與 n-1 個節點變數，總共 m 個，稱爲基本變數，其值可從 m 個結構式(5)求解得到，這種解在線性規劃中稱爲基本解 (Basic solution)。如果所解得的變數值都在上下限範圍內，則這個解稱爲基本可行解 (Basic feasiable solution)。上面所選 n-1 條管線，其所對應的二個變數值均在上、下限者，若不構成一株張成樹，就無法由 m 個結構式得出 m 個基本變數的唯一解。亦即，非基本變數的選擇必須適當才能使結構式線性獨立，因而可以得到唯一的一組基本變數的解，在網路問題中與此對應的就是張成樹觀念，細節請參考網路流或電路系統的專書。

在分析了計劃網路模式的解及其與網路的張成樹的關係之後，可知網路切割步驟中選擇枝子截短或嵌加，使它成爲弦，其實相當於簡形法選擇一個非基本變數，讓它進入基底成爲基本變數，而在枝子嵌截時決定嵌截量的那個弦會成爲枝子，該弦的二個變數中爲基本變數的那個要退出基底成爲非基本變數，二個變數因此都是非基本變數，也就是這條弦變成了枝子。

本文的切割解法其實就是特殊化的簡形法，因此這個解法可以稱爲網路切割簡形法 (Network cut simplex method)。有興趣的讀者可以列出第四節簡例的線性規劃模式，用簡形法解它，然後與本文圖表比對其步驟。

六、回顧與討論

本文所介紹的網路切割解法是作者在探討一類水庫規劃模式 [5-11] 與其可能解法的過程中逐漸發展出來的，其轉折相當有趣，顯示了網路問題與方法的多樣性，尤其是網路的切割與流量二個問題的代數與幾何二種對偶性，值得回顧以供參考。一九七四年作者發現所探討的一個水庫規劃模式 [5]，其結構與計劃網路時程成本問題 [2] 類似，只是變數由時間改成體積而已，所以它的對偶問題具有網流性質，因此特別爲它發展了一個路線式網流解法，但是因爲偶題觀念的抽象，並沒有得到什麼回應，從此就一直想擺脫偶題以便直接在原題上求解。先是將原模式的限制式加以組合，以期減少限制式的數目，因此設計出純粹原題的一個解法 [6]。後來才將原水庫模式擴充爲標的規劃模式，這時還是以對偶網流的方法求解 [7,8]，經過一番的努力才發現，若以管線的長度表示水量與容量的供需情況，則管線的切割量可以表示模式中供需差額（相當於計劃網路中實際與正常工時的差額），因此用比例圖能表現不同的方案 [9]，然而在演算過程中，爲了比較不同切割方式的成本值，卻另又利用偶圖 (Dual graph) 的觀念 [1,11]，以便將求取最小切割的問題轉換爲最短路徑問題，這樣雖然擺脫了必須迂迴到偶題的缺憾，卻又爲了求最小切割而增加藉助於偶圖的額外手續，可是幾何偶圖的觀念確實比代數偶題簡單多了，到此幾乎已經把演算步驟具體化的工作完成了，還是不完全滿意，所以沒有停止探索。最後，終於發現若在原有表示供需的長度之外，另加寬度以表示單位缺額成本，便可以將水庫規劃或計劃網路問題與解法完整地以比例圖的方法很具體的呈現出來 [10,11,12]，這時也發現張成樹與基本割集組等觀念在演算分析上的應用，就這樣先後走出了偶題與偶圖兩種對偶觀念的陰影，發展出純粹在原題上處理的切割簡形法。這

個解法的效率與網流解法一樣地優越，而且它可以在網路圖上作業，演算的每一步驟都有非常直觀的解釋，所以對時程與水庫規劃問題而言，這個方法確實有比較容易理解、應用與推廣的優點。

網流方法是高效率的分析工具，因此當初在解算計劃時程成本問題 [2] 時，藉著特殊的對偶觀點的「變形鏡頭」觀看原題。對網路切割問題而言，偶題流量觀點與解法所看到的是遠處變了形的「對偶影子」而不是問題本身，因此難免會覺得面目全非，而切割觀點是直接處理原題，所看到的就是本體而不是影子，所以看得非常真確。以往這種直接處理勢位網路的切割觀點與方法罕為人知，因而不得不藉助於對偶網流方法，現在既有「原形切割鏡頭」可直接解析原時程與水庫規劃問題，對偶這個「變形鏡頭」與網流方法就不是必要的了，當然，在靈敏度分析上，「變形對偶鏡頭」與網流方法還是相當方便的。

計劃網路時程問題已經能夠直接而簡單的以網路切割簡形法處理了，這個方法在其它具有相同勢位網路 (Potential network) 結構的問題上一樣地適用。網路流量問題的網流方法有非常廣泛的應用，作為其對偶的網路勢位問題的切割方法，應該也有相當大的應用潛力。除了直接處理網路勢位（或切割）問題，切割方法其實也可用作網流問題靈敏度分析的工具。這樣看來，二種方法可以靈活運用，不論所面對的是流量網路或勢位網路，為了解析，其管線都是可以縱向或橫向地分劃切割 [11] 的。切割方法顯然也如網流方法，是解析網路問題的一項通用高效利器。

網路切割簡形法掌握了時程與一般勢位網路問題的特殊結構，以網路張成樹與割集嵌截的觀念表示時程方案與演算步驟，具有直觀的視覺效果；因此這個方法具體明確而易於理解，其資料並且能以網路圖形而非陣列的方式來處理，所需的記憶量及計算時間均約為一般線性規劃方法的 1/n，n 為工作數目，因此規模愈大的問題愈能顯示這個方法的威力。

七、謝　誌

長久以來，由於內子敏敏的支持，讓我得以心無旁騖地對水庫規劃與計畫時程二個模式的切割觀點、演算法與應用進行探討，這是其中的一個成果，為表達我最深的謝意，謹以本文獻予她。

約廿年前，由於 D.R.Fulkerson 教授的計畫網路問題網流解法的啓發，才著手水庫規劃模式對偶網流解法的第一篇論文 [5]，初稿完成後正好修讀他的一門課，並承他親切的指導，這個因緣讓我對這二個勢位網路問題幾度投入，雖然是斷斷續續的，終於發展成網路切割簡形法。水庫問題的這個新觀點與新方法就這樣回饋到時程問題上，老師如果還在世，應該會開懷燦然而笑吧！記此，謹表達我對他的懷念。

八、參考文獻

1. Deo, N., Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, (1974).
2. Fulkerson, D. R.,"A Network Flow Computation for Project Cost Curves", Mangagement Science, Vol.7, No.2, pp.167-178, (1961).
3. Ford, L. R., Jr. and D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press, (1962).
4. Phillips, S., Jr. and M. I. Dessouky, "Solving the Project Time/Cost Trade off Problem Using the Minimal Cut Concept", Management Science, Vol.24, No.4, pp.393-400, (1977).
5. Chia-Ming Liu, "A Dual Interpretation of a Linear Reservoir Model", Taiwan Water Conservancy Quarterly, Vol.24 No.1,pp.29-39, 台灣水利第 24 卷第 1 期 . (1976).
6. 劉佳明，「蓄水線性模式及其簡化」，台灣水利第 26 卷第 1 期，pp.18-22,(1978).
7. Chia-Ming Liu, "A Dual Network Model for a Linear Reservoir Goal Programming Problem", ROC-Japan Joint Seminar on Water Resources Engineering, Taipei, Taiwan, pp.263-267, (1987).
8. 劉佳明，乾旱期間水庫運轉之網流模式，國科會研究報告，台大農工所，(1987).
9. 劉佳明，「水庫標的線性規劃問題之網路切割法簡介」，台灣水利第 36 卷第 2 期，pp.29-36,

(1988).

10. 劉佳明，串聯水庫系統標的線性規劃模式及其網路解法之研究，水資會研究報告，台大農工所，(1989).

11. 劉佳明，「工程規劃、設計與管理中優選方法的應用－水庫容量規劃與施工時程管理之優選模式及其解法」，農工學報第39卷第1期， pp. 1-16, (1993).

12. 劉佳明，計畫時程／成本權衡問題之網路切割解法，八十二年電子計算機於土木水利工程應用研討會論文集， pp.83-92, (1993)。

收稿日期：民國84年1月16日
接受日期：民國84年2月28日

（上接第40頁）

Univ. of Michigan, Ann Arbor.

Doorenbos, J. and A.H. Kassam. (1979). *Yield Response to Water,* Irrigation and Drainage Paper No.33, FAO of UN, Rome.

Fahmy, H., et al.(1994)."Economic Optimization of River Management Using Genetic Algorithms," Proceedings of the ASCE 1994 International Summer Meeting, Kansas City, USA.

Goldberg, D.E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning* , Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Holland, J.H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificaial Systems* Ann Arbor:The Univ. of Michigan Press.

Jesus, C.M.,et al.(1987). "Planning Model of Irrigation District," J.Irrig.and Drain. Engrg., ASCE. 113(4):549-563.

Jesus, C.M.,et al.(1992). "Planning Simulation Model of Irrigation District,"J.Irrig. and Drain. Engrg., ASCE. 118(1):74-87.

McKinney, D.C. and M.-D.Lin.(1994). "Genetic algorithm solution of groundwater management models," Water Resources Research, 30(6):1897-1906.

Paudyal, G.N. and A.D. Gupta. (1990). "Irrigation Planning by Multilevel Optimization," J. Irrig. and Drain. Engrg., ASCE. 116(2):273-291.

Prajamwong, S.(1994). "Command Area Decision Support System for Irrigation Projects," Ph.D.Dissertation, Utah State University, Logan.

Raman, H., S. Mohan and N.C.V. Rangacharya. (1992). " Decision Support for Crop Planning During Droughts," J. Irrig. and Drain. Engrg., ASCE. 118(2):229-241.

Smith, M. (1991). *CROPWAT: Manual and Guidelines,* FAO, Rome, Italy.

Wang, Q.J.(1991). "The Genetic Algorithm and Its Application to Calibrating Conceptual Rainfall-Runoff Models," Water Resources Research, 27(9):2467-2471.

Wentzel, M.W.(1993). *Water distribution System Pumping strategy Optimization by Genetic Algorithm*, Master's thesis, New Mexico State Univ.

Wentzel, M.W., et al.(1994). "Pipe Network Pumping Strategy Optimization by Genetic Algorithm," ASCE 1994 International Summer Meeting, Kansas City, USA.

收稿日期：民國83年12月10日
接受日期：民國84年 3月25日