

時間序列模式選取準則之比較

Comparisons of Model Selection Criteria for Time Series

淡江大學水資源及環境工程研究所 教授

虞 國 興

Gwo-Hsing Yu

淡江大學水資源及環境工程研究所 研究助理

劉 治 均

Chin-Chun Liu

摘 要

時間序列模式之選取攸關預測能力之優劣，如何有效、正確地判定模式，實為一重要之研究課題。近幾十年來許多學者，諸如 Akaike(1969,1974,1979)、Schwarz(1978)、Bhansali 及 Downham(1977)、Haman 及 Quinn(1979)、Shibata(1980)等，分別提出各種不同模式選取準則，然而至今尚無完整之比較與研究。本研究採用 CAT, FPE, FPE^a , AIC, SBC, BIC1, BIC2, BIC3, BEC, HQ 及 S 等 11 種準則，利用數千組合成資料，配合動差法與最大似似法推估參數，以其選取正確模式之精確度，探討各準則之性質及適用性。研究結果顯示，整體而言，以 BIC1 準則之選取能力最佳，而 CAT 為最差。

關鍵詞：時間序列模式，準則。

ABSTRACT

The forecasting accuracy highly depends on the performance of model selection in time series modeling. Therefore, how to effectively and accurately identify model is one of the most important research topics in time series analysis. During the past few decades, several researchers, such as Akaike (1969, 1974, 1979)、Schwarz (1978)、Bhansali and Downham (1977)、Haman and Quinn (1979) and Shibata (1980), proposed lots of model selection criteria. However, systematical studies and comparisons on these criteria have not been made. In the present study, 11 criteria, CAT, FPE^a , FPE, AIC, SBC, BIC1, BIC2, BIC3, BEC, HQ and S are used. The aptness and characteristics of these criteria are investigated by the study of synthetic data based on the accuracy of selection of true model. Both of the method of moments and maximum likelihood method are used to estimate the parameters. The results indicate that BIC1 is the best for the accuracy, while CAT is the worst.

Keywords: Time series model, Criterion.

一、前 言

序率水文學之兩大主要目的為產生合成資料及預測。然，時間序列存在各種不同替代模式，

如何選取最接近實際資料特性之模式，為時序分析中最迫切同時也是最困難的一環。一般以樣本之自相關函數 (Autocorrelation Function, ACF) 及部分自相關函數 (Partial Autocorrelation Function, PACF) 作為模式判定之依據。然，其受制於主觀之人為因素影響，而易導致模式誤判。

然，自 1969 年起，部分學者鑑於模式選取對於合成資料及預測之重要性，以及典型的模式判定方法普遍存在的缺失，故以統計推論中之估計理論為基礎，積極從事模式選取準則之研究，諸如 Akaike (1974) 基於訊息量測 (Information measure) 理論所推導之 AIC 準則；Schwarz (1978) 基於貝氏方法 (Bayesian method) 所推導之 SBC 準則。研究自迴歸模式階數選取的著名學者，最早期的有 Quenouille (1947) 以序列之統計假說檢定為基礎，提出擬合有限觀測資料之自迴歸模式階數之選取，其後包括 Bartlett 及 Diananda (1950)、Whittle (1950)、Anderson (1963)、Hannan (1970)、McClave (1978) 等，修正 Quenouille 之假說檢定理論並作一概括的論述。

Akaike (1969, 1974, 1979) 基於推估理論介紹一些模式選取準則；如 AIC 準則根據 Information 理論概念；FPE 準則根據向前一步預測誤差理論。另，應用不同理論基礎，包括 Parzen (1974) 根據均方預測誤差，並利用頻譜分析方法發展之 CAT 準則；以及利用 Bayesian 推論方法所發展之準則，如 Schwarz (1978) 之 SBC 準則、Akaike (1977) 修正 AIC 所提出之 BIC2 準則、Rissanen (1978) 之 BIC1 準則、Hannan 及 Quinn (1979) 之 HQ 準則、Geweke 及 Meese (1981) 之 BEC 準則；以及 Shibata (1980) 根據向前 1 步預測誤差理論之 S 準則。此外，針對上述準則作進一步比較研究的有：

(1) Beamish 及 Priestley (1981)

針對 FPE, AIC 及 CAT 三個準則，利用兩種不同的參數推估方法 (Burg method 與 Yule-Walker)，配合 "Window" 頻譜分析與推估。經由比較其模擬結果顯示，大部分的模擬序列，上述三種準則將會導致相同的擬合階數。

(2) Hannan 及 Quinn (1979)

針對 HQ 及 AIC 準則，利用 100 組 AR (1) 模式之合成資料，變化樣本數分別為 50, 100, 200, 500 及

1000，以準則作模式選取，並分別記錄其正確擬合模式之組數，其研究結果顯示，當樣本數及 C 值較小時，HQ 比 AIC 更容易導致模式階數的低估，但於樣本數及 C 值較大時，HQ 準則之模擬結果反而比 AIC 更佳。

(3) Lütkepohl (1985)

針對 LR5, LR1, PAC, FPE, AIC, BIC, CAT, S 及 HQ 準則，利用 1000 組一階向量自迴歸模式之合成資料，以上述準則作模式選取，並以向前一步、向前五步之預測均方誤差平均值及準則選取正確模式之組數，作為準則比較之基礎。其研究結果顯示 Schwarz 之 BIC 準則最優，且其預測均方誤差平均值為最小。

由於長期水文資料之繁衍與未來水文量之正確預測，攸關水資源設計、規劃之可靠度與穩定度，故適當的模式構建，以選取適合於某一水文時序列之最佳及較簡化之序率模式，遂成為當務之急。然而，因時序分析中，常存在數個替代模式，皆可用以描述一已知觀測序列。尤其常因資料長度不足，使得參數的推估無法達到所要求的精確度，進而導致最佳模式的選取發生困難。

鑑於上述模式選取之重要性以及各準則推導之理論基礎及應用範疇之不同，常造成使用上之困擾，本研究即針對各準則作一有系統之比較探討，以期達到下列幾個目的：

(1) 探討各準則之適用性及選取能力。

(2) 探討各準則受參數推估影響之程度。

(3) 探討何種準則較優，以供時間序列模式建立之參考。

本文中第二節為理論基礎，主要說明研究中所使用之序率模式及模式選取準則，第三節為本研究使用之資料，第四節為結果與討論；最後，第五節為結論。

二、理論基礎

2-1 自迴歸—積分—移動平均模式：

Box & Jenkins (1970) 所提之自迴歸—積分—移動平均模式 (Autoregressive — Integrated — Moving Average Model)，簡稱為 ARIMA(p, d, q) 模式，其定義簡述如下：

$$\Phi_p(B) \nabla^d Z_t = \theta_q(B) a_t \quad \dots\dots\dots (1)$$

若定義差分運算子 ∇ 為

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1-B)Z_t, \nabla = (1-B)$$

則差分運算 $W_t = (1-B)^d Z_t$ ，序列經 d 階後向差分運算，可將序列之趨勢去除而變為定常性；應用 ARMA 模式於此定常性序列。

ARIMA 模式具下列三種特殊型式：

(1) AR 模式：

自迴歸模式 (Autoregressive Model, 簡稱 AR 模式) 為 ARIMA 模式之簡化形式，即 $AR(p) = ARIMA(p, 0, 0)$ ，其定義如下：

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \quad (2)$$

$$\Phi_p(B)Z_t = a_t$$

式中 $a_t \sim \text{IID } N(0, \sigma_a^2)$

$$\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

AR 模式序列 $\{Z_t\}$ 之定常性條件 $\Phi_p(B) = 0$ 之特性方程式之根必須落於單位圓外。

(2) MA 模式：

移動平均模式 (Moving Average Model, 簡稱 MA 模式) 亦為 ARIMA 模式之簡化形式，即 $MA(q) = ARIMA(0, 0, q)$ ，其定義如下：

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3)$$

$$Z_t = \theta_q(B)a_t$$

式中 $a_t \sim \text{IID } N(0, \sigma_a^2)$

$$\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$$

MA 模式序列 $\{Z_t\}$ 之可逆性條件為特性方程式 $\theta_q(B) = 0$ 之根落在單位圓之外，亦即 $|B| > 1$ 。

(3) ARMA 模式：

由於序率過程之 $MA(q)$ 模式可以 $AR(\infty)$ 模式表示，同理， $AR(p)$ 模式亦可以 $MA(\infty)$ 模式表示，因此，為了節省參數個數，可將 AR 和 MA 都包括在模式中，因而構成了混合形成的 ARMA 模式，其亦為 ARIMA 模式之簡化型式，即 $ARMA(p, q) = ARIMA(p, 0, q)$ ，其定義如下：

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (4)$$

$$\Phi_p(B)Z_t = \theta_q(B)a_t$$

一般而言 $ARMA(p, q)$ 模式具有 $AR(p)$ 與 $MA(q)$ 過程之定常性與可逆性條件。即 $\Phi_p(B) = 0$ 之根落於單位圓之外時， $ARMA(p, q)$ 為定常性，若 $\theta_q(B) = 0$ 之根落於單位圓之外時，則 $ARMA(p, q)$ 為具有可

逆性。

2-2 模式選取準則：

模式選取可依擬合模式之殘差變異數、預測誤差及合成資料於統計特性之保有能力建立準則。

本研究探討 11 個基於擬合模式殘差變異數及預測誤差之模式選取準則，其中依其理論推導之依據可分為 (1) 向前一步預測誤差 (one-step-ahead prediction error)，諸如 FPE, FPE^a, CAT 及 S 準則，(2) 訊息量測方法 (Information measure method)，諸如 AIC 準則，及 (3) 貝氏方法 (Bayesian methods)，諸如 SBC, BIC1, BIC2, BIC3, BEC 及 HQ 等準則。各準則之定義如表 1 所示。

2-3 研究步驟與方法：

由於本研究之目的，主要係比較不同準則之特性，並探討最為適切之模式選取準則，以供模式建立之參考。基於上述理由，本研究採用下列步驟逐一篩選最適切之準則：

- (1) 以模式結構較簡單之自迴歸模式，配合較大樣本個數及顯著參數，作初步探討。
- (2) 假使某準則於大樣本及顯著參數情況下，其選取正確模式之能力仍然無法令人滿意，則將此準則予以剔出。
- (3) 就步驟 (2) 所篩選之選取能力較佳之準則，以各種不同之模式詳細探討最適切之準則。

另，由於模式參數及殘差變異數之推估，影響選取準則應用之優劣，研究中分別採用動差法及最大概似法推估參數，探討不同參數推估方法對各準則之影響。本研究方法之計算流程圖如 1 所示。

三、本研究所使用之資料

時序模式建立之原則，除了希望所選擇之模式能夠充分代表該序列觀測值以便應用外，亦希望參數個數能符合模式精簡原則，故本研究中，自迴歸模式最高階數為 AR(3)，移動平均模式最高階數為 MA(2)，自迴歸移動平均模式最高階數為 ARMA(3,1)。利用準則選取模式時，AR 模式最高擬合階數 AR(15)，MA 模式最高擬合階數為 MA(15)，ARMA 模式最高擬合階數為 ARMA(4,4)

為比較 11 個模式選取準則之選取能力，擬由

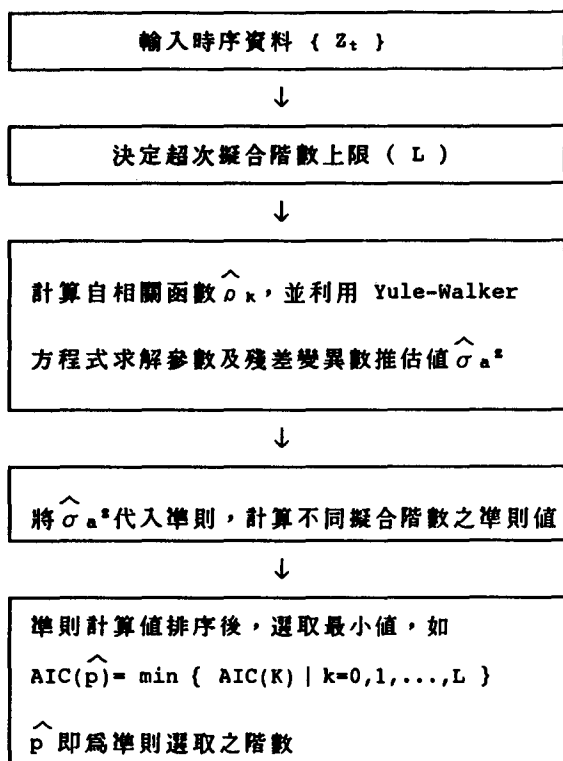


圖 1. 模式選取之流程圖

不同之參數推估方法、資料長度及模式參數等不同角度加以探討。本研究所採用之模式及其參數如下：

(1) AR(1)模式：

參數 $\phi_1 = -0.1 \sim 0.9$ 間隔 0.1

(2) MA(1)模式：

參數 $\theta_1 = 0.1 \sim 0.9$ 間隔 0.1

(3) AR(2), AR(3), MA(2) 及 ARMA(p, q) 模式：

其參數如表 2 所示。

上述模式中干擾項 $a_t \sim N(0, 1)$ ，資料長度分別為 50, 100, 200 及 500，各種組合分別產生 100 組。

四、結果與討論

由於合成資料所滿足之模式為已知，故可利用模式選取準則作模式之辨認，並與合成資料之已知模式對照，若準則所辨認之模式與合成資料模式一致，則此準則具有良好的選取能力。研究中分別以 AR(1), AR(2), AR(3), MA(1), MA(2) 及 7 種不同型式之 ARMA 模式，藉由合成資料已知模

表 1. 模式選取準則

CAT (Parzen, 1974, 1977) :	$CAT(k) = (n^{-1} \sum \hat{\sigma}_a^{-2}(j)) - \hat{\sigma}_a^{-2}(k)$
FPE (Akaike, 1969, 1971) :	$PPE(k) = \hat{\sigma}_a^2(n+k) / (n-k)$
FPE* (Bhansali and Downham, 1977) :	$FPE^*(k) = \hat{\sigma}_a^2(1 + \alpha k / n)$, ($\alpha=2$)
AIC (Akaike, 1973, 1974) :	$AIC(k) = n \ln \hat{\sigma}_a^2 + 2k$
BIC1 (Rissanen, 1978) :	$BIC1(k) = \ln \hat{\sigma}_a^2 + k \ln n / n$
BIC2 (Akaike, 1978, 1979) :	$BIC2(k) = n \ln \hat{\sigma}_a^2 - (n-k) \ln(1-k/n) + k \ln n$ $+ k \ln \{ k^{-1} (\hat{\sigma}_a^2 / \hat{\sigma}_a^2 - 1) \}$
BIC3 (Akaike, 1978) :	$BIC3(k) = (n-k) \ln \{ n \hat{\sigma}_a^2 / (n-k) \} + n(1 + \ln f(Z_n))$ $+ k \ln \{ (\sum Z_t^2 - n \hat{\sigma}_a^2) / k \}$
BEC (Geweke and Meese, 1981) :	$BEC(k) = \hat{\sigma}_a^2 + k \hat{\sigma}_1^2 \ln n / (n-L)$
HQ (Hannan and Quinn, 1979) :	$HQ(k) = \ln \hat{\sigma}_a^2 + 2k \ln \ln n / n$
S (Shibata, 1980) :	$S(k) = n \ln \hat{\sigma}_a^2 + n \ln(n+2k)$
SBC (Schwarz, 1978) :	$SBC(k) = n \ln \hat{\sigma}_a^2 + k \ln n$

註： z_t 為資料； n 為資料個數； $\hat{\sigma}_a^2$ 為模式殘差變異數； $\hat{\sigma}_1^2$ 為最大模式階數時之殘差變異數

表 2. 合成資料參數表

模 式 代 號	ARMA 參數					
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	θ_1	θ_2	θ_3
AR2.1	1.200	-0.600				
AR2.2	0.427	0.256				
AR2.3	0.650	0.240				
AR2.4	-0.500	0.300				
AR2.5	1.300	-0.400				
AR2.6	0.800	-0.500				
AR2.7	1.000	-0.250				
AR2.8	-0.340	0.190				
AR2.9	1.422	-0.728				
AR3.1	1.570	-1.020	0.210			
AR3.2	0.970	-0.120	-0.500			
AR3.3	-1.400	-0.560	-0.064			
AR3.4	0.600	0.790	-0.504			
AR3.5	1.500	-0.710	0.105			
AR3.6	0.800	0.650	-0.504			
AR3.7	1.000	0.470	-0.504			
AR3.8	1.370	-0.740	0.000			
AR3.9	-2.100	-1.460	-0.336			

表 2-續 合成資料參數表

模 式 代 號	ARMA 參數					
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	θ_1	θ_2	θ_3
MA2.1				0.750	-0.500	
MA2.2				0.100	-0.210	
MA2.3				-0.340	0.190	
MA2.4				0.650	0.240	
MA2.5				1.300	-0.400	
ARMA1	0.800					
ARMA2				0.300		
ARMA3	0.900			-0.250		
ARMA4	1.600	-0.900		-0.800		
ARMA5	-0.500	0.188		0.833	-0.167	
ARMA6	-0.750			0.583	-0.021	-0.005
ARMA7	1.050	-0.400	0.050	-0.750		

式及參數之特性，探討各準則選取正確模式之能力、各準則選取正確模式之能力、各準則選取模式之特性，及其影響準則選取模式之因素。結果分述如下：

(一) 準則選取能力：

(1) AR (1) 模式：

圖 2 及圖 3 所示分別為當 $N=50$ 及 500 於 AR (1)

模式時選取正確模式之精確度，結果顯示，當資料長度為 50 時，由於 AR1.1 模式之參數不顯著，各準則中除 BIC2 外，普遍皆低估模式階數為 0 ，即白噪音過程。同時，各準則低估模式階數之情形，隨著參數 ϕ_1 之增加而明顯改善。當 AR1.6 模式時，HQ 準則選取之精度已高達 90% ，其次依序是 BIC1，BEC 及 SBC 為 88% ，BIC3 為 79% ，BIC2 為 77% ，FPE 及 AIC 為 67% ， FPE^* 為 67% ，選取結果最差者為 CAT 祇有 27% 。當 AR1.9 模式時，因參數顯著之緣故，以基於貝氏方法推導之準則，如 BIC1, BIC2, BIC3, BEC, SBC 及 HQ 準則，其選取精確度高達 96% 以上，尤以 HQ 準則更高達 100% ；其它如 FPE, FPE^* , AIC 及 S 準則約為 70% 左右；CAT 準則僅達 31% 。

另，當資料長度增加時，各準則於不同模式參數下其選取之精確度，普遍皆有增加的趨勢，唯獨 AIC, FPE, FPE^* 及 S 準則於 AR1.6 至 AR1.9 模式，其選取之精確度並未隨樣本數增加而增加，而一直維持在 75% 左右，同時，CAT 準則選取結果依然令人失望。

當資料長度為 500 時，BIC1, BEC, HQ 及 SBC 等準則於參數不顯著時，低估模式階數之現象稍有改善，其原因為這些準則之推導係以貝氏推論為基礎，其基本假設為樣本數趨近 ∞ 。

(2) AR (2) 模式：

圖 4 所示為當 $N=50$ 於 AR (2) 模式時選取正確模式之精確度，結果顯示，當參數顯著時如 AR2.1、AR2.6 及 AR2.9 模式，BIC1, BIC2, BIC3, BEC 及 HQ 準則與 AR (1) 之情形相同，其選取 AR (2) 模式之結果依然十分令人滿意。但是，於參數不顯著時，如 AR2.3, AR2.4 及 AR2.8 模式，上述準則易發生低估模式階數為 AR (1) 的現象。另，當資料長度增加時，各準則於不同模式參數下，其選取 AR (2) 模式之組數普遍亦存在增加之趨勢。但於樣本數 100 時，AR2.1、AR2.5 及 AR2.9 其 AIC 及 FPE^* 選取結果卻比樣本數 50 時降低約 $8 \sim 10$ 組左右。

(3) AR (3) 模式：

當資料長度為 50 時，參數較顯著如 AR3.2 及 AR3.4 模式，基於貝氏方法推導之準則其選取 AR (3) 模式之結果較佳，然於 AR3.1, AR3.3, AR3.5, AR

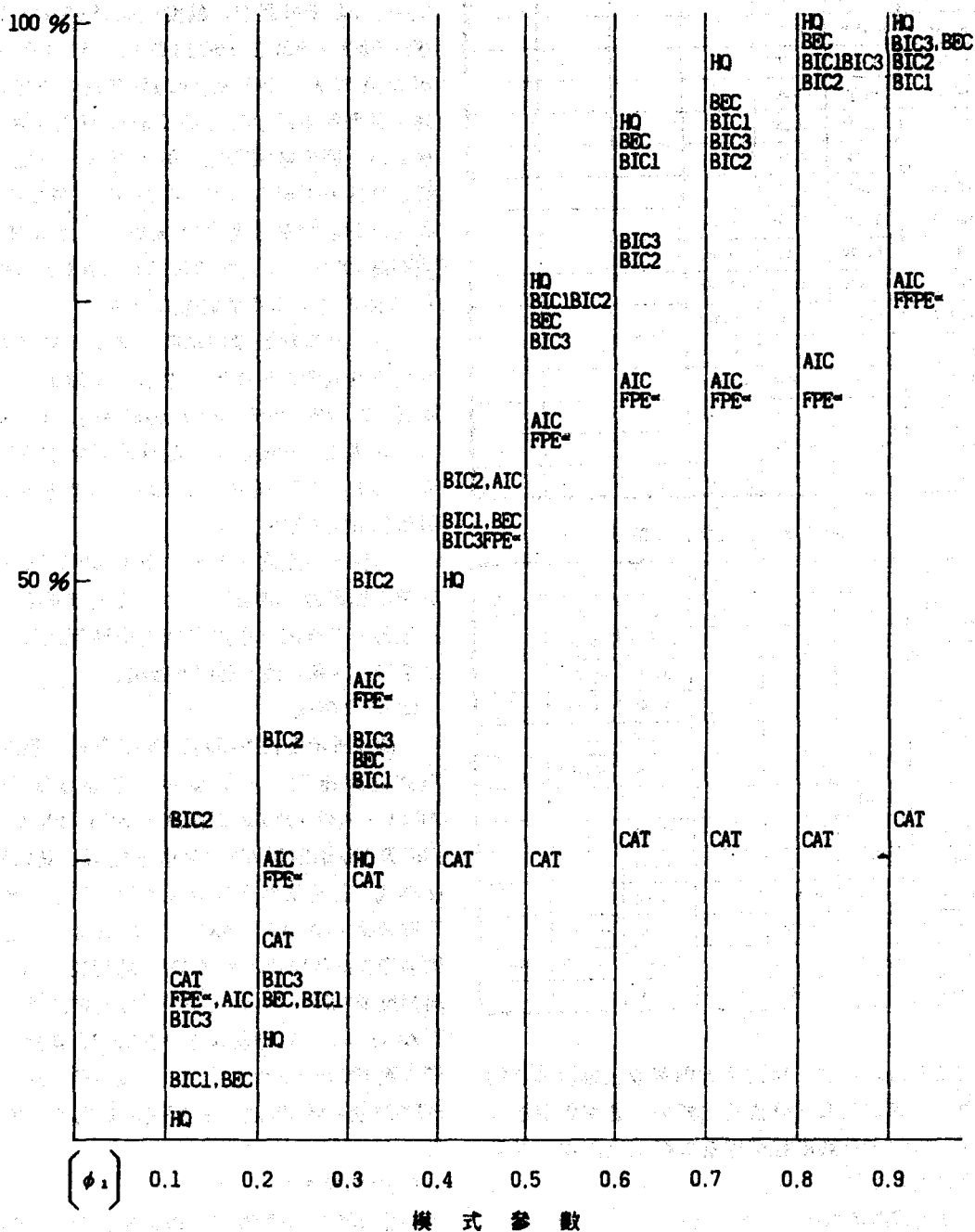


圖 2. 各準則精確度 (AR(1), N=50)

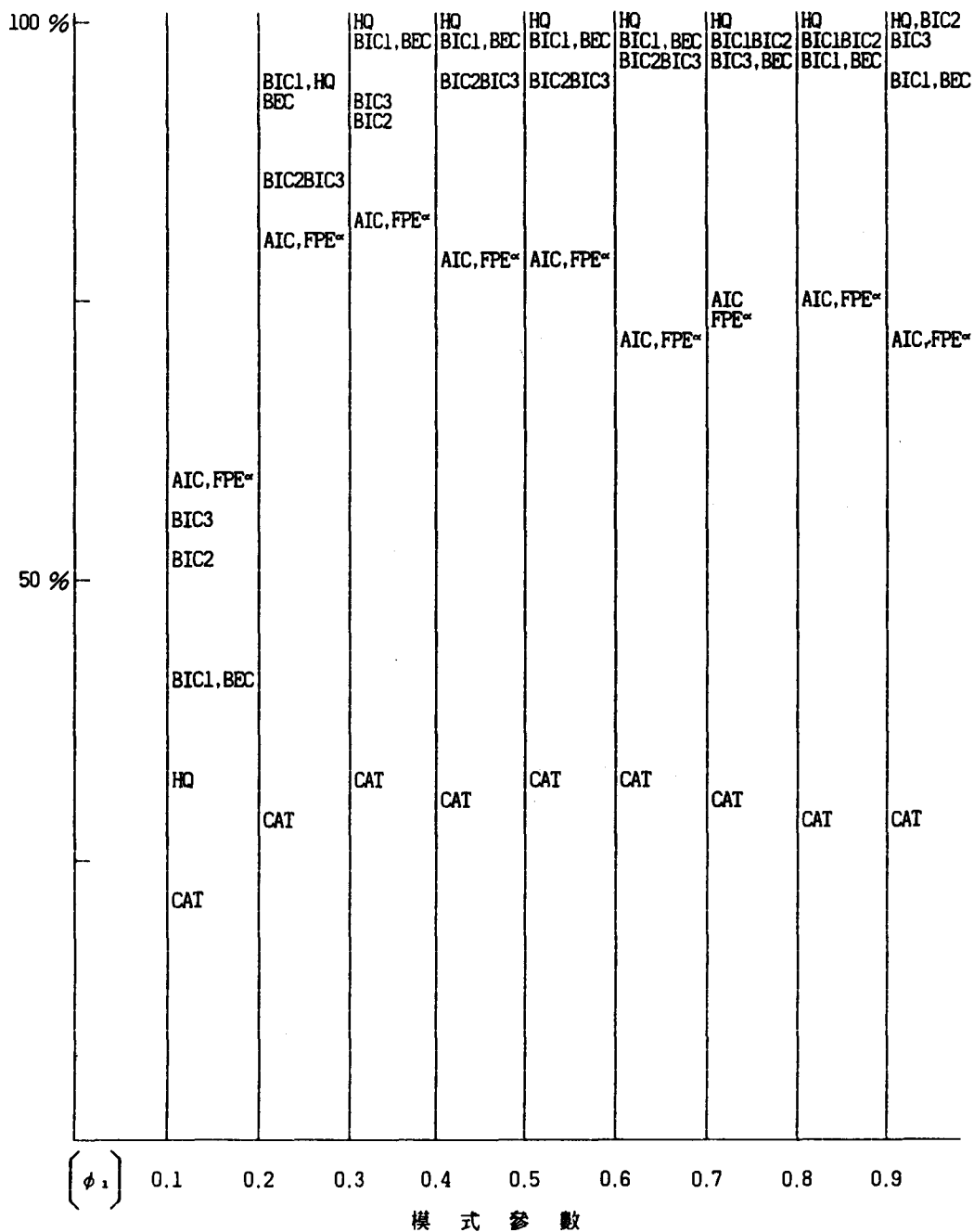
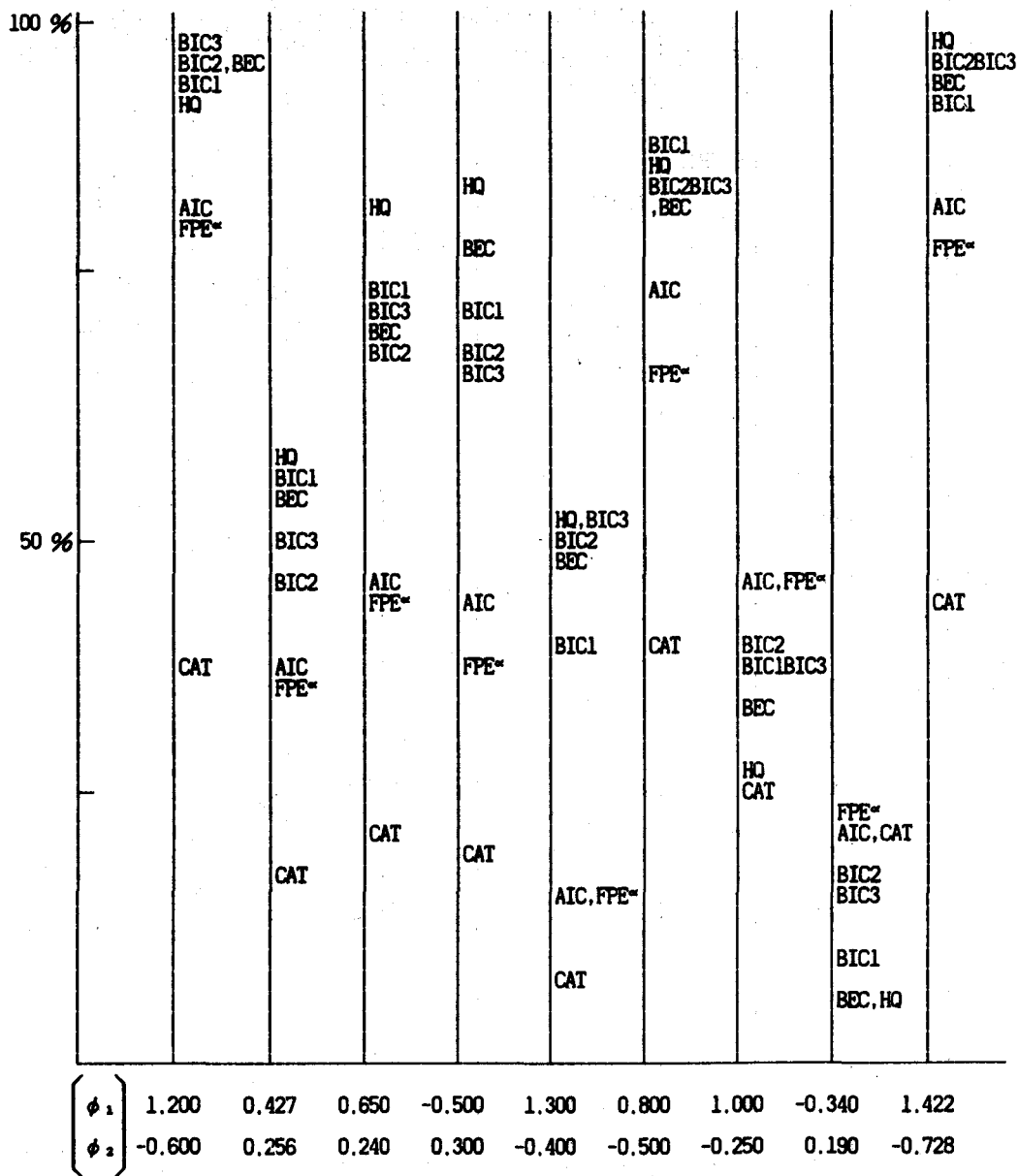


圖 3. 各準則精確度 (AR(1), N=500)



模 式 參 數

圖 4. 各準則精確度 (AR(2), N=50)

3.8 及 AR3.9 模式時，各準則皆嚴重低估模式之階數為 AR (1)或 AR 2，尤其當 AR3.8 模式時，100 組 AR (3)模式之合成資料幾乎完全低估為 AR (2)模式。AR3.9 模式，AIC, FPE¹ 準則選取結果皆優於以貝氏方法推導之準則。其原因為 AIC 及 FPE¹ 易發生高估模式階數之現象，反之由貝氏方法所推導之準則易低估模式階數，故於參數較不顯著時，AIC 會有部份組數高估模式階數為 AR (3)，致使其選取結果比 BIC1 為佳。

(4) MA (1)及 MA (2)模式：

各準則於不同模式參數下，選取模式之組數分散於各超次擬合模式中，亦即選取之精確度較差，其原因可能為 MA 模式以動差法推估參數較不精確。

(5) ARMA 模式：

各準則中以 HQ 準則選取 AR (1)模式之組數多，為 79 組，其次依序為 BIC1, BIC3, BIC2, BEC, AIC 及 FPE¹。各準則選取能力隨樣本數增加而增加。當合成資料模式為 ARMA(1, 1)且資料長度為 500 時，基於貝氏方法推導之準則其選取 ARMA(1, 1)模式之組數為 88 組。當 ARMA(3, 1)且資料長度為 500 時，各準則所選取之模式散布於各階模式中，無法集中於 ARMA(3,1)，其原因可能為 ARMA 模式存在許多替代模式，造成模式選取的困擾。

其它擬合 ARMA 模式之選取結果，整體而言，當合成資料模式較簡單時，如 AR (1)或 MA (1)模式，準則於 ARMA 模式之選取結果尚令人滿意。惟於高階 ARMA 模式時，如 ARMA(2, 2)或 ARMA(1, 3)，準則模式選取結果仍然不穩定。由

表 3. 模式選取平均精確度 (AR 模式，動差法)

模 式	資 料 長 度 (N)	平 均 精 確 度							
		CAT	FPE ¹	AIC	BIC1	BIC2	BIC3	BEC	HQ
AR (1)	50	0.296	0.557	0.592	0.664	0.707 ¹	0.654	0.668	0.651
	100	0.243	0.616	0.647	0.737 ¹	0.783	0.770	0.794	0.770
	200	0.261	0.704	0.719	0.863	0.867 ¹	0.861	0.864	0.846
	500	0.278	0.737	0.739	0.919 ¹	0.914	0.917	0.918	0.918
	平均值	0.270	0.654	0.674	0.811	0.818 ¹	0.801	0.811	0.796
AR (2)	50	0.303	0.522	0.542	0.511	0.528 ¹	0.517	0.491	0.459
	100	0.259	0.582	0.614	0.686	0.694 ¹	0.687	0.689	0.643
	200	0.318	0.732	0.752	0.877	0.889 ¹	0.889 ¹	0.878	0.849
	500	0.317	0.767	0.770	0.976	0.973	0.973	0.974	0.982 ¹
	平均值	0.299	0.651	0.670	0.763	0.771 ¹	0.767	0.758	0.733
AR (3)	50	0.300	0.252	0.262	0.300 ¹	0.262	0.252	0.290	0.262
	100	0.289	0.454	0.472 ¹	0.460	0.421	0.416	0.449	0.423
	200	0.271	0.553	0.566 ¹	0.547	0.529	0.539	0.546	0.528
	500	0.301	0.606	0.612	0.653	0.633	0.633	0.656 ¹	0.636
	平均值	0.290	0.466	0.478	0.490 ¹	0.461	0.460	0.485	0.462

註：¹ 表精確度排名第一之準則。

於 ARMA 模式中存在許多替代模式，故使用各準則於 ARMA 模式選取時，應配合模式適合度檢定，如此可確定準則所選取之模式為最適模式。

(6) 模式選取精確度：

精確度之計算，係於不同模式下，將各準則正確選取模式之組數百分比累加後取其平均值。表 3 所示為 AR 模式時各準則之精確度結果。於 N=50 及 N=200 時，各準則中以 BIC2 之精確度為最高，分別為 70.7 % 及 86.7 %；當 N=100 及 N=500 時，以 BIC1 最高，分別為 79.7 % 及 91.9 %。整體而言，以 BIC2 之精確度為最高約為 81.8 %，BIC1 及 BEC 準則實際上與 BIC2 祇相差 0.7 %，此微小之差異係由於 BIC1 及 BEC 於小樣本且參數不顯著時，比 BIC2 更易低估模式階數所致。AR (2) 模式中，當 N=50,100 及 200 時，各準則中仍以 BIC2 之

選取精確度為最高，分別為 52.8 % ,69.4 % 及 88.9 %；當 N=500 時以 HQ 最佳為 98.2 %。整體而言，仍以 BIC2 之精確度為最高約為 77.1 %。AR (3) 模式，當 N=100 及 N=200 時，以 AIC 之精確度最高分別為 47.2 % 及 56.6 %，其原因為 AIC 易高估模式，當 N=50 及 N=500 時，分別以 BIC1 及 BEC 為最高約 30 % 及 65.6 %。

表 4 所示為 MA (1) 模式準則平均選取精確度，當 N=50 時以 BIC1 之 41.8 % 為最高，N=100,200 及 500 時皆以 HQ 最高，分別為 46.3 % ,46.7 % 及 40.8 %。整體而言，以 HQ 之選取精確度最高為 46.1 %。MA (2) 模式中，選取精確度於 N=50 時以 BIC2 之 26.2 % 為最高，N=100 時以 BIC1 之 31.8 % 為最高，N=200 及 N=500 時皆以 HQ 最高，分別為 37.6 % 及 46.7 %。整體而言，BIC1 之 33.5 % 為最高。

表 4. 模式選取平均精確度 (MA 模式，動差法)

模 式	資 料 長 度 (N)	平 均 精 確 度						
		AIC	FPE ^a	BIC1	BIC2	BIC3	BEC	HQ
MA (1)	50	0.306	0.239	0.418 ¹	0.358	0.309	0.081	0.414
	100	0.320	0.296	0.433	0.358	0.340	0.201	0.463 ¹
	200	0.319	0.307	0.443	0.376	0.373	0.360	0.467 ¹
	500	0.391	0.388	0.489	0.441	0.441	0.458	0.498 ¹
	平均值	0.334	0.308	0.446	0.383	0.366	0.275	0.461 ¹
MA (2)	50	0.232	0.210	0.240	0.262 ¹	0.252	0.036	0.214
	100	0.264	0.244	0.318 ¹	0.310	0.302	0.096	0.310
	200	0.282	0.272	0.366	0.322	0.322	0.242	0.376 ¹
	500	0.278	0.278	0.414	0.324	0.324	0.358	0.426 ¹
	平均值	0.264	0.251	0.335 ¹	0.305	0.300	0.183	0.332

註：¹ 表精確度排名第一之準則。

表5所示為參數採用最大概似法推估時，AR模式準則選取平均精確度。由表可知，BIC1之精確度於不同模式及不同樣本個數下皆為最高，除了當AR(2)模式且樣本數為500時。

(二) 模式選取準則之特性：

(1) 當參數 ϕ_1 較不顯著時，BIC2及BIC3高估模式階數之情形最嚴重，但當樣本數增加時，此一現象明顯改善。然，CAT、FPE、FPE^a、AIC及S準則高估模式階數之現象未隨樣本數之增加而改善。此結果驗證Akaike(1969)及Bhansali(1973)之研究結果，AIC及FPE準則選取之模式易發生高估模式階數。

(2) R(1)模式選取結果顯示，FPE與AIC、FPE^a與S以及BIC1與SBC於模式選取之組數分布情形大致相同。理論上可直接推證AIC與FPE及

S與FPE^a，為特性相同之兩種準則。另，SBC與BIC1基本上是完全相同的。

(3) FPE^a與AIC準則於樣本個數為500時，選取模式階數之結果漸近相等，此結果顯示於大樣本時，FPE^a與AIC具有相同的選取效應。同樣的於樣本數大時，BIC1與BEC及BIC2與BIC3，具有相同的模式選取效應。

(三) 影響準則選取模式之因素：

(1) 資料長度：

各準則選取模式之精確度皆隨樣本數之增加而增加，其中又以基於貝氏方法所推導之準則如BIC1、BEC及HQ等最為明顯。

(2) 參數：

各準則於參數不顯著時其擬合能力皆不佳，CAT、BIC2及BIC3準則易高估模式，而FPE、FPE^a，

表 5. 模式選取平均精確度 (AR 模式，最大概似法)

模 式	資 料 長 度 (N)	平 均 精 確 度							
		CAT	AIC	FPE ^a	BIC1	BIC2	BIC3	BEC	HQ
AR(1)	50	0.259	0.569	0.471	0.688	0.606	0.622	0.694 ¹	0.657
	100	0.457	0.713	0.696	0.797 ¹	0.729	0.744	0.796	0.782
	200	0.558	0.842	0.798	0.868 ¹	0.833	0.844	0.866	0.857
	500	0.553	0.788	0.787	0.913 ¹	0.878	0.884	0.913 ¹	0.908
	平均值	0.457	0.721	0.688	0.816 ¹	0.761	0.774	0.817 ¹	0.801
AR(2)	50	0.247	0.421	0.382	0.488 ¹	0.474	0.468	0.477	0.460
	100	0.444	0.637	0.618	0.770 ¹	0.668	0.663	0.659	0.646
	200	0.581	0.798	0.788	0.861 ¹	0.858	0.859	0.856	0.837
	500	0.601	0.819	0.816	0.967	0.962	0.962	0.967	0.971 ¹
	平均值	0.468	0.669	0.651	0.771 ¹	0.741	0.738	0.740	0.729

註：¹ 表精確度排名第一之準則。

AIC, S, BIC1, BIC2, BEC, HQ 及 SBC 準則易低估模式。然而，如所預期者當參數愈顯著，準則之選取能力愈佳。

(3) 擬合階數：

於不同擬合上界 $L=5, 10$ 及 15 時，各準則選取模式之精確度，除 CAT 受 L 選取的影響較顯著外，其餘各準則並不受其影響，原則上， L 值之選取應足夠大，以涵蓋真正模式。Akaike(1969) 建議 L 之選擇以不超過 $0.1N$ 為原則，其中 N 為樣本個數。另，Sakamoto, Ishiguro 及 Kitagawa(1986) 提出應用 AIC 準則於模式選取時， L 之選取以小於 $2\sqrt{N}$ 為佳。

(4) 推估方法：

於 $N=50$ 時，各準則中以 CAT 準則受參數推估方法影響最大，平均而言，最大概似法優於動差法約 30 組。其次為 AIC 及 FPE^a，最大概似法推估優於動差法約 10 組。其它基於貝氏方法推導之準則，參數推估方法對其模式選取結果影響不大，除當樣本數較小時，部份模式有少許影響，如 BIC1 於 AR1.4 模式且 $N=50$ 時，最大概似法優於動差法約 12 組。

五、結 論

根據本研究合成資料之研究結果，可歸納出下列幾點結論：

- (1) FPE 與 AIC、FPE^a 及 BIC1 與 SBC 之選取能力完全相同。
- (2) 於大樣本時，AIC 與 FPE^a；BIC1 與 BEC；BIC2 與 BIC3，選取能力並無明顯差異。
- (3) 當參數不顯著時，AIC 及 FPE 準則較易高估模式階數，BIC1, BEC 及 HQ 準則極易低估模式階數。
- (4) CAT 受參數推估之影響最大，其次為 AIC 及 FPE^a，其餘如 BIC1, BIC2, BIC3, BEC 及 HQ 準則，模式選取結果不受參數推估方法之影響。
- (5) 各準則之選取能力以 BIC1 為最佳，CAT 為最差。

六、謝 誌

論文審查者所提供之寶貴意見，作者由衷感謝。

七、參考文獻

1. Akaike, H.(1969). "Fitting Autoregressive Model for Prediction", *Ann.Inst. Statist. Math.* 21, 243-247
2. Akaike, H.(1974) "A New Look at the Statical Model Identification", *IEEE Trans. Autom. Control.* 19, 716-723.
3. Akaike, H.(1979). "A Bayesian Extension of the Minimum AIC Procedure of Autoregressive Model Fitting", *Biometrika*, 66, 237-242.
4. Anderson, T. W. (1963). "Determination of the Order of Dependence in Normally Distributed Time Series", *Time Series Analyses*, edited by M. Rosenblatt, Wiley: New York; 425-446.
5. Bartlett, M. S. and Diananda, P. H. (1950). "Extension of Quenouille's Test for Autoregressive Schemes", *J. R. Statist. Soc. B12*, 108-115.
6. Bhansali, R. J. & Downhan, D. Y.(1977). "Some Properties of the Order of an Autoregressive Model Selected by a Generalization of Akaike's FPE Criterion", *Biometrika*, 64, 547-551.
7. Geweke, J. F. & Meese, R. A. (1981). "Estimating Regression Models of Finite but Unknown Order", *Int. Econ. Rev.* 22, 55-70.
8. Hannan, E. J. and Quinn, B. Q. (1979). "The Determination of the Order of an Autoregression", *J. R. Statist. Soc. B41*, 190-195.
9. Hannan, E. J. (1980). "The Estimation of the Order of an ARMA Process", *Ann. Statist.* 8, 1071-1081.
10. Rissanen, J. (1978). "Modelling by Shortest Data Description", *Automatica* 14, 465-471.
11. Schwarz, G. (1978). "Estimating the Dimension of a Model", *Ann. Statist.* 6, 461-464.
12. Shibata, R. (1980). "Asymptotically Efficient Selection of the Order the Model for Estimating Parameters of a Linear Process", *Ann. Statist.* 8, 147-164.
13. Whittle, P. (1952). "Test of Fit in Time Series", *Biometrika* 39, 309-318.

收稿日期：民國 83 年 12 月 10 日

修正日期：民國 84 年 2 月 15 日

接受日期：民國 84 年 2 月 20 日