

專 論

初始深度對模擬堰流之影響

Effects of Initial Depth on Simulation of Weir Flows

淡江大學水資源及環境工程學系教授

施 清 吉

Ching-Chi Shih

摘 要

使用MAC方法並配合高度函數模擬堰流，初始速度為左邊界的輸入定值，計有0.2、0.4、0.6、0.8、1.0、1.2與1.4公尺/秒等八種情況，大約相當於上游福祿數介近於0.05與0.3之間；而初始深度也為在邊界的輸入值，但為浮動的。基於模擬流況趨近於定量流、各斷面流量、堰後下自由面高度與流量係數之條件與比較，分析初始深度對模擬結果之影響，且分析其適當範圍。

關鍵詞：渠流，自由面，流動模擬。

ABSTRACT

The weir flow is simulated by the method of Marker and Cell, abbreviated as MAC, with height functions. At the left boundary eight initial depths are used, they are 0.2, 0.4, 0.6, 1.0, 1.2 and 1.4 meter/second, with the Froude number approximately ranging from 0.05 to 0.3. In the course of simulation the initial velocity remains unchanged, while the initial depth will be adjusted and finally tends to a nearly fixed value. Based on the requirement that the simulated flow will tend to a steady flow and comparisons of numerical results of sectional discharges, lower water surface profile after weir and the discharge coefficient, effects of the initial depth on simulated results are analyzed in order to obtain the appropriate range for the initial depth.

Keywords: Channel flows, Free Surface, Flow Simulation.

一、前 言

藉助於電腦科技之神速進展，利用電腦模擬各種流體力學上的問題已是時代潮流。若以簡潔、靈活與方便而已，MAC方法是值得一提的；此方法早在二十幾年前即已出現，其間經過多位學者的修正與發展，先後引用於處理各類流動^(1,2,3,4,5,6)。不過用於處理渠流還是最近的嘗試。渠流含一

自由面，MAC方法以多種方式來處理之。水位是經由計算而得的；然而在模擬的開始必須先輸入左邊界之初始深度。渠流的已知流況是反映於初始速度與初始深度，但只有前者是輸入定值，恆保持不變。所以，初始深度之重要性就顯而易見。本文以堰流為例，探討與分析初始深度對模擬結果之影響，並利用與前人結果之比較以了解初始深度的適當範圍。

二、理論探討

黏滯、不可壓縮的二維堰流 (Two dimensional weir flow) 須滿足下列Navier-Stokes運動方程式與連續方程式 (Continuity equation) (7)，即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p}{\rho} \right] + g_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{p}{\rho} \right] + g_y + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{與 } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

式中 x, y : 分別為流動與垂直方向的座標軸

t : 時間

u, v : 分別為沿 x 軸與 y 軸之速度分量

p : 壓力

ρ : 水的密度

ν : 水的機動黏度 (Kinematic viscosity)

g_x, g_y : 分別為沿 x 軸與 y 軸的重力加速度

式(1)、(2)與(3)之自變數為 t, x 與 y ; 而因變數為 u, v 與 p 。參閱圖1，配合本文所採用的數值方法，堰流的邊界可分為五種。

1. 左邊入流邊界 (Inflow boundary)

若以一維渠流而言，左邊界條件為其處的水位 H_1 與斷面平均速度 (Sectional mean velocity) V_1 均為已知。但是目前的二維流含有二個速度分量， u 與 v ，不只一個速度分量；同時摩擦力又予以考慮。一維渠流的均勻 (垂直) 流速 V_1 及其水位 H_1 無法直接做為而後數值計算的左邊界條件，只能做為設定左邊界初時條件的依據。

2. 渠底邊界

水不能穿透渠底，同時其間又不能懸空，所以，沿渠底之垂直速度 v 必須等於零，即

$$v \Big|_{\text{渠底}} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

此外，沿渠底之水平速度又必須符合非滑動條件，故

$$u \Big|_{\text{渠底}} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

3. 右出流邊界

右邊界為允許水一直連續流出計算範圍，其條件一般均以維持為對上游之影響以最小計。易言之，這相當於沿流線方向的速度梯度為零。若流線坡度很小，可以 x 方向計，則右出流邊界條件為[8]

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\text{右邊界}} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

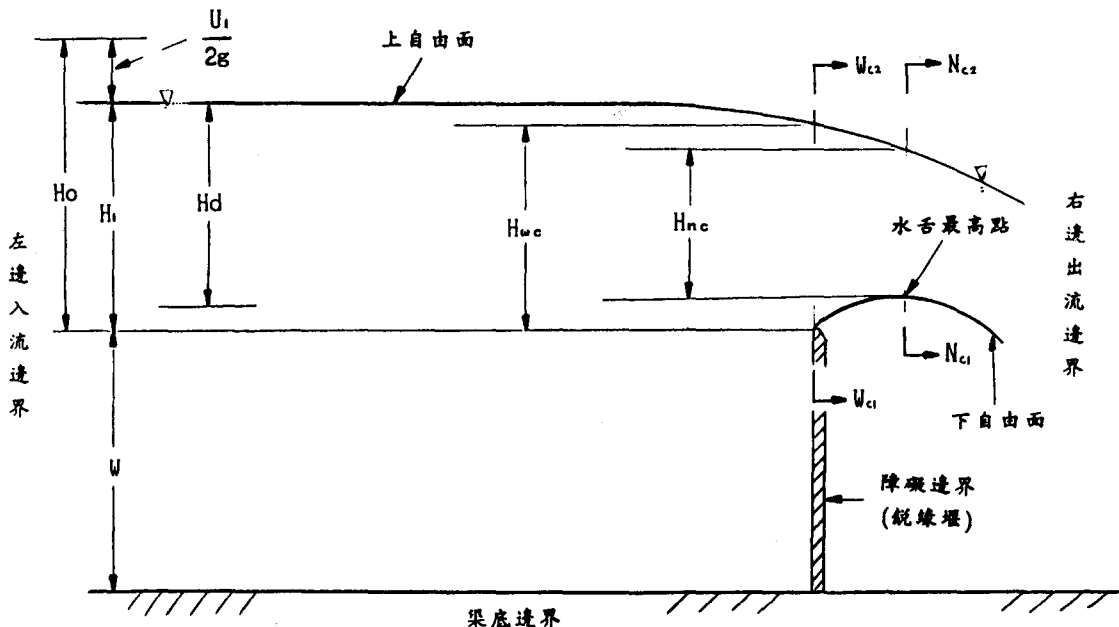


圖1 銳緣堰示意圖

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\text{右邊界}} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

4. 自由面邊界

利用自由面所需滿足的邊界條件以決定自由面高度，而邊界條件為動力條件 (Dynamic condition) 與機動條件 (Kinematic condition)。動力條件是指在自由面上之壓力以大氣壓計，即 $p=0$ 。而機動條件則為自由面上的水顆粒必須恆在自由面上；以 Eulerian 觀點而言，此條件為 [9]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

式中 h 代表自由面高度，而右下註腳 s 指在自由面上。

5. 障礙邊界 (銳緣堰)

銳緣堰為流場中的障礙物，可視為固體邊界。因此，堰之兩側與堰頂之邊界條件可採用式(4)與(5)之方式予以處理，即以非滑動條件視之。

本研究模擬二維堰流所引用的相關式包含四個參數或因數：上游權重參數 (Upstream weighting parameter) α 、鬆弛因子 (Relaxation factor) ω 、壓力修正參數 C_x 與 C_y ；相關式將詳細陳述於第三章。模擬的堰流將與前人結果比較與分析，後者的來源可能是理論分析的結果或是業已共認的經驗公式。用以供比較的前人結果儘可能具有相當廣泛的適用範圍，而不是單一獨立的結果，例如只針對上游福祿數 (Froude number) F_{r1} 等於某一特定值的實驗結果。易言之，以採用函數關係的前人結果為主，分別述於下：

1. 流量係數 (Discharge coefficient) C_d

參閱圖1，二維堰流的流量係數定義為

$$q = C_d [2g(H_1 - W)]^{1/2} \dots\dots\dots (9)$$

式中 q ：單位寬度流量

H_1 ：上游水位，自渠底起算

W ：堰高

而銳緣堰的流量係數 C_d 通常可由 Rehbock 公式求得，即

$$C_d = 0.611 + 0.08 [(H_1 - W)/W] \dots\dots\dots (10)$$

式(10)適用於 $(H_1 - W) \leq 5.0$ 。此外，銳緣堰是寬頂堰 (Broad crest weir) 的一極端。堰寬 B_w 必須相當小，堰流的條件為 $(H_1 - W)/B_w > 1.5$ 。式(10)為流量係數、上游水位與堰高間的關係式，並為多

人所採用。

2. 水舌形狀

位於堰頂下游的射流俗稱水舌 (Nappe)，其形狀即指上、下兩自由面。下自由面採用美國陸軍兵工團設計溢洪道之經驗公式 [10]。在某一個特定流量之下，以水舌的下自由面做為溢洪道的曲面，其時的對應深度因不同的情況而有不同的稱呼。在堰流，此深度是指自堰頂起算之上游深度 $H_1 - W$ ，而在溢洪道，則指自溢洪道頂起算的設計水頭 (Design head) H_d ；這兩深度間的關係為 $H_d = 0.89(H_1 - W)$ 。今於溢洪道頂另設一座標系以描述下自由面，水平與垂直座標軸分別以 X_{nc} 與 Y_{nc} 表示，垂直座標軸取向下為正，則溢洪道之曲面方程式或水舌下自由面的曲線方程式為

$$(X_{nc}/H_d)^{n_c} = 2.0(Y_{nc}/H_d), X_{nc} \geq 0 \dots\dots\dots (11a)$$

$$X_{nc}^2 + (Y_{nc}/H_d)^2 = (0.5H_d)^2, -0.175H_d \leq X_{nc} < 0 \dots\dots\dots (11b)$$

$$(X_{nc} + 0.5H_d \tan \theta)^2 + [Y_{nc} - (0.5H_d - 0.5H_d \cos \theta)]^2 = (0.2H_d)^2, -0.282H_d \leq X_{nc} < -0.0175 \dots\dots\dots (11c)$$

式中 $\theta = \cos^{-1} (0.175/0.5)$ 。

3. 流量梯度

一維定量流 (One dimensional and steady flow)，由連續方程式得知 $\partial q / \partial x = \partial (VA) / \partial x = 0$ ， V 與 A 分別代表斷面平均速度與通水面積 (Flow area)。換言之，通過任一斷面的流量都相等。然而，以目前的二維流而言，流量梯度不再等於零，其關係改為

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{H_b(x)}^{H_t(x)} u(x,y) dy = u(H_t, x) \frac{\partial H_t(x)}{\partial x} - \frac{\partial H_b(x)}{\partial x} u(H_b, x) - v(H_t, x) + v(H_b, x) \quad (12)$$

式中

H_t, H_b ：分別代表上、下兩自由面高度

$u(H_t, x), u(H_b, x)$ ：分別代表上、下兩自由面的水平速度

$v(H_t, x), v(H_b, x)$ ：分別代表上、下兩自由面的垂直速度

若上、下兩自由面高度及其上的水平速度與垂直速度均可計算求得，則由式(12)就可求得流量梯度 $\partial q / \partial x$ 。其次，如前段所述，左邊入流邊界之外側為

已知均勻流，流速與水位為已知的 V_1 與 H_1 ，則其處的流量 $q_1 (= V_1 H_1)$ 亦為已知值，再配合式(2)即求得沿流向的流量變化。

三、數值技巧

數值模擬使用MAC方法 (Method of Marker-and-Cell)，並配合高度函數 (Height function)。依座標軸方向，MAC方法將計算範圍，稱之為計算網格 (Computational mesh)，分割成無數的小晶格 (Cells)，並於範圍內灑下無數個顆粒，用以追蹤自由面的變化或供其它的用途。本文改以高度函數取代無數顆粒以分析自由面的變化。使用高度函數時，自由面坡度必須小於晶格比值，即 $\delta y / \delta x$ ， δy 與 δx 分別為晶格沿 y 與 x 軸的尺寸。以模擬自由面的立場而言，MAC方法的主要架構及其執行步驟可分成四個單元：構建問題、計算下時段 (Advanced time step) 的暫時速度 (Temporary velocities)、修正與迭代以求得下時段的真正速度與壓力、與計算下時段的自由面高度。執行順序就依照上述四個單元的順序，可是第一個單元只執行一次，其餘的三個單元卻一再重覆地執形^(11, 12, 13)。每重覆一次即增加或前進一個時段間距 (Time step)。各種問題的類別與特徵係反映於第一個單元上，例如流場的幾何因素，初始與邊界條件等等。

(一) 構建問題

計算網格為一長方形，其外圍繞一圈虛擬晶格 (Fiction cell)。晶格的右邊界與上邊界之座標分別以 $X(I)$ 與 $Y(J)$ 表示，但晶格中心的位置卻分別改以 $XI(I)$ 與 $YJ(J)$ 表示， I 與 J 分別為晶格 x 與 y 軸的位置指標。以本研究的二維堰流而言，計算網格為 $I=2$ 至 $IM1(=IBAR+1)$ 與 $J=2$ 至 $JM1(=JBAR+1)$ ， $IBAR(=75)$ 與 $JBAR(=45)$ 分別代表晶格沿 x 與 y 軸的總個數；所以計算網格的總晶格個數即為 $IBAR$ 與 $JBAR$ 的乘積。計算網格左邊、右邊、上邊與下邊為虛擬晶格，其晶格位置分別為 $I=1, 1 \leq J \leq JM2 (=JBAR+2)$ ； $I=IM2 (=IBAR+2), 1 \leq J \leq JM2$ ； $J=JM2, 1 \leq I \leq IM2$ ； $J=1, 1 \leq I \leq IM2$ 。沿 x 軸，堰落於第61個晶格，而其左、右兩邊的座標分為 $X(60)$ 與 $X(61)$ ；沿 y 軸，堰頂落於第21個晶格，而其高度 W 為 $Y(21)$ 。

MAC方法是採用交錯格點，如圖3所示，晶格

邊界只有法線速度，並無切線速度，壓力與重力加速度定義於晶格中心。除了上述的虛擬晶格，尚有表面晶格、充斥晶格、空晶格與障礙晶格。自由面所位於之晶格，稱之為表面晶格，其內的自由面高度以一水平線表示。充滿水與不含水的晶格分別稱之為充斥晶格與空晶格。晶格內不包含水也不包含空氣，而為固體，稱之為障礙晶格，本文所探討的堰即為障礙晶格。堰之邊界必須與晶格邊界重疊。

初始情況的上自由面為水平，其深度即為初始水位 $HT_{...}$ ，而下自由面以堰之所在為分界點分成二支；堰前的下自由面為渠底，但堰後之初始下自由面仍然為水平，且與堰頂齊平。在上述為水所充斥的範圍內，各晶格的初始速度為 U_1 ，只有這個水平速度為已知，而且維持不變；同持其內的壓力亦假設為靜水壓分佈。

(二) 邊界條件

參閱圖2，在每一單元的執行過程中，都必須執行另一共用單元——邊界條件，以確保在模擬過程中都能滿足第二章所求的邊界條件。這是由於MAC方法使用交錯格點，部份邊界條件必須利用加置於虛擬晶格上的速度才得以滿足。

1. 左邊入流邊界

左邊界條件展示於左虛擬晶格上， $i=1, j=1$ 至 $JM1$ 。若晶格不為空晶格，則 $u_{1,j}=U_1$ ，其餘晶格之 $u_{i,j}$ 均以零計；同時垂直速度 $v_{1,j}=0$ 。此外，在左虛擬晶格的上自由面 $HT(1)$ 與其右側的上自由面 $HT(2)$ 都維持在同一高度，即 $HT(1)=HT(2)$ 。因此，左邊界條件就相當於堰之上游不斷地提供一均勻流，其速度為已知的初始速度 U_1 ，但是深度會一再修正。一旦接近定流量，數值計算的結果都顯示 $HT(1)$ 趨近於一個定值，但並不等於 $HT_{...}$ 。主要原因為在渠底的邊界條件，並不採用滑動條件改以不滑動條件。

2. 渠底邊界

渠底邊界條件必須配合其下的虛擬晶格，其上只有法線速度，即為式(4)的垂直速度。所以 $v_{i,1}=0, i=2$ 至 $IM1$ 。但該列虛擬晶格並無切線速度，無法滿足式(5)之條件。因此，非滑動條件改以 $u_{i,1}=-u_{i,2}, i=2$ 至 $IM1$ 計。

3. 右邊連續流出邊界

右邊界晶格 ($i=IMAX$) 之速度必須等於其左

側晶格 ($j=IM1$) 之速度, 以符合式(6)與式(7)之條件。故 $u_{i+1,2,j} = u_{i,1,j}$, $v_{i+1,2,j} = v_{i,1,j}$, $j=2$ 至 $IM1$ 。

4. 自由面邊界

MAC方法處理表面晶格與空晶格間的速度所依據的原則有二：一是連續方程式，二是應力消散；此地所謂的應力消散是指作用於自由面上的剪應力必須等於零。由於自由面梯度並不太陡，以切應力等於零之條件來設置空晶格的水平速度，而垂直速度則利用連續方程式求得。首先處理表面晶格的垂直速度，但這視右晶格是否為空晶格而有所差異，若右晶格不是空晶格，則表面晶格與空晶格間的垂直速度，就利用表面晶格的其它三個速度分量由連續方程式計算而得；如果右晶格是空晶格，則先以其上或其下充斥晶格的水平速度取代表面晶格的水平速度，以符合切應力等於零的條件，而後再依上述方法計算垂直速度。最後，再處理位於表面晶格之上或下的空晶格，其水平速度就以表面晶格的水平速度計，以符合切應力等於零。

5. 障礙邊界

障礙邊界（銳緣堰）為固體邊界，其邊界條件可仿渠底邊界條件處理之。沿堰之兩側只有水平速度 u ，所以 $u_{i,w,r,j} = 0$, $j=1$ 至 JWR ；但無垂直速度 v ，因此，非滑動條件改以 $v_{i,w,r,j} = -v_{i,w,r,j}$ 計。上述中，右下註腳 IWR 表示障礙物在 x 軸的晶格指標，而右下註腳 JWR 代表障礙物在 y 軸之最高晶格指標。

(三) 下時段之暫時速度

MAC方法使用 Navier-Stokes 之差分式計算下時段 (Advanced time step) 之暫時速度 (Temporary velocities)。以晶格 (i, j) 而言，其邊界上之暫時速度 $u^{n+1}_{i,j}$ 與 $v^{n+1}_{i,j}$ 可分別由式(1)及式(2)之差分式求得，即

$$u^{n+1}_{i,j} = u^n_{i,j} + \delta t \{-FUX^n - FUY^n + VISX^n + g_x + [(p/\rho)^n_{i,j} - (p/\rho)^n_{i+1,j}] / \delta x\} \dots (13)$$

$$v^{n+1}_{i,j} = v^n_{i,j} + \delta t \{-FVX^n - FVY^n + VISY^n + g_y + [(p/\rho)^n_{i,j} - (p/\rho)^n_{i,j+1}] / \delta y\} \dots (14)$$

式中右下註腳 n 與 $n+1$ 分別代表現時段與下時段，而右下註腳 i 與 j 分別代表晶格沿 x 與 y 軸之位置指標； δt 為兩時段之時段間距， δx 與 δy 分別代表沿 x 與 y 軸之晶格尺寸；上述式中的各項差分式，以大寫符號表示，代表不同性質的力，其詳式可參閱

文獻〔〕。對流加速度 (Convective acceleration) 之差分式分別以 FUX^n 、 FUY^n 、 FVX^n 與 FVY^n 等四項表示，式中均包含一個上游權重參數 (Upstream weighting parameter) α 。若採用中央差分法，則 $\alpha = 0$ ；若採用上風差分法 (Upstream differencing) α 改以 1 計。介於這兩種特殊情況之參數值，即表示上游、下游兩速度之差分以 $(1 + \alpha) / 2$ 與 $(1 - \alpha) / 2$ 之比例予以分配。黏滯剪力項是以 $VISX^n$ 與 $VISY^n$ 等兩項表示。為了避免黏滯剪力項中之黏滯係數所造成之數值不穩定，本文採用 Golafshani 氏所用之微分方式，且應用中央差分⁽¹⁴⁾。

參閱式(13)與(14)，暫時速度的計算範圍為計算網格；但是最外圍 (計算網格) 的暫時速度將牽涉到虛擬晶格。其次，MAC方法之數值技巧為顯性法；同時，任何定量流的數值模擬必須以變量流 (Unsteady flow) 的觀點來處理。易言之，式(13)與(14)中的 δt 不能等於零。

(四) 下時段之真正壓力與速度

參閱式(13)與(14)，下時段之暫時速度 $u^{n+1}_{i,j}$ 與 $v^{n+1}_{i,j}$ 並不見得能滿足式(3)的連續方程式；因此，必須一再修正與迭代，直到其殘餘值小於容許誤差 ϵ ，才停止迭代。此時之暫時速度及對應的壓力，才視為下時段的真正速度與壓力。式(3)的殘餘值俗稱發散量 (Dilatation)，以 D 表示。修正與迭代之階數以右上註腳 k 表示。初始發散量 D ，即相當於 $k=0$ 時的殘餘值，是由式(13)與(14)之暫時速度代入連續方程式求得的。而後之發散量是根據修正後之暫時速度，即

$$D^{k+1} = \left[\frac{u^{n+1}_{i,j} - u^{n+1}_{i-1,j}}{\delta x} + \frac{v^{n+1}_{i,j} + v^{n+1}_{i,j-1}}{\delta y} \right]^k \dots \dots \dots (15)$$

在修正階段，對應的壓力變化為

$$[(\delta p / \rho)^{n+1}_{i,j}]^{k+1} = -\beta D^{k+1} \dots \dots (16)$$

式中，參數 β 為幾何因素與流動無關，定義為

$$\beta = - \frac{\omega}{\delta t \left[\frac{\gamma_{i+1,j} + \gamma_{i-1,j}}{(\delta x)^2} + \frac{\gamma_{i,j+1} + \gamma_{i,j-1}}{(\delta y)^2} \right]} \dots \dots (17)$$

而 γ 為晶格邊界條件參數 (Cell boundary condition parameters)，用以區分障礙晶格與非障礙晶格； ω 為鬆弛因子 (Relaxation factor)。充斥晶格與下表面晶格採用式(15)、(16)與(17)予以修正；但是，上表面

晶格採用線性內插計算壓力變化，以避免數值計算之發散⁽¹⁵⁾，即

$$(\delta p^{n+1}_{i,j,t})^{k+1} = (1-\eta) p^{n+1}_{i,j,t-1} + \eta p_{s,t} - p^{n+1}_{i,j,t} \dots\dots\dots (9)$$

式中 $\eta = \delta y / (HT^n_i - YJ_{i-1})$ ，其中 HT^n_i 代表上自由面高度，右下註腳 i 代表沿 x 軸之晶格位置； YJ_{i-1} 代表上表面晶格中心到渠底之高度； $p_{s,t}$ 表示作用於上自由面的壓力，以零計。

對所有晶格而言，任何壓力變化 δp 均會導致四週之速度改變，其間的關係為

$$(\underline{u}^{n+1}_{i,j})^{k+1} = (\underline{u}^{n+1}_{i,j})^k + \delta t C_x \frac{[(\delta p/\rho)^{n+1}_{i,j}]^{k+1}}{\delta x} \gamma_{i+1,j} \dots (10)$$

$$(\underline{u}^{n+1}_{i-1,j})^{k+1} = (\underline{u}^{n+1}_{i-1,j})^k - \delta t C_x \frac{[(\delta p/\rho)^{n+1}_{i,j}]^{k+1}}{\delta x} \gamma_{i-1,j} \dots (11)$$

$$(\underline{v}^{n+1}_{i,j})^{k+1} = (\underline{v}^{n+1}_{i,j})^k + \delta t C_y \frac{[(\delta p/\rho)^{n+1}_{i,j}]^{k+1}}{\delta y} \gamma_{i,j+1} \dots (12)$$

$$(\underline{v}^{n+1}_{i,j-1})^{k+1} = (\underline{v}^{n+1}_{i,j-1})^k + \delta t C_y \frac{[(\delta p/\rho)^{n+1}_{i,j}]^{k+1}}{\delta y} \gamma_{i,j-1} \dots (13)$$

而壓力與壓力變化間的關係為

$$[(p/\rho)^{n+1}_{i,j}]^{k+1} = -\beta D^{k+1} + [(p/\rho)^{n+1}_{i,j}]^k \dots\dots\dots (14)$$

修正與迭代將一再重複，直到發散量小於容許誤差 ϵ 則該階段迭代之速度與壓力就成為下時段真正速度與壓力。

(b) 下時段之自由面高度

利用式(9)、(10)、(11)與(12)所求得之真正速度，就可由式(8)計算下時段的自由面高度；自由面高度包含上自由面高度與下自由面高度，其結果為

$$HT^{n+1}_i = HT^n_i + \delta t F_i (\underline{u}^{n+1}, \underline{v}^{n+1}, HT^n) \dots\dots (15)$$

$$HB^{n+1}_i = HB^n_i + \delta t F_b (\underline{u}^{n+1}, \underline{v}^{n+1}, HB^n) \dots\dots (16)$$

右下註腳 i 代表沿 x 軸之晶格位置[15]。

(c) 數值之穩定性

在時段間距 δt 內，質點沿 x 與 y 軸之位移量分別為 $u \delta t$ 與 $v \delta t$ 。一般而言，MAC方法要求位移量不超過任一個晶格之寬度，即

$$\delta t < \min[(\delta x/u)_{i,j}, (\delta y/v)_{i,j}] \dots\dots\dots (17)$$

此外，依據Hirt所提供之數值經驗，上游權重參數 α 也須符合下列不等式[8]

$$1 \geq \alpha > \max [| (u \delta t / \delta x)_{i,j} | , | (v \delta t / \delta y)_{i,j} |] \dots\dots\dots (18)$$

參閱式(17)，鬆弛因子 ω 之值視流況為定量流或變量流而定。在處理變量流之問題時，若要求滿足連續方程式，一般令其值大於1但不超過2；但在處理定流之問題時，Hirt建議其值以不超過1為宜。

四、結果與討論

晶格尺寸 δx 與 δy 均設為0.05公尺，由式(10)得知，時段間距 δt 必須小於0.042秒，本文採用0.01秒。此外，由式(18)又得知，上游權重係數 α 的值介於0.24與1之間，自0.4起至1，分別採用十三個不同的值，間距為0.05。最後依據Hirt的建議，鬆弛因子 ω 採用自1至1.35等八個不同的值，間距也為0.05。

如前章所述，由於左邊界只能有一個固定輸入值，即在計算過程中其值始終保持不變。而本文又採用高度函數以計算自由面高度，參閱式(15)與(16)。因此，左上自由面高度 HT_1 不宜於做為固定輸入值，只能採用初始速度 U_1 做為個固定輸入值。如果上游福祿數以0.3為上限，最大初始速度大約只能高達1.4公尺/秒；共採用七種初始速度，即 $U_1 = 1.4、1.2、1.0、0.8、0.6、0.4$ 與 0.2 公尺/秒；而對應的上游福祿數必須等到最後求得左上自由面高度 HT_1 才能得知。雖然左上自由面高度不能設為固定輸入值，但是在堰流模擬的開始必須要輸入左上自由面高度，只不過它是浮動的，將會一再修正。不論左上自由面高度的初始值為若干，最後總會趨近於一個定值。最後的定值可能大於初始值，也可能小於初始值；一般而言，以後者的模擬結果較佳，即初始值低於最後所趨近的定值。但是，最後的定值（左上自由面高度）為一未知數。因此，針對每一種已知的初始速度 U_1 ，有系統地探討左上自由面高度的開始值對模擬結果的影響，將是利用MAC方法於堰流模擬之首要工作。

參閱式(1)與(2)，時間 t 的最大值 T_{WFIN} 設為35秒，希望在三十五秒內能達到定量流，否則不列入本文的討論範圍。一般而言，判斷模擬流況是否已足夠趨近於定量流，通常都是採用現時段與前時段的相對差距，其項目計有：上與下兩自由面高度、

水平速度、垂直速度與壓力，分別表為 $EMHT = (HT^n - HT^{n-1})/HT_{,t}$ 、 $EMHB = (HB^n - HB^{n-1})/HT_{,t}$ 、 $EMU = (u^n - u^{n-1})/U_1$ 、 $EMV = (v^n - v^{n-1})/U_1$ 與 $EMP = (p^n - p^{n-1})/(\gamma W)$ 。然而，當時間、或時段、或俗稱的循環 (Cycle) 遞增時，相對差距是以振盪方式而不是以單調方式遞減，故相對差距不適宜做為判斷趨近於定量流的依據。此外，若以相對差距做為判斷趨近於定量流的依據，還會碰到其他的困難。首先是相對差距有五項之多，以那一項目最為適宜呢？決定了項目之後，接著而臨的困難就是以何值為適當呢？

任何情形的計算結果均可展示出在不同時間、或不同時段或不同循環時的疊代次數 ITER。參閱第三章第三節，疊代次數 ITER 代表為了使下時段的暫時速度能滿足連續方程式所需的修正次數。同樣地，隨著時間、或時段、或循環的增加，疊代次數的變化也頗類似相對差距的變化，首先是急遽且不規則的振盪；而後，振盪愈來愈小，最後變成一個定值，或二個定值。如果成爲一個定值，則這個值就是 1，而不是其他任何數字。本研究以「疊代次數最後變成 1 時」的對應時間做為判斷的依據，其時姑稱爲臨界時間，以 T_c 表示之，即以臨界時間爲分界點，在此之後的流況均爲定量流。以臨界時間 T_c 等於十八秒爲例，在此之前，有好多時段的疊代次數都等於 1，但不是「最後」，其意義在於自十八秒後，任何時段的疊代次數都必須等於 1。易言之，自十八秒後，由式 (13) 與 (14) 求得的暫時速度用不著修正與迭代，都能滿足連續方程式，直接就可視爲下時段的真正速度。此外，臨界時間 T_c 必須小於三十秒，而時間的最大值設爲三十五秒。故臨界時間之後至少須有五秒鐘時間或五百個時段，其疊代次數都等於 1，且不能等於其他數字。

求得了臨界時間 T_c 之後，就可逐時段模擬流況，直到變成定量流爲止。於此時，再分析各相關因素對模擬結果的影響。分析的項目計有：流量係數 Cd 、下自由面高度 HB 與流量 q ，分別可由式 (10)、(11) 與 (12) 計算而得。另一方面，根據模擬結果也可直接求得流量係數、下自由面高度與流量，分別以 $Cd_{,com}$ 、 $HB_{,com}$ 與 $q_{,com}$ 表示之，特加一右下註腳 "com" 以區別之。則兩者之間的相對偏差可分別以下列三式表示

$$Cd_{,d} = \{ (Cd - Cd_{,com}) \} / Cd \dots\dots\dots (20)$$

$$HB_{,d} = \frac{1}{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{HB - HB_{,com}}{HB} \right]_i^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{HB - HB_{,com}}{HB} \right) \right]_i \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$q_{,d} = \frac{1}{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{q - q_{,com}}{q} \right]_i^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{q - q_{,com}}{q} \right) \right]_i \right\} \dots\dots\dots (22)$$

式中 N 代表總斷面數。

參閱式 (10) 的流量係數 Cd ，式中堰高爲一公尺，而堰之上游水位 H_1 爲 $HT(2)$ 。模擬的流量係數 $Cd_{,com}$ 由式 (9) 計算而得。斷面設於計算網格的左邊界。流量 q 則爲各晶格流量之和，而後者爲晶格的水平速度 u 與尺寸 δy 之乘積。流量係數只有一個數據可供比較。堰後的下自由面剖面示於式 (11a, b, c)，表爲設計水頭 Hd 的函數式，但 $Hd = 0.89(H_1 - W)$ ，故直接可由 $HT(2)$ 計算而得。模擬的下自由面直接儲存於陣列變數 $HB(I)$ ，括弧內的 I 代表晶格的位置指標。起先，模擬的堰後共有十二行晶格。但是下自由面高度不能低於渠底，即 $HB(I)$ 必須大於 0；若小於 0，則必須刪掉對應行的晶格。因此，下自由面高度的實際數據個數就視情況而定，介於 5 與 12 之間。其次，流量沿流向的梯度示於式 (12)。若已知流量的斷面設於計算網格的左邊界，如上述，其處的流量可由各晶格的水平速度與尺寸計算而得；則根據這個流量，就可由式 (12) 逐斷面計算流量。而在計算過程中，引用的變數只與自由面有關，例如上、下兩自由面高度 HT 與 HB ，及其上的速度；這些變數的值都可利用線性內插由模擬結果求得。另一方面，模擬流量 $q_{,com}$ 可直接由晶格的水平速度 u 與尺寸 δy 計算而得。數據的個數同樣受上述的限制，即堰後的下自由面高度必須大於 0，但堰前則無類似的限制。因此，可供比較的數據個數除了堰之下游斷面外，還包括上游斷面，其值介於 66 與 73 之間。

一旦達到定量流，數值模擬的堰流就可與前人結果比較。部份的比較示於圖 15、18、20 至 23，流線分佈示於圖 17，參閱文獻⁽¹⁵⁾。比較的項目計有：上、下兩自由面高度、壓力分佈與速度剖面。該資料的初始速度 U_1 爲 1.6 公尺/秒，初始深度 $HT_{,t}$ 爲 1.8 公尺。而示於式 (20) 與 (21) 之 $Cd_{,d}$ 與 $HB_{,d}$

分別等於0.0625與0.00588，即表示自由面的吻合程度非常好，但流量係數的相對偏差比較大。此外，針對壓力分佈與速度剖面，圖20至23顯示除了靠近堰頂外，兩者還大致吻合。這些比較只是針對單一的情況，而後的比較將針對函數，以提高比較的範圍，參閱式(10)、(11)與(12)。然而透過上述的兩個數字，0.0625和0.00588，與對應圖的結果及比較，而後只須比較數值之間的差異，就可大致了解展示於圖上的情形，用不著一一列出比較的細節。

(一)最適當的初始深度

遠離堰之上游，其流況為已知，以平均速度與深度為代表。可是由於本研究引用自由面的機動條件以計算自由面高度，故只能以速度代表已知的上游流況。但為計算之需要，計算網格的左邊界必須設定初始速度與初始深度；前者恆保持不變，而後者卻是浮動的，隨著時間的遞增將一再改變，最後均會趨近於一個定值。換言之，若初始度為已知，不論初始深度為若干，數值計算都可求得對應的定值，其值可大於也可小於原先的初始深度。而嘗試的初始深度 HT_{set} 有八種，即 $HT_{set} = 1.01、1.03、1.05、1.20、1.40、1.60、1.80$ 與 2.00 公尺。針對每一種初始速度，利用上述的方法以不同的初始深度尋找臨界時間 T_c ，其結果示於圖4。

圖2顯示臨界時間 T_c 與初始深度 HT_{set} 間的關係可分為兩類：第一類先是遞增而後就一直遞減，以(1)表之；第二類同樣是先遞增，而後再遞減，但最後又改為一直遞增，以(2)表之。屬於第一類為

較大的初始速度 U_i ，例如 $U_i = 1.0、1.2$ 與 1.4 公尺/秒；而屬於第二類則為較小初始速度，例如 $U_i = 0.2、0.4、0.6$ 與 0.8 公尺/秒。其次，圖2右上的粗實線代表臨界時間 T_c 的上限。臨界時間代表模擬流況已達到定量流的分界點，其條件可參閱上節。由於第一類曲線的後大部份是遞減，所以不會構成任何困難。換言之，以較大的初始速度而言，任何初始深度都可求得對應的臨界時間 T_c 。可是，較小的初始速度就會碰到困難，因為其後大半部曲線是遞增而不是遞減，極易超過臨界時間的上限，因而無法求得對應的臨界時間 T_c 。易言之，較小的初始速度不能選擇太大的初始深度 HT_{set} ，否則模擬流況無法趨近於定量流。這是上述兩類變化的最大差異。圖2左上角的箭頭標示曲線的遞增範圍，自初始深度1.03公尺起至1.05公尺或1.20公尺等兩種；前者為初始速度 U_i 等於0.2，0.4，0.8，1.2與1.4公尺/秒等五種情況；而後者為初始速度等於0.6與0.8公尺/秒。由於數據有限再加上不一致的關係，因此目前尚無法就這一部份的結果獲得較明確的結論。然而在遞減的範圍內，圖2顯示其臨界時間不太受初始深度的影響，因為曲線相當平緩。

臨界時間 T_c 與疊代次數之總和 $ITER_t$ 是一致的。臨界時間愈長則疊代次數之和也就跟著增加。圖3為疊代次數之總和 $ITER_t$ 與初始深度 HT_{set} 之間的關係。比較圖2與圖3，即可發現兩者的曲線分佈及其變化傾向幾乎完全一致，只不過圖3更清楚顯示上述的曲線特徵。圖3顯示，初始深度 HT_{set} 介於

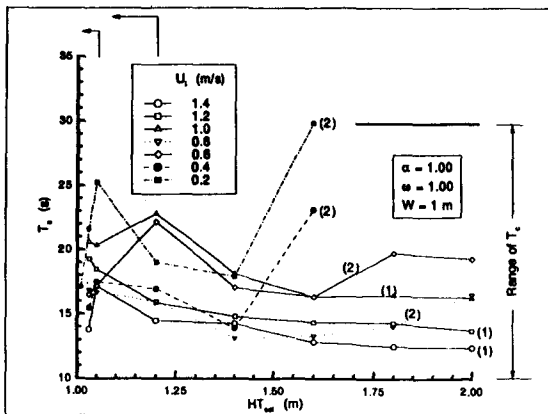


圖2 臨界時間 T_c 與初始深度 HT_{set} 間之關係

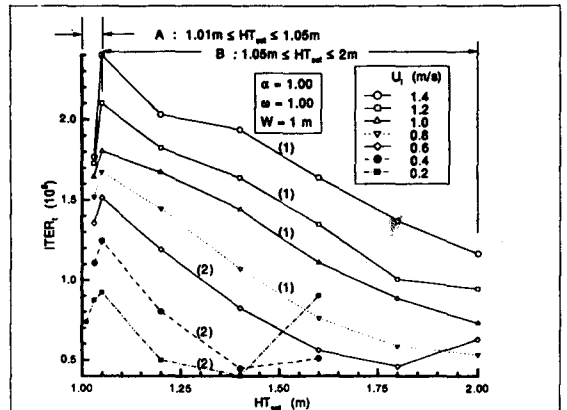


圖3 疊代次數之和 $ITER_t$ 與初始深度 HT_{set} 間之關係

1.05與2.00公尺之間的曲線同樣可分為兩類。第一類的曲線走向大致是先遞增而後只遞減，以'(1)'表之。較大的初始速度 U_i 屬於這一類型，例如 $U_i = 0.8, 1.0, 1.2$ 與 1.4 公尺/秒。而第二類的曲線則遞減後又改轉為遞增，以'(2)'表之，較小的初始速度大都屬於這一類型。此外，參閱圖3左邊的曲線變化，遞增範圍只局限於一個小範圍，自 $HT_{set} = 1.01$ 至 1.05 公尺，而不是兩個區。

模擬流況達到定量流時的上游深度為 $HT(2)$ ，圖4為初始深度 HT_{set} 與 $HT(2)$ 間的關係，而以初始速度為代表不同曲線的參數。以本研究所採用的方法而言，在模擬的過程中，初始速度 U_i 始終保持不變，但初始深度 HT_{set} 會一再改變，最後於模擬流況趨近於定量時，都會趨近於一幾乎不變的定值。圖4顯示，以同一初始速度 U_i 而言，不同的初始深度，其對應的上游深度 $HT(2)$ 均不相同，因為其間的關係並不是一條水平線，而是一條曲線。然而，每一條曲線的變化都相當一致。在初始深度的遞增過程中，上游深度 $HT(2)$ 先遞增，而後再遞減，最後又改為遞增。其實，圖4的曲線分佈頗類似圖2與圖3的情形。若初始深度 HT_{set} 低於 1.05 公尺，不論初始速度等於多少，上游深度 $HT(2)$ 都會隨著初始深度 HT_{set} 的增加而急遽上升。這是由於初始深度只略高於堰頂少許而已。所以任何初始速度的上游深度 $HT(2)$ 都將高於初始深度 HT_{set} ，因而形成遞增曲線。但是初始深度介於 1.05 與 2.00 公尺間的曲線坡度，則視初始速度而定。隨著初始速度的減小，曲

線變化愈趨近於平緩。除了初始速度 $U_i = 0.2$ 公尺/秒的曲線外，其餘的六條曲線均含一局部極小。以目前的有限數據而言，局部極小大約在初始深度 HT_{set} 等於 1.20 公尺的附近；確實的位置必須依賴更多的資料才能決定。圖4同時標示一自左下向右上的直線，直線的上方代表初始深度小於而後的上游深度 $HT(2)$ ，直線下方則適巧相反。大部分的數據均落在直線的上方，即代表模擬的上自由面是以逐漸上升的方式趨近於成定量流的上游深度 $HT(2)$ 。位於直線下方的數據比較少，因為這種情形只能出現於較小的初始速度，例如 $U_i \leq 0.6$ 公尺/秒。同時，較小的初始速度又不能採用太高的初始深度，因為超過上游深度 $HT(2)$ 太多的初始深度根本無法滿足定量流的條件。總之，以目前的需求而言，採用淺的初始深度較為適宜；因為模擬流況較可望趨近定量流，但是其時的結果是好是壞就不得而知。

由式(12)就可求得各斷面的流量 q ，而其與模擬流量 q_{com} 間的相對偏差 q_{rel} 可由式(13)求得，不同的初始速度 U_i 時，相對偏差 q_{rel} 與初始深度 HT_{set} 間的結果示於圖5。除非初始深度 HT_{set} 小於 1.03 公尺，不論初始速度深度的值為若干，流量的相對偏差都相當小，均在百分之二以下。這顯示模擬流量 q_{com} 與由式(12)計算而得的流量 q 非常吻合。至於在不同的初始速度，且初始深度介於 1.05 與 2.0 公尺之間時，相對偏差與初始深度 HT_{set} 間的變化並不非常一致，參閱圖5；故目前無法獲得明確與肯定的

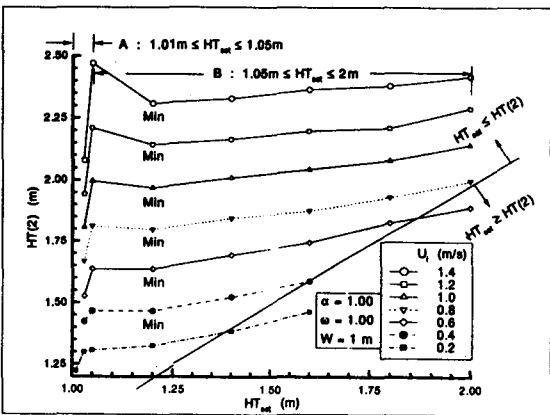


圖4 上游深度 $HT(2)$ 與初始深度 HT_{set} 間之關係

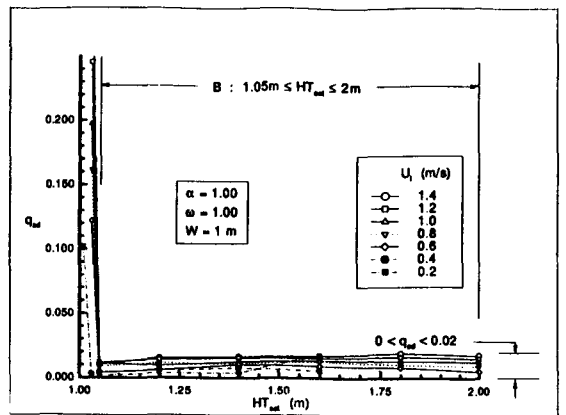


圖5 流量之相對偏差 q_{rel} 與初始深度 HT_{set} 間之關係

結論。同樣的，利用式(11a, b, c)可求得堰後的下自由面高度 HB_{set} ，而其與模擬下自由面高度 HB_{com} 間的相對偏差 HB_{rel} 可由式(9)求得，不同的初始速度 U_i 時，相對偏差 HB_{rel} 與初始深度 HT_{set} 間的結果示於圖6。只要初始深度超過1.03公尺，無論初始速度與初始深度的值等於多少，下自由面高度的相對偏差並不太大，大都在百分之七以下。下自由面高度的數據個數介於5與12之間，而上述流量的斷面個數介於66與73之間。這或許是造成下自由面高度的相對偏差較大的可能因素之一。參閱圖6，同樣地在不同的初始速度，且初始深度介於1.05與2.00公尺之間時，相對偏差 HB_{rel} 與初始深度 HT_{set} 間的關係並不明確。

參閱式(10)與(20)，圖9為流量係數的相對偏差

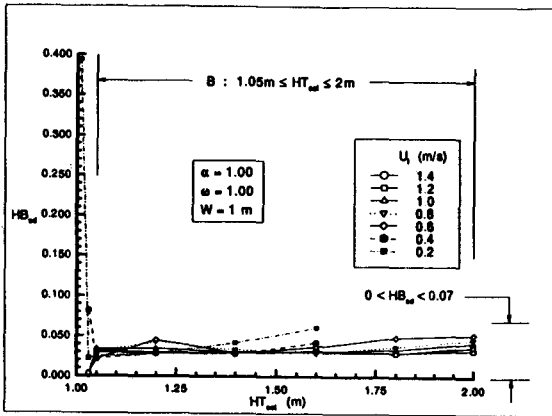


圖6 下自由面高度 HB_{rel} 之相對偏差與初始深度 HT_{set} 間之關係

Cd_{av} 及初始深度 HT_{set} 間之關係。同圖5與圖6比較，圖7的最大差異有三方面。第一，隨著初始深度的增加，不論初始速度 U_i 的值為若干，相對偏差 Cd_{av} 的變化都非常一致；先遞減而後再遞增，因而形成局部極小，其值(Cd_{av})與位置(HT_{set})示於圖7的右上角。此外，局部極小的位置也同時以箭頭標示於水平座標軸上。第二，相對偏差 Cd_{av} 的變化幅度相當大，同時也不再局限於一個小範圍內，幾乎涵蓋整個範圍， $1 < HT_{set} \leq 2.00$ 。而圖5與圖6則不然，較大的變化幅度只出現於初始深度 HT_{set} 小於1.03公尺或1.05公尺，其餘範圍的變化幅

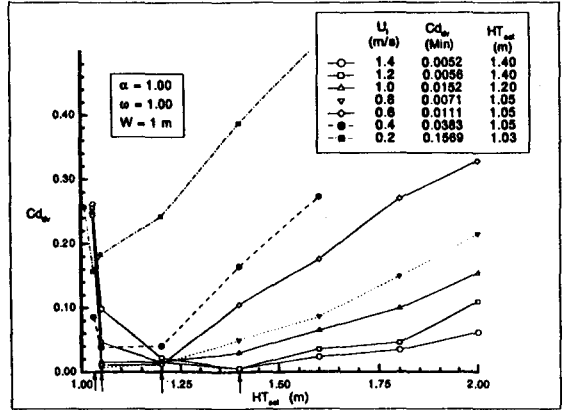


圖7 流量係數之相對偏差 Cd_{av} 與初始深度 HT_{set} 間之關係

度只有百分之幾而已。第三，若初始速度太小，例如 $U_i = 0.02$ 公尺/秒，不論初始深度 HT_{set} 等於多少，流量係數的相對偏差都相當大；此時局部極小值也已高達百分之十六左右。 $U_i = 0.2$ 公尺/秒時，其上游福祿數大致等於0.05。因此，以流量係數而言，MAC方法並不宜於模擬福祿數相當小的堰流。圖8的展示情形與圖7完全相同，唯一的差別是垂直座標軸改為代表上述三種相對偏差之和，而不只代表流量係數的相對偏差。針對相對偏差的變化幅度及其涵蓋的範圍而言，流量係數遠較其餘的兩者來得顯著。因此，圖8的曲線分佈與變化幾乎完全視圖7而定。易言之，圖7的特徵仍然呈現於圖8。

總而言之，引用MAC方法並配合高度函數來模擬堰流時，儘管每一種初始速度 U_i 與每一種初始深

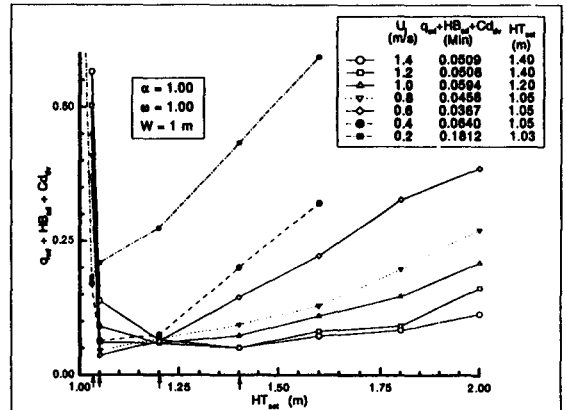


圖8 相對偏差之和與初始深度 HT_{set} 間之關係

度 $HT_{...}$ 都可得一模擬結果，而每一種結果均可代表一流況。但是以趨近於定量流的條件而言，以淺的初始深度較為適宜；變成定量流時的上游深度 $HT(2)$ 可參閱圖4。其次，若針對模擬結果與前人結果之比較，則須參閱圖8。較好的模擬結果視初始速度與初始深度而定，如圖8所示。若初始速度為已知，則初始深度 $HT_{...}$ 的適當範圍列於下：

$$U_i = 1.4 \text{公尺/秒} \text{ 時, } 1.20 \text{公尺} \leq HT_{...} \leq 1.80 \text{公尺};$$

$$U_i = 1.2 \text{公尺/秒} \text{ 時, } 1.05 \text{公尺} \leq HT_{...} \leq 1.80 \text{公尺};$$

$$U_i = 1.0 \text{與} 0.8 \text{公尺/秒} \text{ 時, } 1.05 \text{公尺} \leq HT_{...} \leq 1.40 \text{公尺};$$

$$U_i = 0.6 \text{與} 0.4 \text{公尺/秒} \text{ 時, } 1.05 \text{公尺} \leq HT_{...} \leq 1.20 \text{公尺};$$

太小的初始速度，無任何初始深度可獲得較好的模擬結果。此地所謂的“較好模擬結果”係指前述的三種相對偏差之和 $q_{...} + HB_{...} + Cd_{...}$ 小於百分之十。

(C) 上游權重參數 α 與鬆弛因子 ϵ 對模擬結果的影響

圖9展示上游權重參數 α 的影響，水平座標軸為上游權重參數 α ，垂直座標軸代表流量、下自由面高度與流量係數等三項的相對偏差之和，即 $q_{...} + HB_{...} + Cd_{...}$ ，參閱式(28)、(29)與(30)；圖上共有七條曲線分別代表初始速度 $U_i = 1.4、1.2、1.0、0.8、0.6、0.4$ 與 0.2 公尺/秒，而對應的初始深度 $HT_{...}$ 分別等於 $1.40、1.40、1.20、1.05、1.05$ 與 1.03

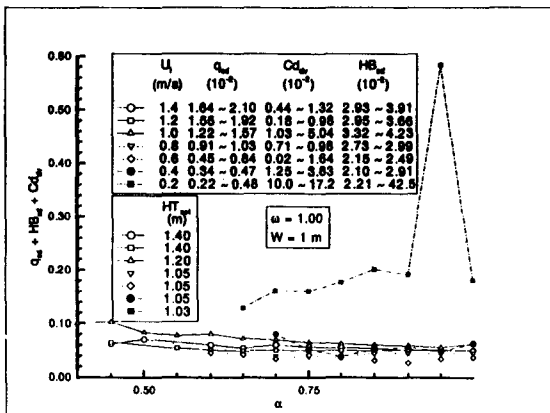


圖9 相對偏差之和與上游加權參數 α 間之關係

公尺。除了 $U_i = 0.2$ 公尺/秒的情況外，圖9顯示相對偏差之和似乎隨著上游權重參數 α 值的增加而遞減，但不明顯。如果以相對偏差之和等於百分之十作為模擬結果良好之上限；同樣的，除了初始速度為 0.2 公尺/秒的情形外，其餘的情況都可獲得良好的模擬結果，不論上游權重參數的值為若干。但是，若上游權重參數 α 的值小於 0.65 ，部份的初始速度往往無法趨近於定量流。因此，綜合上述的考量，上游權重參數的適當範圍應該介於 0.7 與 1.0 之間。在此範圍內，上游權重參數幾乎不影響模擬結果。易言之，模擬結果是好是壞完全決定於初始深度 $HT_{...}$ 。參閱圖9的說明，鬆弛因子 ω 對模擬結果的影響展示於圖10，只有水平座標軸改為鬆弛因子，其餘的與圖9完全相同。基於相同的考量，圖10顯示鬆弛因子的適當範圍應該介於 1 與 1.25 之間。同樣的，在此範圍內，鬆弛內子也幾乎不影響模擬結果。

五、結 論

1. 如式(13)與(14)所示，利用MAC方法模擬任何定量流問題是基於變量流的觀點，而不是直接著眼於定量流的控制方程式。
2. 隨著時間的遞增，疊代次數ITER呈現振盪遞減，最後變成一個定值，或是多個定值以交錯方式出現。若變成一個定值，而且其值等於1，則可以「疊代次數最後變成1時」之對應時間 T_c 做為判斷模擬流況已足夠趨近於定量流的依據。這種判

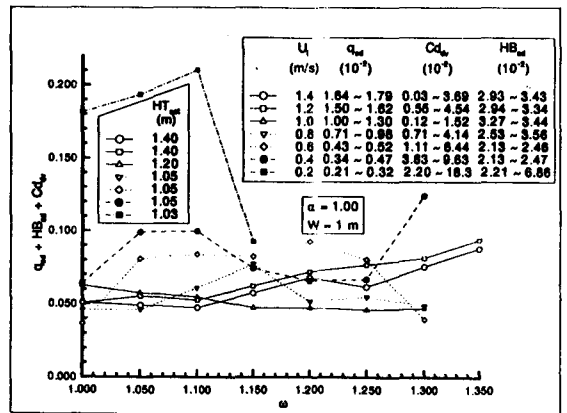


圖10 相對偏差之和與鬆弛因子 ω 間之關係

斷遠勝過於根據因變數的相對差距或其Root Mean Square值。

3. 使用MAC方法模擬堰流只能以初始速度 U_1 代表上游流況。可是，模擬的開始必先設定初始深度 $HT_{1..}$ ；不同的初始深度將代表而後變成定量流的不同上游深度 $HT(2)$ ，如圖4所示。故初始深度的角色相當重要。此外，初始深度還決定模擬流況是否能夠趨近於定量流，以及影響模擬結果的偏差。採用較淺的初始深度較可望趨近於定量流。
4. 模擬流況呈現為定量流時，其結果與前人結果之比較可分成三方面：各斷面流量 q 、堰後之下自由面高度 HB 與流量係數 Cd 。以流量 q 與下自由面 HB 之相對偏差而言，不同初始深度 $HT_{1..}$ 的影響並不明顯，而且無一致性的傾向可言。但是針對式(8)與(9)的相對偏差，不論初始深度為若干，流量 q 與下自由面高度 HB 都分別維持在百分之二與百分之八以下。參閱式(8)，可是流量係數 Cd 的相對偏差卻深受不同初始深度的影響，其相對偏差可自百分之一至百分之五十。
5. 若以上述三種相對偏差之和小於百分之十為準，則初始深度 $HT_{1..}$ 的適當範圍視不同的初始速度 U_1 而定。但若初始速度小於 0.2 公尺/秒，大約福祿數小於 0.05 ，則無適當之任何始深度可使這三種相對偏差之和小於百分之十。易言之，MAC方法不適宜模擬福祿數小於 0.05 之堰流。
6. 若初始速度大於 0.2 公尺/秒，或福祿數約大於 0.5 ，以上述三種相對偏差之和而言，模擬結果幾乎不受上游權重參數 α 與鬆弛因子 ω 的影響，只要 α 介於 0.7 與 1 及 ω 介於 1 與 1.25 之間。

六、致 謝

本所研究生林富松與周恆毅的細心打字，致本論文得以完成，作者在此謹致深厚謝意。

七、參考文獻

1. J. E. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon, and B. J. Daly, "The MAC Method: A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid Flow Problems Involving Free Surface." Los Alamos Scientific Laboratory report LA-3425 (March 1966).
2. A. A. Amsden, and F. H. Harlow, "The SMAC

Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Flows." Los Alamos Scientific Laboratory report LA-4370 (May 1970).

3. C. W. Hirt, and B. D. Nichols, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries." J. Comp. Phys. 39, (1981), 201.
4. D. T. Martin, D. C. Lawrence, C. M. Raymond, and C. W. Hirt, "NASA-VOF2D: A Computer Program for Incompressible Flow with Free Surface." Los Alamos, NM87544, (1985).
5. W. F. Noh, and P. Woodward, "SLIC (Simple Line Interface Calculation)." in Lecture Notes in Physics, Vol. 59: Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, edited by A. I. van de Vooren and P. J. Zandbergen, Springer-verlag, (1976).
6. R. S. Hotchkiss, "Simulation of Tank Draining Phenomena with the NASA SOLA-VOF Code." Los Alamos Scientific Laboratory report LA-8163-MS, (1979).
7. James W. Daily, and Donald R. F. Harleman, Fluid Dynamics (1973).
8. C. W. Hirt, B. D. Nichol, and N. C. Romero, "SOLA-A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows." Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-5852 (April 1975).
9. Bernard Le Maut, An Introduction to Hydrodynamics And Water Waves (1976).
10. Corps of Engineers of U. S. A., "Hydraulic Design guide".
11. C. W. Hirt and J. P. Shannon, "Free-Surface Stress Conditions For Incompressible Flow Calculations." J. Comput. Phys. Vol. 2, (1968), 403.
12. B. D. Nichols and C. W. Hirt, "Improved Free Surface Boundary Conditions for Numerical Incompressible Flow Calculations," J. Comput. Phys. Vol. 8, (1971), 434.
13. C. R. Easton and I. Catton, "Initial Value Techniques in Free-Surface Hydrodynamics," J. Comput. Vol. 9, (1972), 424.
14. M. Golafshani, "A Simple Numerical Technique for Transient Creep Flows with Free Surfaces," International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 8, (1988), 897.
15. 蘇文福，「應用MAC法於銳緣堰之數值模擬」，私立淡江大學碩士論文，1993。

收稿日期：83年4月30日

接受日期：83年6月30日