農業工程學報　第39卷第4期
中華民國82年12月出版

Journal of Chinese Agricultural Engineering
Vol. 39, No. 4, December 1993

波茲曼轉換在解土壤非飽和水分擴散運動的誤差性探討

Investigation of Deviation on Solving Diffusive Movement of Unsaturated Soil Water by Boltzman Transformation Method

國立台灣大學農業工程學系副教授
張　文　亮
Wen-Lian Chang

國立台灣大學農業工程研究所博士班研究生
何　信　賢
Shin-Shen Ho

摘　要

非飽和土壤水分傳輸可表示爲非線性微分方程，這方程不容易解，因爲水分傳導參數是依土壤含水量而變。

假設土壤水分是水平移動，水分傳輸可以視爲擴散運動。波茲曼轉換是一常用的方法解擴散方程。然後由沿著水平不同距離的土壤含水量變化，可以求得擴散係數。

然而理論與實驗的結果並不符合，實驗結果顯示最大擴散係數發生在96%，而非100%土壤含水量，本文認爲這個誤差係來自波茲曼假設不完全符合土壤水流實際狀況。

關鍵詞：擴散係數，波茲曼轉換。

ABSTRACT

The flow of water in unsaturated soils can be described as a non-linear partial differential equation. This equation is difficult to solve because the conductivity coefficient is dependent on the water content.

In the case of horizontal movement, water may be considered as a diffusive transport. Boltzman transformation is a common method to solve this diffusion equation. Then obtaining diffusive coefficient from the soil water content along the horizontal profile.

However, the experimental and theoretical result are not matched. The experimental result show the maximum diffusivity is about 96%, not 100% saturation. This disagreement is because of the basic assumption of Boltzman, which does not always hold in the soil moisture movement.

Keywords：Diffivity coefficient, Boltzman transformation.

前　　言

擴散運動是土壤水分移動的重要機構。作物根系的吸水，水蒸氣（water vapour）在土壤孔隙的移動，水分在土壤中由濕潤移動至乾燥的地方，土壤肥料或污染質隨著水分的移動，土壤熱傳導，土壤孔隙中氣體的傳輸都可以用擴散程序（diffusion process）來描述（Nielsen et al., 1984）。

擴散方程的非線性解，在過去（Crank，1956）的發展已經相當前進。因此這些解法經常被應用來解土壤水分、熱、氣體、鹽類的傳輸。所解出的公式在灌排工程，水文平衡運算，環境污染評估上使用相當廣泛。

水分在土壤的擴散運動主要以擴散係數（diffusivity coefficient）特定之。擴散係數是土壤含水量的函數，水分愈高，水分的擴散係數率較快。反之，乾燥時擴散則較慢。由於傳統的擴散方程是非線性，最有名的解法是用波茲曼轉換（Boltzman transformation），成線性微分解（Bruce and Klute，1956）。依這解法所設計的實驗，也被美國農藝學會（Klute，1986）編錄，成為非飽和擴散係數的測定法。但是土壤基本上是個複雜多孔體（porous system），土壤內孔徑大小、排列、彎曲、方向、連通性都不相同，物質在孔隙內移動，尤其是與顆粒交感作用較多的水分，其傳輸行為能否完全符合波茲曼解的假設條件，是值得懷疑。

郭勝豐（民國76年）、游進裕（民國77年）與何信賢（民國81年）都曾經以Bruce and Klute（1956）的非穩定水平入滲移動試驗，測定不同含水量的土壤水分擴散係數，用以定量非飽和水分在作物根區、旱田或毛細管的上昇移動。這些研究都有多次的反覆實驗，實驗結果經常呈現土壤水分擴散係數的最大值不是在飽和狀況，而是在接近飽和的地方。在Bruce and Klute最早的實驗也發現相似的現象。後來的一些學者也發現這種情形（Hillel，1980，張文亮，民國82年）。根據傳統的解釋，這種不合理現象，原因有土壤水分遲滯效應，濕潤過程中熱量產生影響水分流動，土壤夾氣現象（張文亮、張麗秋，民國82年），顆粒團粒結構的不穩定性等原因。但是在我們過去多次仔細的實驗，發現在70%以上的飽和度，其擴散係數反常的跳動。進而懷疑這現象不祇是過去學者所公認的原因，我們認為可能更基本的原因是Boltzman transformation在數學上可以解非線性擴散方程，但是物理上的意義並不完全符合土壤非飽和水分傳輸特性，以致於公式計算上有偏差。

本研究是根據我們過去的實驗結果，與仔細的推導Boltzman transformation造成偏差的所在。提供使用這公式計算非飽和擴散係數時，需要注意的地方。

理論與分析

根據達西公式（Darcy's equation），土壤水流通量（flux，q）可表示為

$$q=-k(\theta)\frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{......(1)}$$

$k(\theta)$為導水係數（hydraulic conductivity），是土壤含水量（soil moisture content）θ 的函數。h是土壤水分的總能量水頭（total energy water head）。x是一度空間水平方向的移動距離。因為是水平移動，水分的運動是靠壓力能量差，重力影響可忽略不計。

(1)式又可改寫為

$$q=-k(\theta)\frac{\partial h}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{......(2)}$$

根據定義（Hillel，1980）擴散係數$D(\theta)$定義為

$$D(\theta)=k(\theta)\frac{\partial h}{\partial \theta} \quad \text{......(3)}$$

(3)式的h已相當於壓力水頭。將(3)式代入(2)式得

$$q=-D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{......(4)}$$

根據質量守恆，

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=-\frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{......(5)}$$

將(5)式代入(4)式得

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \quad \text{......(6)}$$

為了解(6)式初始與邊界條件分列為

$$\theta=\theta_i，x\geq 0，t=0 \quad \text{......(7)}$$

$$\theta=\theta_s，x=0，t>0 \quad \text{......(8)}$$

$$\theta=\theta_i，x\rightarrow\infty，t>0 \quad \text{......(9)}$$

θ_i是土壤初始含水量（initial soil water content），θ_s是土壤飽和含水量（saturation soil water content）。在實驗上，(7)式表示在水分進入土壤以前，土壤含水量一致。(8)式表示實驗進行期間，土壤的水分的一端一直保持飽和含水量，這在實驗上表土的進水祇要保持正壓定水頭裝置即可達成。(9)式表示實驗進行期間，土壤無窮遠的一端一直未被水分濕潤，這在實際上，沒有實驗土柱可達無窮長，但是祇要水分濕潤鋒面（wetting front）未達土柱底端，物理意義上類似數學意義。

(6)式是θ與x，t的偏微分式，根據傳統的變數分離方法，

$$\theta(x, t)=X(x)T(t) \qquad \text{......(10)}$$

令一新變數ψ，

$$\psi(\theta)=X(x)T(t) \qquad \text{......(11)}$$

ψ是θ的函數，因爲

$$\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial t}=\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial(\theta)}{\partial t}$$

$$=XT' \qquad \text{......(12)}$$

所以

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial\theta}{\partial\psi(\theta)}\cdot XT' \qquad \text{......(13)}$$

又

$$\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$=X'T \qquad \text{......(14)}$$

所以

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial\theta}{\partial\psi(\theta)}\cdot X'T \qquad \text{......(15)}$$

又由(15)式知

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\phi(\theta)}\cdot X'T \qquad \text{......(16)}$$

故將(13)、(15)與(16)式代入(6)式，得

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi(\theta)}XT'=\frac{\partial}{\partial\psi(\theta)}XT'\left[D(\theta)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\psi(\theta)}X'T\right] \qquad \text{......(17)}$$

或表示祇對單一變數的微分方程式

$$\frac{XT'}{(X'T)^2}\cdot\frac{d\theta}{d\psi(\theta)}=\frac{d\theta}{d\psi(\theta)}\left[D(\theta)\frac{d\theta}{d\psi(\theta)}\right] \qquad \text{......(18)}$$

根據Boltzman transformation（Childs，1969），令

$$\psi=xt^{-1/2} \qquad \text{......(19)}$$

由(16)與(19)式知

$$XT'=X\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-3/2} \qquad \text{......(20)}$$

又由(14)與(19)式知

$$X'T=t^{-1/2} \qquad \text{......(21)}$$

將(20)與(21)式代入(18)式得

$$-\frac{1}{2}xt^{-1/2}\frac{d\theta}{d\psi(\theta)}=\frac{d}{d\psi(\theta)}\left[D(\theta)\frac{d\theta}{d\psi(\theta)}\right] \qquad \text{......(22)}$$

將(19)代入(22)式，並且左右兩端消去d$\psi(\theta)$，並積分之

$$-\frac{1}{2}\int_{\theta_i}^{\theta}\psi(\theta)d\theta$$

$$=\int_{\theta_i}^{\theta}d\left[D(\theta)\cdot\frac{d\theta}{d\psi(\theta)}\right]$$

$$=D(\theta)\frac{d\theta}{d\psi(\theta)}-D(\theta)\frac{d\theta_i}{d\psi(\theta)}$$

$$=D(\theta)\frac{d\theta}{d\psi(\theta)} \qquad \text{......(23)}$$

由(23)式可以改寫爲

$$D(\theta)=-\frac{1}{2}\frac{d\psi(\theta)}{d\theta}\int_{\theta_i}^{\theta}\psi(\theta)d\theta \qquad \text{......(24)}$$

將(19)代入(24)式得

$$D(\theta)=-\frac{1}{2}\frac{dxt^{-1/2}}{d\theta}\int_{\theta_i}^{\theta}xt^{-1/2}d\theta$$

$$=-\frac{1}{2t}\frac{dx}{d\theta}\int_{\theta_i}^{\theta}xd\theta \qquad \text{......(25)}$$

根據(25)式設計的實驗，很容易計算D(θ)。t是水平入滲的時間，是實驗上的設定。dx／dθ是不同水平距離含水量的變化斜率，因爲距入水口的距離愈遠，含水量愈低，故dx／dθ爲負號，D(θ)爲正值。$\int xd\theta$代表含水量爲θ的距離x至濕潤鋒面前端的水量，因爲濕潤前端的含水量最乾，當θ愈大，積分值愈大，相對的D(θ)也愈大；反之θ愈小，D(θ)也愈小。

試驗與方法

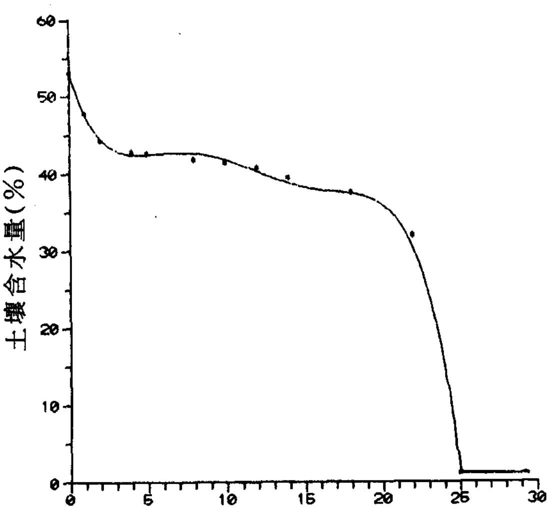
試驗土樣係採自學甲旱作試驗站的坋質壤土，含砂26％、坋粒54％、黏粒20％，假比重1.43^{g}/cm^{3}。經過風乾與過2mm孔徑篩篩過後，將土樣依次分層填入水平試驗槽。試驗槽以透明壓克力製成，長85cm，內徑5cm。另有一採土裝置，每1cm可以間隔採土。

在入水口的一端接1cm水頭高的定水頭出水裝置，以開始入滲的時間爲0，水分水平擴散至25cm長時，斷水並記錄時間。以採土裝置分層採土，迅速稱其重量(ω_1)，再放入105℃烘箱24小時，取出乾燥冷卻後，再測重量(ω_2)。ω_1 與ω_2 之差距即爲含水量。

實驗進行期間，室溫17～19℃，相對濕度80～95％。

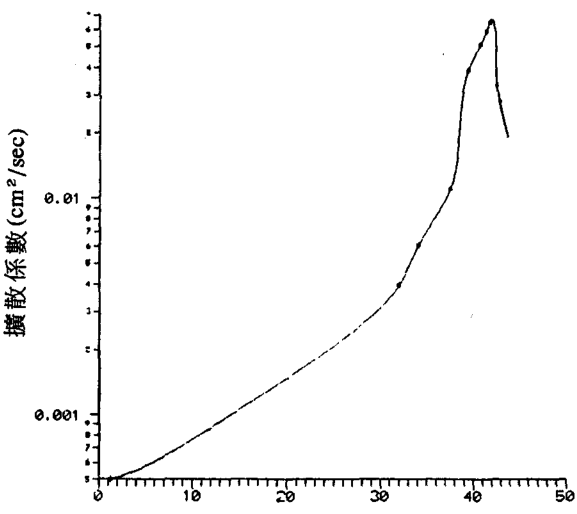
結果與討論

試驗的結果以圖(一)表示在水平入滲33497sec後入滲距離(x)與土壤含水量(θ)的關係式。圖(二)是將圖(一)的x～θ 以公式(25)計算D(θ)。



圖(一)　水平入滲距離與土壤含水量關係圖

圖(二)顯示，根據Boltzman transformation計算出的D(θ)在接近飽和處，其最大値不是在飽和處，而是在96％的飽和，這個結果與物理意義不符合。其他類似的實驗結果在Bruce and Klute（1956），何信賢（民國81年）的實驗裡都有提到。這種誤差的原因由圖(一)可以看出，含水量在與土壤距離並非是$\psi = xt^{-1/2}$的關係，也就是土壤水分水平擴散運動，不完全符合Boltzman transformation的假設，以致在數學上可以得解，但物理現象上有偏差。



圖(二)　不同含水量的擴散係數

在非飽和土壤水分傳輸，我們認爲沒有理由要接受$\psi = xt^{1/2}$的假設是成立的。土壤水分在吸水現象上，即使在均質土壤，固定水頭的理想狀況下也呈現非穩定現象（Corey，1977）。較接近Boltzman transformation假設的水分傳輸模式是Green-Ampt（1911），其水平入滲通量$q = st^{-1/2}$，s爲土壤吸水能力（sorptivity）。兩者皆有$t^{-1/2}$關係。但從Green-Ampt公式的推導上（張文亮、張麗秋，民國82年）看出祇有粗質壤土與短時間的入滲延時才能符合實驗結果；在細質地與長時間的情況必須使用Philip（1955）的推導。有偏差的假設，公式計算結果，當然與實驗情況不符合。

圖(一)也顯示另一個Boltzman transformation結果不適實驗結果的地方，就是很難準確地測量 $\partial x / \partial\theta$。因爲$\theta$ ～x的曲線近似於δ（delta）-function，當接近飽和的 $\partial\theta$ 太小，使得D(θ)偏高；而接近濕潤鋒面的 ∂x又太小，使D(θ)偏低。眞正能

夠合理適用計算D(θ)的祇有曲線轉折的狹窄區間。根據我們的推論，不能祇據一個t時間就可以求出所有的含水量的D(θ)，而祇能求得很小的區間，因此需要一組不同時間的重覆實驗，才能求出較大範圍的D(θ)。

結　論

土壤水分在祇受壓力能量差的移動並不完全符合Boltzman transformation的假設，所以計算出來的擴散係數並不合乎理論。證明在孔隙體內水分的傳輸，要受土壤孔隙內之複雜的微觀邊界條件影響，其移動機構較熱、電或空氣在單純介質中的傳輸要複雜。因此在實驗上測定祇能選擇斜率陡變的一小段x～θ斜率作運算，然後修正實驗在不同時間下，反覆求斜率陡變的D(θ)，才能求得較準確的結果。

至於選取的斜率與入滲時間，如何才能更客觀，仍待進一步的研究。

誌　謝

本研究與實驗承蒙台大農工研究所的施嘉昌教授與徐玉標教授的討論與指導，使我們對實驗結果有更深的思索，在此一併致謝。

參考文獻

1.郭勝豐，民國76年，裸地表土蒸發對土壤水分變化與毛管補給相關之研究。國立台灣大學農業工程學研究所碩士論文。

2.游進裕，民國77年，旱田土壤水分移動之研究。國立台灣大學農業工程研究所碩士論文。

3.何信賢，民國81年，不飽和土壤水分在根區移動之模擬。國立台灣大學農業工程研究所碩士論文。

4.張文亮、張麗秋，民國82年，壓縮土壤空氣減緩污染入滲速率之研究。第四屆土壤污染研討會文集。

5.張文亮，民國82年，土壤水分遲滯效應在非飽和導水係數測定上的影響，農工學報審查中。

6.Bruce, R.R., and A. Klute. 1956. The measurement of soil moisture diffusivity. Soil Sci. Soc. Am. Proc. vol. 20. p.458-462.

7.Childs. E.C. 1969. Soil Water Phenomena. Wiley-Inter science Publication.

8.Corey, A.T. 1977. Mechanics of Heterogeneous Fluid in Porous Media. Water Resources Publications.

9.Crank, J. 1956. The Mathematics of Diffusion. Oxford University Press London.

10.Green. W.H., and G.A. Ampt. 1911. Studies in soil physics. I.The flow of air and water through soils. J. Agri. Sci., vol.4.p.39-113.

11.Hillel, D. 1980. Fundamentals of soil Physics. Academic Press.

12.Klute, A. 1986. Methods of soil Analysis. Part I. Physical and Mineralogical Methods. Second Edition. The American Society of Agronomy and Academic Press.

13.Nielsen, D.R., R.D. Jackson, J.W. Cary, and D.D. Evans. 1984.Soil Water. American Society of Agronomy and Soil Science Society of America.

14.Philip, J.R. 1955. Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration dependent.Trans. Faraday Soc. vol. 51. p.885-892.

收稿日期：民國82年7月27日
修正日期：民國82年8月30日
接受日期：民國82年9月 2日