

專論

應用MAC方法並配合高度函數於二維堰流

Applications of the MAC Method with Height Functions in a Two-Dimensional Weir Flow

淡江大學水資源及環境工程學系教授

淡江大學水資源及環境工程學系研究生

施清吉

蘇文福

Ching-Chi Shih

Wen-Fu Su

摘要

若堰之上游福祿數介於0.1與0.3之間，且上游權重參數與鬆弛因子均以1計，利用MAC方法並配合高度函數可模擬得相當準確之自由面。其相對標準誤差在百分之二以下，但下表面晶格之速度必須採用連續方程式予以修正。流量係數之相對誤差稍大，大約在百分之二至百分之十。壓力分佈與速度剖面之變化傾向也非常合理，除了堰頂與其附近外。但是，這缺陷即可消除，若堰之範圍佔二行以上的晶格，而不是只佔一行。

關鍵詞：明渠水力學、自由面、流動模擬、流體力學

ABSTRACT

For a two dimensional weir flow with values of the upstream Froud numberranging from 0.1 to 0.3, the free surfaces simulated by the MAC method, withboth the uptream weighting parameter and over relaxation factor equal to 1,coupled with two hight functions are quite accurate within relative standarderrors less than 0.03 as compared with the extensive experiments by the U.S.Bureau of Reclamation, if corrections of velocities by the continuity equationare extended to the lower surface cells. However, relative errors for thedischarge coeffcient range from 0.02 to 0.10 instead, with an average value of 0.07. As for pressure distributions and velocity profiles, numerical resultsdo show the reasonable tendency except in the neighborhood of the weir crest,around which the discrepancy can be eliminated if the weir is set to occupy more two columns of cells rather than only one column of cells.

Key words : Open Channel Flow, Surface, Flow Simulation, Fluid Mechanics

一、前言

應用Navier-Stokes方程式及連續方程式(Continuity equation)模擬二維堰流(Two-dimensional weir flow)，基本假設為水平渠底、自由面之壓力以大氣壓力計與忽略表面張力之影響。模擬之流動相當於初始流況(Initial flow)為一均勻流(Uniform Flow)，然後瞬間放置銳緣堰，並將在堰後且低於堰頂之水抽去；再應用數值方法，模擬各不同時刻之上、下自由面、速度剖面、壓力分佈、堰前漩渦(Eddy)長度 Le 及流量係數(Discharge Coefficient) Cd 。數值方法採用有限差分(Finite Difference)，以MAC(Marker-and-Cell)方法配合高度函數[1, 2]*。迭代各物理量直至成定量流(Steady flow)為止；此時，再分析流況，並以數值結果與前人理論分析及實驗結果比較。

二、理論基礎

二維堰流之自變數(Independent variables)為空間座標 x (流向)與 y (水深方向)，以及時間 t ，

其流動需滿足下列Navier-Stokes方程式與連續方程式[3]，即 x 方向：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x} + g_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

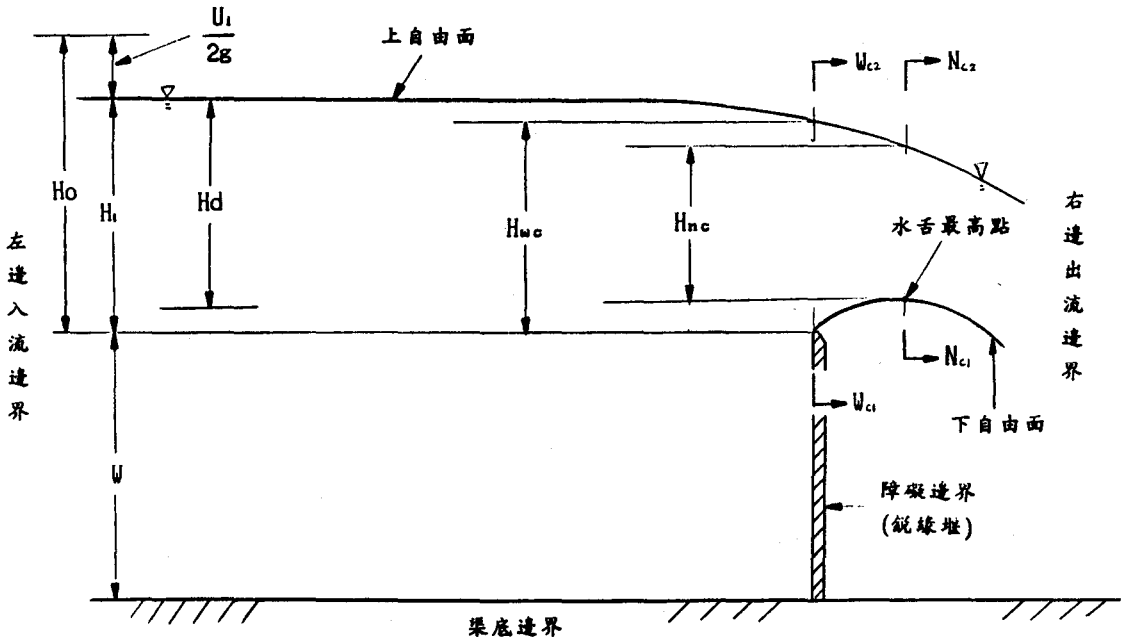
y 方向：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial(p/\rho)}{\partial y} + g_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

與

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

式中 u 與 v 分別為 x 與 y 方向之速度分量， p 為壓力， ρ 為流體密度， ν 為運動黏滯係數(Kinematic viscosity coefficient)， g_x 與 g_y 分別為 x 與 y 方向物體力。參閱圖一，配合數值模擬，堰流之邊界條件共有五種：



圖一 銳緣堰示意圖

*參考文獻

1. 左邊入流邊界

左邊界維持一固定總水頭 H_0 ，此總水頭在任何時刻均保持不變，而左邊界之自由面高度 H_1 及速度 V_1 ，會隨時間之遞增而加以調整，直到達到定量流為止。

2. 渠底邊界

液體不能穿過渠底邊界，因此渠底之垂直速度 v 必須等於零，即

$$v \Big|_{\text{渠底}} = 0 \quad (4)$$

而渠底之水平速度 u 需滿足非滑動條件，故

$$u \Big|_{\text{渠底}} = 0 \quad (5)$$

3. 右邊出流邊界

右邊界為允許流體一直連續流出計算網格(Computational Mesh) [4]，而一般採用的方法是以維持為對上游之影響為最小計；易言之，即假設沿流線方向之速度梯度為零。若流線坡度變化不大，可視為平行於 x 軸，則出流條件為

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\text{右邊邊界}} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\text{右邊邊界}} = 0 \quad (7)$$

4. 自由表面邊界

自由面之邊界條件為動力條件(Dynamic condition)及運動條件(Kinematic condition)。動力條件是指在自由面上之壓力以大氣壓力計。而運動條件則指在自由面上之水顆粒必須恆在自由面上。以Eulerian之觀點，此條件為[5]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} = v_s \quad (8)$$

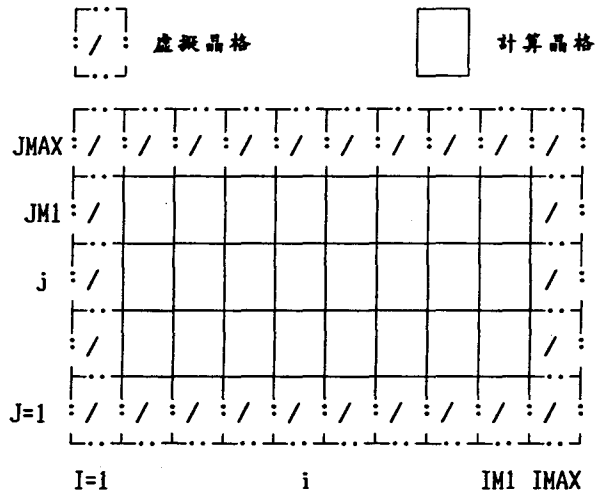
式中， h 代表自由面之高程，而右下註腳 s 指在自由面。

5. 障礙邊界(銳緣堰)

銳緣堰為流場中之障礙物，可視為固體邊界。因此，堰之兩側與堰頂的邊界條件可採用式(4)與(5)之方式予以處理，即以非滑動條件視之。

三、數值計算

數值計算之架構，先應用Navier-Stokes之差分式，計算下時段(Advanced timestep)之暫時速度(Temporary velocities)，再將所求得之速度，代入連續方程式，判斷是否符合容許誤差。若符合則計算下時段之上、下自由面高度；若不符合，則先修正壓力及速度，而後再代入判斷，一直修正到符合容許誤差為止。重覆上述之步驟，至定量流為止，才分析流況。此外，本文採用均勻晶格，且為了便於邊界條件之建立與計算下一時段之暫時速度，在所設定之計算網格之四周，圍繞一圈虛擬晶格(Phantom Cells)或稱為邊界晶格(Boundary cells)，如圖二所示。沿 x 軸之晶格尺寸設定為 δx ，而 y 軸為 δy ， $\delta x = \delta y = 0.05$ 公尺。沿 x 軸與 y 軸的晶格總倍數分別為112與60，且分別以變數IBAR與JBAR表示。另外，定義 $IMAX = IBAR + 2$ ， $JMAX = JBAR + 2$ 、 $IM1 = IMAX - 1$ 、 $JM1 = JMAX - 1$ 。



圖二 計算網格與虛擬晶格

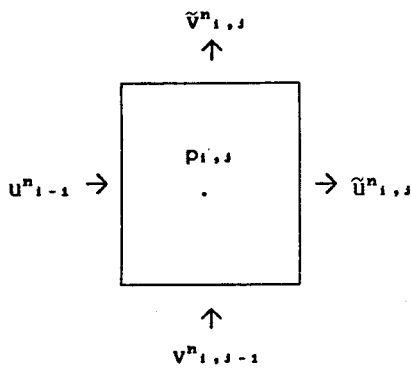
(一) 下一時段之暫時速度

如圖三所示之晶格 (i, j) ，其邊界上之暫時速度 \tilde{u}_{ij}^{n+1} 與 \tilde{v}_{ij}^{n+1} ，可分別由式(1)及(2)之差分式求得，即

$$\tilde{u}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \delta t \{-FUX^n - FUY^n + VISX^n + g_x + [(p/\rho)_{i,j}^n - (p/\rho)_{i+1,j}^n] / \delta x\} \quad (9)$$

$$\tilde{v}_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \delta t \{-FUX^n - FUY^n + VISX^n + g_y + [(p/\rho)_{i,j}^n - (p/\rho)_{i,j+1}^n] / \delta y\} \quad (10)$$

式中右上註腳 n 與 $n+1$ 分別代表時段 (Current time step) 與下時段；右下註腳 i 與 j 分別代表晶格之位置指標，前者代表沿 x 軸，而後者為沿 y 軸； δt ($=0.01$ 秒) 為兩時段之時段間距；下方“-”代表暫時速度。上述各項差分式之詳式可參閱文獻[6]。對流加速度 (Convective acceleration) 之差分式分別以 FUX^n 、 FUY^n 、 FVX^n 及 FVY^n 四項表示，式中均包含一個上游權重參數 (Upstream weighting parameter) α 。若差分式應用中央差分法，則 $\alpha = 0$ ；若應用上風差分法 (Upstream Differencing)，則 α 改以1計。介於這兩種特殊情況之值，即表示上、下兩速度之差分以 $(1+\alpha)/2$ 及 $(1-\alpha)/2$ 之比例分配。黏滯剪力項是以 $VISX^n$ 及 $VISY^n$ 兩項來表示。為了避免黏滯剪力項中之黏滯係數所造成之數值不穩定，本研究採用Golafshani所用之微分式，且應用中央差分，黏滯剪力項之詳細差分式可參閱文獻[6]。暫時速度之計算範圍為圖二所示之計算網格，但是最外圍晶格之暫時速度必須引用虛擬晶格之速度。



圖三 晶格(i,j)

(二) 邊界條件

數值模擬所需之邊界條件包括左邊入流邊界、渠底邊界、右邊連續出流邊界、自由面邊界及障礙邊界五種。自由面所位於之晶格，稱之為表面晶格 (Surface cells)；充滿水之晶格稱之為充斥晶格 (Full cells)；而沒有水之晶格，則稱之為空晶格 (Empty cells)。非滑動邊界條件必須配合虛擬晶格之速度。

1. 左邊入流邊界

左邊界條件展示於左邊虛擬晶格上，其速度為 $u_{i,j}$ ， $j=2$ 至 $JM1$ 。若左邊界為均勻流，速度為 U_1 ，則 $u_{i,j}=U_1$ 。在已知之固定總水頭 H_0 下，該處之自由面高度 H_1 須符 $U_1 = [2g(H_0 - H_1)]$ 。故 U_1 與 H_1 將會一再地修正，並不是輸入之定值，但 H_0 為輸入之定值。

2. 渠底邊界

渠底邊界條件必須配合下面之虛擬晶格，其上只有法線速度，及為式(4)之垂直速度 v 。所以 $v_{1,i}=0$ ， $i=2$ 至 $IM1$ 。但該列虛擬晶格並無切線速度，無法滿足式(5)之條件。因此，非滑動條件改以 $U_{1,i} = -U_{1,2}$ ， $i=2$ 至 $IM1$ 計。

3. 右邊連續出流邊界

右邊虛擬晶格 ($i=IMAX$) 之速度必須等於其左側 ($i=IM1$) 之速度，以符合式(6)及(7)之條件。故 $U_{imax,j}=U_{im1,j}$ ， $V_{imax,j}=V_{im1,j}$ ， $j=2$ 至 $JM1$ 。

4. 自由面邊界

表面晶格與空晶格間之速度還需予以調整，以符合連續方程式與切應力為零等兩條件，前者用以調整垂直速度 v ，而後者則為調整水平速度 u 。首先是調整表面晶格的垂直速度，但這視其右是否為空晶格。如果右邊不為空晶格，就可直接由連續方程式計算介於表面晶格與空晶格間的垂直速度 v 。相反地，若右邊為空晶格，首先需以其上或下方晶格的水平速度做為表面晶格的水平速度，而後才調整表面晶格的水平速度 u 。這一個步驟執行完畢，然後才能調整位於表面晶格上方或下方之空晶格的水平速度 u ，即以表面晶格的水平速度做為空晶格的水平速度。

5. 障礙邊界

障礙邊界 (銳緣堰) 亦為固體邊界，其邊界條

件可仿渠底邊界的方式處理之；沿邊界只有法線速度 u ，所以 $u_{iwr,j}=0$ ， $j=1$ 至 jwr 。但該處邊界晶格並無切線速度 v ，因此，非滑動條件改以 $v_{iwr,j}=-v_{iwr-1,j}$ 計。上述中，右下註腳 iwr 表示 x 障礙物在 x 方向的晶格指標；而 jwr 表示障礙物在 y 方向之最高晶格指標。

(三) 迭代與修正

由式(9)及(10)求得之暫時速度，須再經迭代與修正以求得下時段之真正速度，下時段之真正壓力也經同樣方式求得。參閱式(9)與(10)下時段之暫時速度 $\tilde{u}_{i,j}^{n+1}$ 與 $\tilde{v}_{i,j}^{n+1}$ 並不見得能滿足式(3)之連續方程式，其殘餘價定義為發散量 (Dilatation) D 。除非發散量小於容許誤差 ϵ ，否則下時段之暫時速度與暫時壓力必須一再修正與迭代，迭代以右上註腳 k 表示。 $k=0$ 時之發散量是由式(9)與(10)之暫時速度代入式(3)求得的，而後之發散量是根據修正後之暫時速度求得，即

$$D^{k+1} = \left(\frac{\tilde{u}_{i,j}^{n+1} - \tilde{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\delta x} + \frac{\tilde{v}_{i,j}^{n+1} - \tilde{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\delta y} \right)^k \quad (11)$$

而此時段之對應壓力變化為

$$[(\delta p/\rho)_{i,j}^{n+1}]^{k+1} = -\beta D^{k+1} \quad (12)$$

參數 β 為幾何因素與流動無關，定義為

$$\beta = - \frac{\omega}{\delta t \left[\frac{r_{i+1,j} + r_{i-1,j}}{(\delta x)^2} + \frac{r_{i,j+1} + r_{i,j-1}}{(\delta y)^2} \right]} \quad (13)$$

式中， r 為晶格邊界條件參數 (Cell boundary condition parameters)； ω 為壓力迭代鬆弛因子 (Relaxation Factor)。

一般之MAC方法只於充斥晶格才採用上述修正，但所模擬之下自由面 (水舌) 相當不合事實。如眾所周知，堰頂後之下自由面是先因離心力之因素而上升，而後再因重力因素又下降。若下表面晶格採用傳統方法予以修正，則下自由面自堰頂後只呈現下降之變化，根本無上升之趨勢[7]。所以本研究將下表面晶格改以式(11)、(12)與(13)之方式予以修正，而不採用傳統方式。但上表面晶格之修正仍

然延用傳統方式，採用線性內插之方法求得相關的變數，以避免數值之發散。由此，得知上表面晶格之壓力改變量為

$$(\delta p_{i,j}^{n+1}) = (1 - \eta)(p_{i,j-1}^{n+1}) + \eta p_{st} - p_{i,j}^{n+1} \quad (14)$$

式中

$$\eta = \frac{\delta y}{HT_i^{n+1} - YJ_{jt-1}}$$

式中， HT_i 表示上自由面高度；右下註腳 $jt-1$ 表示位於上表面晶格下方之晶格，而 YJ_{jt-1} 表示晶格中心到渠底之高度； p_{st} 表示作用於上自由面的壓力，依上自由面之動力性條件，其值設為零。

對所有晶格而言，任何壓力變化均會改變四周之速度。若同時考慮修正參數 C_x 及 C_y ，則由晶格之壓力變化，新的暫時速度變為

$$(\tilde{u}_{i,j}^{n+1})^{k+1} = (\tilde{u}_{i,j}^{n+1})^k + C_x \delta t \frac{[(\delta p/\rho)_{i,j}^{n+1}]^{k+1}}{\delta x} r_{i+1,j} \quad (15)$$

$$(\tilde{u}_{i-1,j}^{n+1})^{k+1} = (\tilde{u}_{i-1,j}^{n+1})^k + C_x \delta t \frac{[(\delta p/\rho)_{i,j}^{n+1}]^{k+1}}{\delta x} r_{i-1,j} \quad (16)$$

$$(\tilde{v}_{i,j}^{n+1})^{k+1} = (\tilde{v}_{i,j}^{n+1})^k + C_y \delta t \frac{[(\delta p/\rho)_{i,j}^{n+1}]^{k+1}}{\delta y} r_{i,j+1} \quad (17)$$

$$(\tilde{v}_{i,j-1}^{n+1})^{k+1} = (\tilde{v}_{i,j-1}^{n+1})^k + C_y \delta t \frac{[(\delta p/\rho)_{i,j}^{n+1}]^{k+1}}{\delta y} r_{i,j-1} \quad (18)$$

而新的暫時壓力則

$$[(p/\rho)_{i,j}^{n+1}]^{k+1} = -\beta D^{k+1} + [(p/\rho)_{i,j}^{n+1}]^k \quad (19)$$

修正與迭代一再重覆，直到發散量小於容許誤差，則該階段迭代速度與壓力就成為下時段之真正速度與壓力。

(四) 下時段自由面

在修正與迭代完成後，利用下時段之真正壓力及真正速度，就可式(8)的差分式計算下時段之上自

由面 HT_i^{n+1} 與下自由面 HB_i^{n+1} 。式(8)的差分式為

$$HT_i^{n+1} = HT_i^n + \delta T \cdot Ft (u^{n+1}, v^{n+1}, HT^n) \quad (20)$$

$$HB_i^{n+1} = HB_i^n + \delta T \cdot Fb (u^{n+1}, v^{n+1}, HT^n) \quad (21)$$

式中，右下註腳*i*代表沿*x*軸的位置指標，函數*Ft*與*Fb*為差分項，其詳細差分式可參閱文獻[6]；這兩個函數均包含一上游權重參數 α ，其值視下時段的真正速度與真正壓力，及現時段的自由面高度而定。由於必須引用好幾個相關晶格，故函數*Ft*與*Fb*未特別註明右下註腳。

(五)數值之穩定性

在時段間距 δt 內，質點沿*x*與*y*軸之位移量分別為 $u \delta t$ 與 $v \delta t$ 。一般而言，MAC方法要求位移量不超過任一晶格之寬度，即

$$\delta t < \min \left\{ \left(\frac{\delta x}{u} \right)_{i,j}, \left(\frac{\delta y}{v} \right)_{i,j} \right\} \quad (22)$$

此外，依據Hirt所提供之數值經驗，上游權重參數 α 也須符合下列不等式[4]

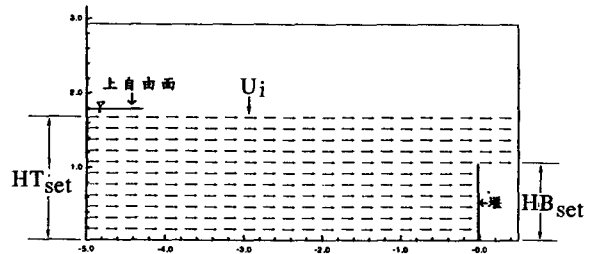
$$1 > \alpha > \max \left\{ \left| \frac{u \delta x}{\delta x} \right|_{i,j}, \left| \frac{u \delta t}{\delta y} \right|_{i,j} \right\} \quad (23)$$

參閱式(13)，鬆弛因子 ω 之值視流況為定量流或變量流而定。在處理變量流之問題時，若要求滿足連續方程式，一般令其值大於1但不超過2；但在處理定量流之問題時， H_{irt} 建議其值以不超過1為宜。另外，對於自由面坡度，則不能超過晶格尺寸 δx 及 δy 之比值。

四、結果與討論

本研究是應用數值方法，模擬水體流經銳緣堰之流況。且在不同之固定總水頭 H_0 、鬆弛因子 ω 、上游權重參數 α 、及修正參數 C_x 、 C_y 之情形下，討論數值結果並與前人理論分析及實驗結果比較。MAC方法是以變量流之觀點來處理定量流問題。因此，對整個流場需有適當之初始條件。本文之數值計算，晶格尺寸 δx 及 δy 均為0.05公尺，則式(22)顯示時段間距須小於0.02秒，所以本研究取時段間距 δt 為0.01秒。堰高設定為一米。以一般實驗需求而

言，最上游處距離堰之距離約為堰高之八到十倍；但由於本研究所考慮的晶格數目較多，計算較費時，所以只取五公尺。另外，堰後水舌之水平長度則視其後之自由面坡度而定。目前所採用的方法以不超過晶格尺寸 δx 及 δy 之比值為宜。故依據目前的數值設計，堰後長度只能取六十公分。初始情況的上自由面為水平，其深度即為初始水位 HT_{set} ；而下自由面以堰的位置為分界點，堰前的下自由面始終保持為零，但堰後的下自由面仍然是水平，且與堰頂齊平。如圖四所示。在上述為水所充斥的範圍內，各晶格的初始速度都相同，只有已知的水平速度 U_i ；同時其內的壓力亦假設為靜水壓分佈。根據上述的初始水位 HT_{set} 與初始速度 U_i ，就可求得對應的總水頭 H_0 ，即 $H_0 = HT_{set} + U_i^2 / 2g$ 。在而後的模擬過程中，只有總水頭 H_0 不隨時間改變，初始水位與初始速度就不再具有任何意義了。然而，計算網路的最左行晶格，始終維持與其內側晶格在同一水位高度，即 $HT(1) = HT(2)$ 。其次，以變量流來模擬定量流的觀點而言，就希望在經過一段足夠長的時間後，最左邊兩行晶格的水位高度保持不再隨著時間修正，而成為一個定值。可是一旦接近定量流，數值計算的結果都顯示這個定值均落在初始水位 HT_{set} 的附近，但不等於初始水位 HT_{set} 。總之，達到了定量流時，最左行晶格的水位高度 $HT(1)$ 及其行的速度都是經過一再修正的定值，它們往往不是個簡潔數字，不適宜做為而後分類探討的依據。因此，而後分類探討的依據仍然以初始水位 HT_{set} 與初始速度 U_i 為依據。



圖四 初始速度 U_i 分佈之假設

參閱圖四，堰只佔一行晶格，其寬B為0.05公尺。以寬頂堰的觀點而言， $H_1/B > 1.5$ ， H_1 代表遠離堰之上游水位，自堰頂起算，相當於本文的 $HT(1) - W$ ，W代表堰高(=1公尺)。所以 H_1 必須高於1.075公尺。另一方面，以Rehbock的公式而言，即

$$Cd = 0.611 + 0.08 \frac{H_1 - W}{W} \quad (24)$$

其流量係數 C_d 之適用範圍為 $(H_1 - W)/W \leq 5.0$ ，故 H_1 可高達六公尺。可是由於本研究的晶格數目較多，且計算較費時。同時，如上段所述，趨近定量流時，上游水位值均落在初始水位 HT_{set} 的附近。因此，本文只採用三個不同的初始水位 $HT_{set} = 1.6$ ，1.8及2.0公尺；而初始速度也採用三個不同的速度 $u_1 = 1.4$ ，1.6與1.8公尺/秒。在上述的初始情況下，流況呈現為定量流時，上游福祿數(Froude number) Fr 大致介於0.1與0.3之間。本研究將問題時間(Problem time)的最大值TWFIN設定最大值為100秒，希望在100秒之範圍內能達到定量流。而在程式中，判斷是否已足夠趨近定量流之依據是考慮現時段與前時段間的相對差距，其項目包括速度、壓力及上、下兩自由面高度。當各個相對差距之值，同時都小於0.005，即代表已經達到定量流。實際上這一類的處理方式在趨近於定量流的過程中，相對差距是呈現振盪收斂，而不是單調收斂。所以，在判斷的依據內，必須再補以Root Mean Square值的判斷，其值定義為

$$RMS_{cnsc} = [(\sum_{cycle}^m (d_{cycle})^2)/m]^{1/2} \quad (25)$$

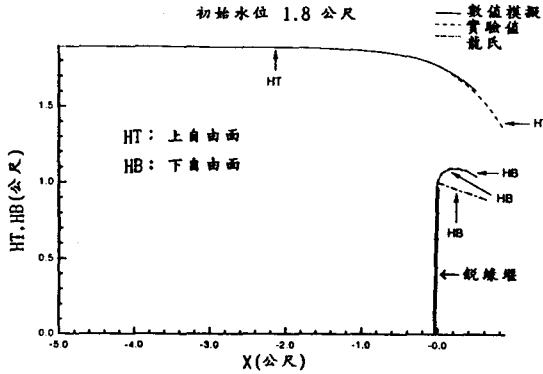
式中 d_{cycle} 代表相對差距，以所有晶格中的最大值計；右下註腳cycle代表第幾個時段間距；m代表總時段間距。一般而言，在剛開始的時段內，RMS值是呈現急劇振盪的變化；而後，RMS值就呈現單調收斂的現象。因此，只要各個相對差距已非常小，而且振盪也幾乎消失了，此時的流況就視定量流。若問題時間超過100秒，則表示所認定的初始水位 HT_{set} 、初始速度 U_i 、以及相關的參數值無法在100秒

內達到定量流，這是依據上述的條件而言。

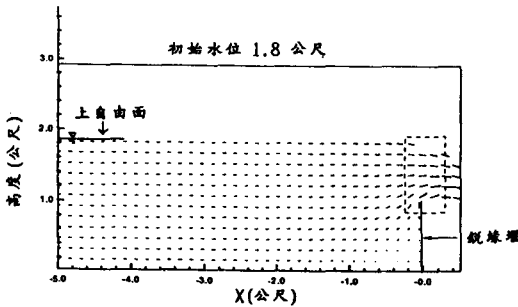
數值模擬的多項結果均可與前人的研究結果相比較。尤以上、下兩自由面高度更為本研究之比較重點，其資料來源取自美國陸軍兵工團設計溢洪道之經驗公式[8]並以此兩結果之間的差距最小者做為最佳的模擬結果，其他項目的比較不列入判斷，例如流量係數。而在後的討論中，上游權重參數 α 與鬆弛因子 ω 均以1計。

1. 上游初始水位 HT_{set} 為1.8公尺

在不同之初始速度 U_i 與修正參數下，數值計算結果顯示以 $U_1 = 1.6\text{m/sec}$ 、 $C_x = 1.0$ 及 $C_y = 1.4$ 之模擬結果較佳，其上、下兩自由面與前人結果之比較展示於圖五，此時上游福祿數為0.195。圖中之實線為應用數值所求得之自由面，而應用經驗公式所求得之自由面則以虛線表示，兩線的分佈相當吻合。以上自由面而言，在堰頂附近及其上游，本文之數值模擬與上述經驗公式的推測值完全重疊；只在堰頂下游略現分歧，同時其間的差距也往下游擴大，最大相對偏差為0.844%。差距的來源是來自數值技巧的適用條件。如前文所述，採用MAC方法並配合高度函數的數值模擬，其自由面坡度必須小於 δx 及 δy 之比值，本文採用均勻晶格， $\delta x = \delta y = 0.05$ 公尺，此比值等於 45° 。上自由面(虛線)的坡度約等於 35° 。易言之，為了比較保險起見，引用此模擬技巧，其自由面坡度恐怕不能高到 δx 及 δy 之比值。另外，針對下自由面，參閱實線與虛線的分佈，數值模擬與上述經驗公式的兩結果確實完全吻合。同時，下自由面的走向是先上升而後再下降，這一點是堰流特徵之一。以下自由面坡度而言，上升線段的坡度遠大於 δx 及 δy 的比值，而下降線段的坡度比上自由面坡度小。因為後者的關係，所以才導致兩結果之吻合。可是上升線段遠超過適用範圍，卻未顯示任何差距。這一點是相當有趣的，值得再深入探討。最後，圖五並列龍氏之模擬結果，以點虛線表示[7]。點虛線不但不合事實，而且與經驗公式的差距相當大。因為龍氏只對充斥晶格才引用式(11)與(12)的修正，即下表面晶格同上表面晶格一樣，都是採用線性內插計算壓力變化。



圖五 上、下自由水面線

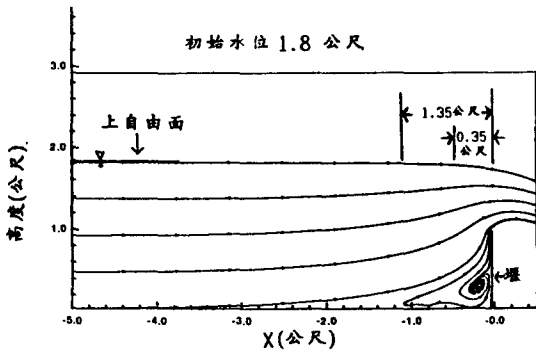


圖六 速度分佈

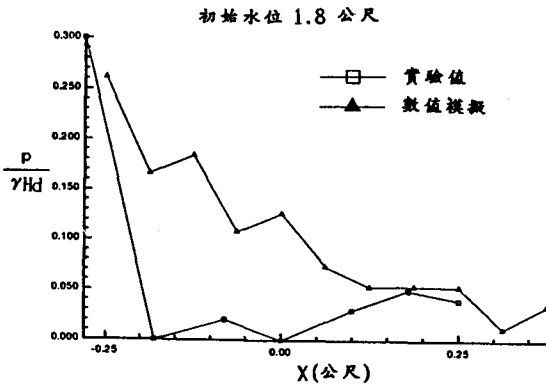
定量流時之速度分佈，則如圖六所示，在接近堰頂處之速度逐漸變快（如圖中框內箭頭長度較大者所示），流線示於圖七， L_e 代表漩渦長度。依常理判斷，由於黏度的影響，在堰底的角落上一定會形成漩渦。本研究所引用的數值方法也確實能顯示漩渦出現於渠底。一般而言，在明渠水力學上之流動模擬，常常需要借助於提高黏度係數，才能使模擬的流況更接近事實。這種現象在幾何因素沒有太明顯改變的情形尤為重要。然而，以目前所探討的堰流而言，就用不著提高黏度係數因數，同樣可模擬出相當接近事實的流況，因為幾何因素的變化太明顯了。其次，漩渦長度（或範圍）也可供比較。在此情形下，Rajaratnam由實驗測得漩渦長度約為

0.25公尺[9]。漩渦長度的末端相當肯定，通常採用堰的所在。但是，前端就非常不明顯，很難明確地標示出來。本研究比較兩相鄰之水平速度 u 。如果這兩個水平速度的流向相反，其位置就視為漩渦前端，則以其處到堰之距離做為漩渦長度 L_e ；經計算後，其值約為1.35公尺，這與上述的0.25公尺頗有差距。實際上，由於漩渦前端的位置極為不明確；再加上流線愈密表示速度變化愈大，流線愈疏速度變化愈小。因此，若採用較密集流線做為漩渦範圍，則漩渦長度大致減為0.35至0.40公尺左右。以一個「值」無法明確的現象而言，這樣的差距是相當難得的。

沿下自由面的壓力分佈示於圖八，本研究之模擬結果以三角符號表示，而以方形符號表示由溢洪道之經驗公式計算求得的結果，水舌最高點的位置設為 $x=0$ 。為了便於探討起見，兩結果的比較之探討以 $x=0$ 為分界點而分成左、右兩邊。右邊的吻合情形較佳，尤其是自 $x=0.15$ 公尺的下游。但是左邊，自水舌最高點上溯至堰間的差距卻相當大。實際上，下自由面的壓力應為大氣壓，即 $p/(\gamma Hd) = 0$ 。可是在實驗上，要直接測下自由面的壓力是相當不容易的，較能行得通的方法為測作用於溢洪道上的壓力，以此做為下自由面的壓力。這是由於溢洪道的曲面（縱向）形狀是依據水舌的下自由面而設計的。然而，實際情形並不然，部份的水還是會打在溢洪道上。因此，這才造成測得的壓力並不是全部都等於零，參閱方形符號的數據分佈。但是，不等於零的偏差並不太大， $p/(\gamma Hd)$ 的值大致都小於0.07。反觀數據模擬的壓力分佈，以三角符號表示，尤其是在堰的附近，圖八顯示其值都遠大於實驗結果。原因之一可能由於本研究在堰上的初始壓力設為靜水壓，而不是以大氣壓力計。此外，堰的幾何因素也造成這種偏差的因素之一。本研究也曾試以大氣壓做為水舌的初始壓力。但是這也額外帶來了另一個麻煩。此時，初始壓力以堰為分界線，堰之上游為靜水壓，而堰之下游（水舌）為大氣壓。這樣的安排因而導致了在堰之附近，初始壓力沿 x 方向急劇改變。所以自由面模擬得相當遠，甚至在堰的附近呈現數值發散的現象。



圖七 流線分佈

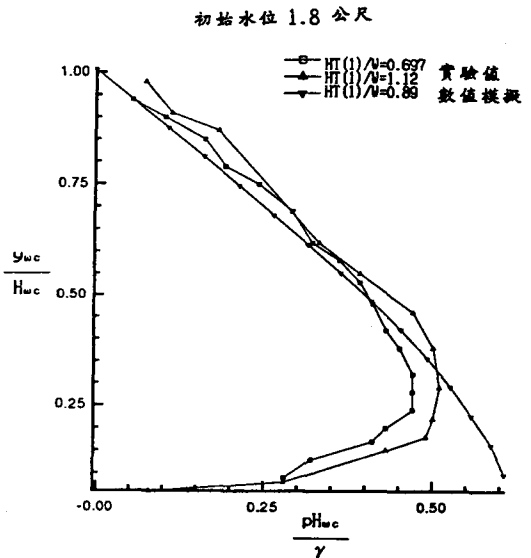


圖八 下自由面之壓力分佈

根據堰之上游水深 $H_1 - W$ 及堰高 W ，就可由式(24)計算流量係數，以 Cd_b 表示， H_1 可以在虛擬晶格的上自由面高度 $HT(1)$ 計。堰流的流量係數通常均採用式(24)，此式已廣泛被引用。另一方面，數值模擬也可根據流量係數的定義求得流量係數，以 Cd_c 表示，即 $Cd_c = 1.5q/(2g)^{1/2} / [HT(1) - W]^{1.5}$ ，式中 q 代表通過左邊界的單位寬度流量。單位寬度流量即為晶格的水平速度及其晶格尺寸 δ_y 的乘積之和。計算結果顯示流量係數的相對偏差 $[Cd_c - Cd_b]/Cd_b$ 等於6.38%。

圖一同時展示堰頂的垂直斷面 $Wc_1 - Wc_2$ 與水舌最高點的垂直斷面 $Nc_1 - Nc_2$ ，斷面深度分別為 H_{wc} 與 H_{nc} ；斷面各設一垂直座標，分別以 y_{wc}

與 y_{nc} 表示，座標軸原點分別設於堰頂與水舌最高點。沿堰頂的垂直斷面 $Wc_1 - Wc_2$ ，其壓力分佈與水平速度剖面分別展示於圖九與圖十。而沿水舌最高點的垂直斷面 $Nc_1 - Nc_2$ ，其壓力分佈與水平速度剖面分別展示於圖十一與圖十二。在這四張圖上，實驗數據均以空心符號表示，共有二組數據， $H_1/W = 0.697$ 與 1.12 ；而本文的模擬結果改以實心符號表示， $H_1/W = 0.89$ ，介於上述二值之間。座標軸均予以無因次化，深度尺度採用斷面深度，圖九與圖十採用 H_{wc} ，而圖十一與圖十二則採用 H_{nc} ；速度尺度採用 $[2gHT(1)]^{1/2}$ 。

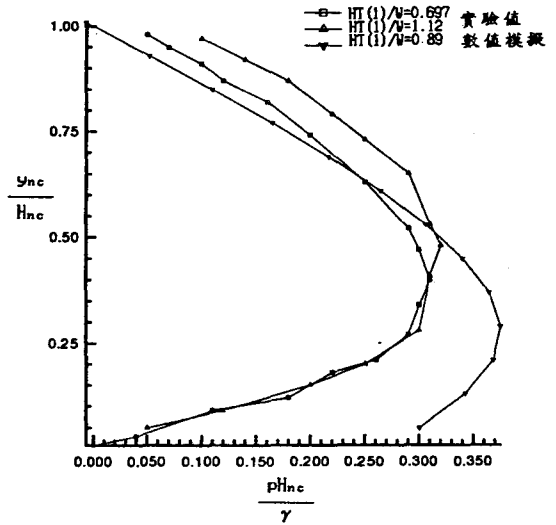


圖九 堰頂之壓力分佈

參閱圖九與圖十一，這二圖分別代表在堰頂與水舌最高點的壓力分佈。理論上，在這二斷面上的壓力均為大氣壓，即 $p/\gamma = 0$ 。可是由於流線是彎曲的，不是直的，因而形成離心力，最後導致非大氣壓的壓力分佈。但是無論水舌內部怎麼受離心力的影響，直接接觸空氣的自由面仍須為大氣壓。易言之，水舌的下自由面 ($y_{wc}/H_{wc} = y_{nc}/H_{nc} = 0$)

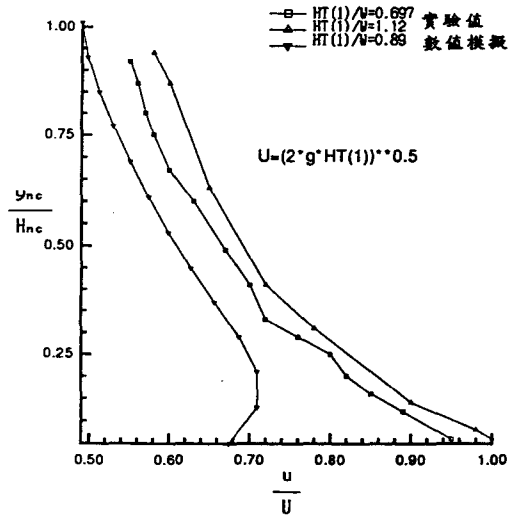
與上自由面 ($y_{wc}/H_{wc}=y_{nc}/H_{nc}=1$) 的壓力必須等於零。實驗數據 (以空心符號表示) 充分地顯示這個特徵。但是, 模擬結果具有這種特徵只呈現於圖十一, 圖九卻不然。其實, 圖九的壓力分佈可分成上、下兩部份, 呈現相反傾向是下部份, y_{nc}/H_{nc} 的值大約介於0與0.3之間, 原因如下。本研究所設置的堰 (相當於固體障礙晶格) 只佔一行晶格, 堰頂之上為一表面晶格, 而不是一個空晶格。所以數值模擬的壓力分佈 (參閱 y_{wc}/H_{wc} 值介於0至0.3的空心點) 自然偏離實驗數據, 而且壓力不趨近於零反而傾向靜水壓分佈。只要設置的堰佔二行以上的晶格, 就可消除這種相反傾向的壓力分佈。這一點也充分地顯示於圖九與圖十一之間的差異。圖十一為水舌最高點處的壓力分佈, 下表面晶格之下為一空晶格。因此, 在下自由面的附近, 數值模擬與實驗數據都能展示相同且合理的傾向。總之, 由於本文所設置的堰只佔一行晶格, 因而造成部份不合理的壓力分佈。但其餘的壓力分佈還是相當正確的, 至少以分佈傾向而言。其次, 以量而言, 數值模擬的壓力均比實驗數據的小。

初始水位 1.8 公尺



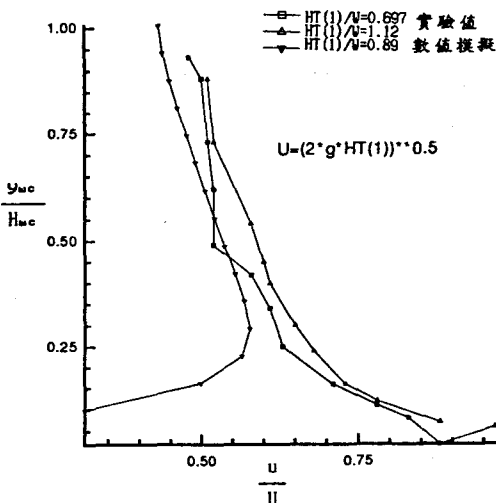
圖十一 水舌最高點之壓力分佈

初始水位 1.8 公尺



圖十二 水舌最高點之速度剖面

初始水位 1.8 公尺



圖十 堰頂之速度剖面

圖十與圖十二分別為堰頂與水舌最高點的水平速度剖面。由於前段所述的原因, 本研究設置的堰只佔一行晶格, 因此導致在下自由面的壓力分佈呈現不合理的趨勢。這種現象也同映於速度剖面。

參閱圖十，在下自由面之附近 (y_{wc}/H_{wc} 的值介於 0 至 0.3 間)，模擬結果 (實心符號) 與實驗數據 (空心符號) 的趨近適巧相反；趨近於下自由面，水平速度逐漸變小，而不是逐漸增大。當趨近於下自由面時，數值模擬的壓力是逐漸變大，根據柏努定理，壓力變大，速度跟著要變小。同樣地，遠離堰頂，這種相反的趨勢就會逐漸消失，參閱圖十與圖十二的差異。除了在下自由面的附近外，數值模擬與實驗數據所推測的水平速度剖面都具有相同的傾勢，但前者都小於後者。

2. 上游初始水位 HT_{set} 為 1.6 公尺

在不同之初始速度 U_i 與修正參數下，以 $U_i = 1.4 \text{ m/sec}$ 、 $C_x = 1.0$ 及 $C_y = 1.70$ 之模擬結果較佳。數值模擬之水面線很接近由經驗公式所得到之水面線，其上、下兩自由面之最大相對偏差分別為 0.55 9% 及 0.888%。漩渦長度約為 1.20 公尺，而 Rajaratnam 在實驗中量測之漩渦長度為 0.2 公尺。下自由面之壓力分佈也同樣偏高。流量係數與式(24)間之相對偏差降為 1.82%。至於在堰頂及水舌最高點等兩斷面上的壓力分佈及水平速度剖面，數值模擬結果略比上節的結果接近實驗數據，其餘的特徵與現象都仍然保持。定量流的上游福祿數 Fr_1 為 0.1577。

3. 上游初始水位 HT_{set} 為 2.0 公尺

在這初始水位時， $U_i = 1.6 \text{ m/sec}$ 、 $C_x = 1.0$ 及 $C_y = 1.4$ 的模擬結果較佳；定量流的上游福祿數 Fr_1 為 0.231。上、下兩自由面之最大相對偏差值分別為 0.599% 及 2.045%；下自由面之最大相對偏差比初始水位為 1.6 公尺及 1.8 公尺時大。而漩渦長度約為 1.4 5 公尺，亦大於對應的實驗值 0.40 公尺。流量係數與式(24)間之相對偏差值為 6.38%。其餘的，均類似上述兩種初始水位。

總而言之，以上述三種初始水位 HT_{set} 而言，本文所探討的堰流，其上流福祿數 Fr_1 大致介於 0.1 與 0.3 之間。針對每一種初始水位，計算結果顯示最

佳模擬均有一個對應的初始速度 U_i 與二個對應的修正參數 C_x 與 C_y 。此地所謂的最佳模擬只判斷自由面的相對標準誤差 (或相對差距，若只有一個數據)，其他項目，諸如流量係數、壓力分佈及速度剖面，均不列入判斷。自由面的相對標準偏差為最小時的初始速度與修正參數即為上述所指的對應值。以最佳模擬而言，不同的初始水位大概都能使自由面的相對標準偏差維持在百分之一左右。如果初始速度與修正參數不為上述所指的對應值，即不為最佳模擬，自由面的相對標準誤差大約提高至百分之三。最佳模擬只針對自由面的相對標準誤差為最小，其他項目並不一定。一般而言，不論是最佳模擬與否，流量係數的相對差距大約介於 0.01 至 0.10 之間。其次，以壓力分佈及速度剖面而言，目前只有零星的前人結果，故未作進一步比較以得類似上述的結論。

五、結 論

如式(9)與(10)所示，以 MAC 方法配合高度函數來處理二維堰流，則必須採用變量流方式，讓時間一直遞增，直到相對差距 (Relative consecutive deviation) 小於容許值，同時其差距之振盪現象也須幾近消失。其實，使用 MAC 方法來處理任何定量流問題均須採用這種方式。

數值模擬與前人研究的兩結果可相互印證，其項目計有上自由面、下自由面、流量係數 C_d 、壓力分佈與速度剖面。影響模擬結果的因子甚多，例如上游福祿數 Fr_1 、上游權重參數 α 、鬆弛因子 ω 及修正參數 C_x 與 C_y 。本文無法一一分析與討論，只針對 Fr 、 C_x 與 C_y 的影響，但 α 與 ω 均以 1 計。以 Fr 介於 0.1 與 0.3 之間的堰流而言，以上與下兩自由面的模擬結果最接近前人結果，其相對標準偏差大約均在百分之三以下，甚至有些情形小於百分之一。但流量係數的相對偏差較大，且其幅度也較大，大

約在百分之二至十，多數情況大致在百分之七左右。其次，壓力分佈與速度剖面只做零星的比較，無法廣泛的比較。以這兩項而言，除了緊接堰頂的附近呈現相反的變化傾向外，其他大部份的地方都展示相同的變化趨勢；但是「量」之差還是相當明顯。原因之一為本文只安排堰佔一行晶格，堰頂壓力也就決定於初始壓力。水舌的初始壓力又須設為靜水壓分佈，故堰頂壓力無法趨近於大氣壓。若水舌的初始壓力改為大氣壓，這又會造成上自由面急劇振盪的現象，甚至最後導致數值發散。數值模擬結果也同時顯示，若堰改佔兩行以上的晶格，上述的相反變化傾向就可完全避免。

傳統的MAC方法只有充斥晶格的速度才使用連續方程式予以修正，表面晶格係以線性內插法處理。二維堰流的表面晶格包含上表面晶格與下表面晶格。若這兩表面晶格都延用傳統方法，則水舌之下自由面只呈現下降的變化，並不是先上升而後再下降。這種變化是非常不合乎事實。然而，若下表面晶格的速度也改用連續方程式予以修正，則下自由面的剖面（Profile）就轉變為相當合乎事實即先上升而後再下降。

六、誌 謝

本研究承蒙國科會NSC 81-0410-E-032-517 計畫之經費補助下方得以完成，謹誌謝意。

參考文獻

1. J.E. Welch, F.H. Harlow, J.P. Shannon, and B.J. Daly, "The MAC Method: A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid Flow Problems Involving Free Surface." Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3425(March 1966)。
2. F.M. Harlow, and J.E. Welch, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible

Flow of Fluid with Free Surface." The Physics of Fluids., Vol. 8, 2182 (1965)。

3. James W. Daily, and Donald R. F. Harleman, Fluid Dynamics (1973)。
4. C.W. Hirt, B.D. Nichol, and N.C. Romero, "SOLA - A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows." Los Alamos Scientific Laboratory Report La-5852 (April 1975)。
5. Bernard Le Maut, An Introduction to Hydrodynamics And Water Waves (1976)。
6. 蘇文福，「應用MAC法於銳緣堰之數值模擬」，私立淡江大學碩士論文，1993。
7. 龍學之，「二維銳緣堰流之數值模擬」，私立淡江大學碩士論文，1989。
8. "Hydraulic Design Guide." Corps of Engineers。
9. N. Rajaratnam, and D. Muralidhar, "Pressure and Velocity Distribution for Sharp-Crested Weirs." Journal of Hydraulic Research. Vol. 9, No. 2, 241 (1971)。

收稿日期：民國82年7月15日

接受日期：民國82年8月20日