特 論

工程規劃、設計與管理中優選方法的應用*

水庫容量規劃與施工時程管理之優選模式及其解法

Applications of Optimization in Engineering — Network Models and Cut Algorithms for Reservoir Capacity Planning and Project Time/Cost Trade-off

國立臺灣大學農業工程學研究所教授

劉 佳 明

Chia -Ming Liu

黃理事長、各位貴賓、各位理監事、蔡秘書長以及各位農工界的先進與同仁：

在水利先賢一向重視長遠計畫的優良傳統下，農業工程界早已了解到工程師的任務不只在於一些新建工程系統中個別構造物的設計與施工，應該還有其他同樣重要但是沒有受到應有重視的工作，包括細部設計之前所必須先進行的系統的整體規劃，以及工程完工之後所應該採取的系統的整體管理。這種「系統整體」的觀點就是現代工程的觀點，現代工程對規劃、設計與管理的觀點已經漸漸從細部的轉爲系統的，而這個觀點之所以能採行，是因爲人類對於各類工程的實際問題已經累積了相當的經驗，而且分析系統的硬體與軟體工具—電子計算機與優選方法等也已經發展到了方便使用的地步。當然距離理想可能還是很遠，或者可以更肯定的說，人類對複雜系統的了解只能一步一步的趨近，因爲實際系統的複雜程度與它的許多不確定的因素可能讓人對它永遠無法完全了解與掌握。雖然如此，在大型的工程問題上應用系統分析的方法因而使成本減少約三分之一的例子不算少見[11]。一個數億、數拾億甚至數百億元的工程，因此所得到的效益是非常可觀的。

優選方法在農工問題中已經有許多應用，如渠道、水箱與畜舍等構造物尺寸的設計、砂石粒料的配比、挖填土方的規劃、農畜場規劃、灌溉排水規劃、區域水量水質規劃、水庫的容量、出水量與操作程序規劃、畜舍環境控制、設備更新計畫以及施工計畫與管理等。目前的這些應用比較偏重規劃與管理，將來普及之後在各種設計問題上也應該會有廣泛的應用。優選方法很多，大致可歸納爲線性規劃、網路規劃、非線性規劃、動態規劃、最適控制與決策分析等多類，其中前二者最常用於龐大系統的分析，尤其是網路規劃。這個方法在最近的幾十年來一直都是先進國家農、工、商等各業與政府及教育等單位規劃大型系統的基本工具[12-17]，一九七五年的諾貝爾經濟獎得獎人就是最早利用網路規劃探討資源分配優選問題的二位先驅（Leonid Kantarovich與Tjalling C. Koopmans）。大型規劃問題絕大多數都有相當大的網路成分，網路規劃因爲利用了網路的特性，所以演算所需時間與主記憶量都非常省，效率比一般線性規劃方法高出百倍以上。在美國就有一家廠商用它來整體規劃生產、配銷與庫存業務，頭三年因而節省一千八百萬美元，其後二年又節省約二千五百萬美元，由此可見網路規劃的優越效率與實用價值[14]。

前面特別強調網路規劃是因爲這一類模式應用廣泛而且演算效率優越[15-17]，也因爲以下所要考慮的規劃與管理二個模式都是網路問題，而且二者都是本人近年的研究成果，又都能以網路圖形很具體的呈現所要探討問題的內容與演算的步驟，這樣才有可能在短短的幾十分鐘內介紹二個優選模式與其解法。

＊本文爲中國農業工程學會一九九二年年會專題演講之講稿

大家都知道這個年會所在地—桃園地區有一座石門水庫，可是不一定知道這裡另外有750口池塘（石門與桃園水利會各有460口與290口），事實上是水庫與池塘所組成的一個系統，才使得本地區水資源得以充分調蓄運用，因而很少遭遇乾旱的災害，這是先民與前輩的智慧和努力的結晶。對這個地區的池塘容量與配水量問題我曾於一九七七年進行方法上的初步探討[3]。將來這個系統加上翡翠與坪林及其他可能興建的水庫勢必組成更大的系統，必須整體考慮，否則不能解決台灣北部地區的水資源問題。今天在這裡所要向各位前輩與同仁介紹的第一個優選模式[6,8,9]正是上述規劃問題的一個基本的優選模式，這實在是很有意義。為了節省時間，在此將完全利用比例圖而不用數學式說明一個水庫容量規劃模式與它的解法，透過這個方式對於優選方法如何解析一個系統問題的過程可得到一個粗略但是整體的概念。

另一個要介紹的模式則是計畫的時程／成本權衡問題（Project time/cost trade-off）[13]，這是常用的關鍵路徑法（Critical path method or CPM）的擴充。這個模式不只考慮工作時程的安排，而且進一步考慮趕工成本與時程的關係。

上述第一個模式的解法正好可以類推應用到第二個模式上。二個問題初看顯然不一樣，但是仔細比對會發現具有相同的網路結構，因此可以用相同的網路解法處理非常龐大的問題，計算所需的記憶量與時間通常只要一般線性規劃方法的數百甚至數千分之一，問題愈大相對效率愈高。此外，由於網路結構能以圖形顯示，因此比較沒有一般龐大複雜模式在數學表達上的一些障礙，參與者得以憑直覺當下進入問題的核心，了解模式的架構、掌握所代表現象的脈絡並且針對關鍵因素進行溝通。何況在難度上這二個模式也頗為適中，足以顯示優選方法的特點，的確是應用的範例，現在就開始說明水庫規劃與時程成本這二個模式與其網路切割解法。

一、水庫容量標的規劃問題

假設某地欲規劃一水庫，係以蓄洪、供水及貯水三類目標的供需做為考量的依據。已知各個時期庫址的進水量（假定具有週期性）及蓄洪、供水及貯水三種需求的標的值與最少值，如表1。需求的供應量在低於標的值時的差額稱為減供量或缺額，而有缺額時必需直接予以補償或以替代方案補足其缺額部分，其單位缺額成本及水庫單位容量（建造與營運等）固定成本如表2；至於供應量高於標的需求值時，其高出值稱為增供量或餘額，此部分並無額外收益。所求為能使總成本最小的規劃方案[6,8]。為應用方便乃將表1中標的與最少二種需求值對應項之差，即各該缺額之上限，列如表3。表2各項成本資料欠缺時亦可用概估之相對權重代替其值。

表1　進水量及標的與最少需求值資料

	時　期　t	1	2	3	4
	進 水 量　q_t	6	9	6	12
標的與最少	蓄洪容量 f_t , f_t	8,6	8,7	9,6	6,4
	供給水量 y_t , y_t	9,6	8,6	8,5	7,5
	貯留水量 l_t , l_t	3,3	5,4	4,3	6,3
	標的消減水量 *d_t	3	−1	2	−5

*$d_t = y_t - q_t$

表2　缺額成本及水庫固定成本資料

	時　期 t	1	2	3	4
單位成本	蓄洪容量 b_t	4	2	1	3
	供給水量 c_t	2	3	3	2
	貯留水量 a_t	1	2	2	1
	水庫單位容量固定成本 #c_o　5				

#c_o為在一周期中水庫每單位容量所分攤之建造與維護等固定成本

表3　各需求缺額上限資料

	時　期　t	1	2	3	4
缺額上限值	蓄洪容量 $\triangle f_t$	2	1	3	2
	供給水量 $\triangle y_t$	3	2	3	2
	貯留水量 $\triangle l_t$	0	1	1	3

二、資料與方案之比例圖與網路圖

表1及表2的規劃資料能以比例圖（圖0）表示，一些規劃方案則請見圖1至圖5，現在說明比例圖與網路圖的一些基本觀念[6,8]：

2.1 管線高度

在圖0（資料比例圖）中各管線高度（管線二端點之高差）分別表示表1中各需求標的值。上排與下排管線高度分別表示蓄洪與貯水標的需求值，這二排管線陰影部分的高度表示對應的最少需求值，中排鄰相節點間管線高度等於對應時期供水標的值與進水量之差，即為標的消減水量，至於對應之最少值則沒有表示在圖上。以上說明了資料圖（圖0），至於方案比例圖(圖1至圖5)，管線高度代表供應量，其數值列於管線旁。管線有缺額時以「－缺額」加註在管線高度數字旁，上下二排管線突出庫底或庫頂的部份即其缺額，中排管線則以截斷圖形表示有缺額。管線有餘額時，將管線延伸，以無寬度之虛線表示其餘額部份，並在虛線旁邊註明其餘額。

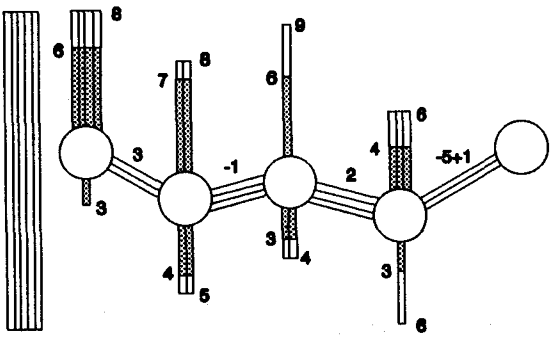

圖 0　資料比例圖

2.2 管線寬度

各圖中管線寬度表示表 2 中對應之單位缺額成本。上下二排管線寬度分別表示蓄洪容量與貯留水量的單位缺額成本，中排各時期節點間管線之水平寬度表示供給水量單位缺額成本。在比例圖中原可另繪一條管線由庫底直通庫頂，以表示水庫容量，其長度即為水庫容量，寬度則為水庫單位固定成本，但在各圖中均予以省略。

2.3 節點值（節點高度）

各方案圖中各節點圓圈內數值為各個時期節點值（St），表示各個時期期初水庫蓄水量。庫底與庫頂以水平線表示，但也可視為節點，庫底O之節點值一般均定為0，庫頂V之節點值為水庫容量，各方案之水庫容量值不同，見圖1至圖5。

2.4 方案比例圖

一幅比例圖或網路圖可以表示一個方案，只要水庫容量V與各時期蓄水量S 的值都確定，那麼各時期各需求的供應量也隨著確定，因此可以求得供需差額，進而決定這個方案水庫固定成本（建造與營運成本）與所有缺額成本累加的總成本，方案各有其總成本，規劃的目的在求總成本最小的方案。為措詞方便，本文中將管線二端高差均稱為高度，即使在管線不是鉛直時亦然。

2.5 方案網路圖

由以上說明可知比例圖可以表示水庫問題的已知資料與規劃方案，但是按比例繪圖並不是很方便，事實上用網路示意圖代替再加註數字也就夠了，如以圖6與圖7分別代替圖0與圖4。假定庫底與庫頂不隨時間改變，在比例圖中此二者各為一水平線，在網路圖中則可各視為一節點0與V。網路圖不

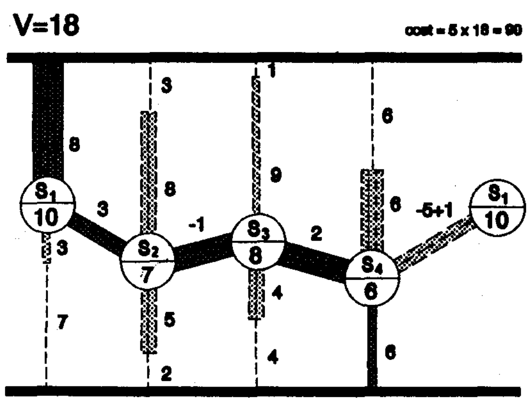

圖1　方案一（初始解）

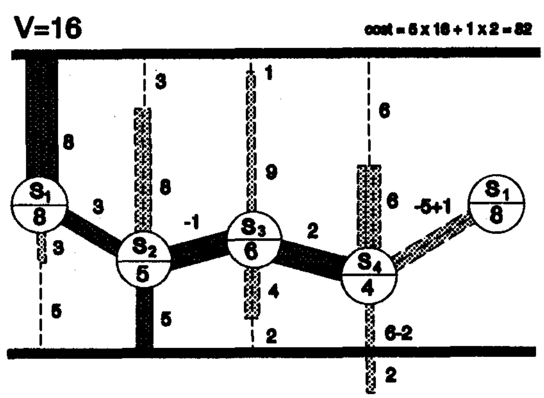

圖2　方案二

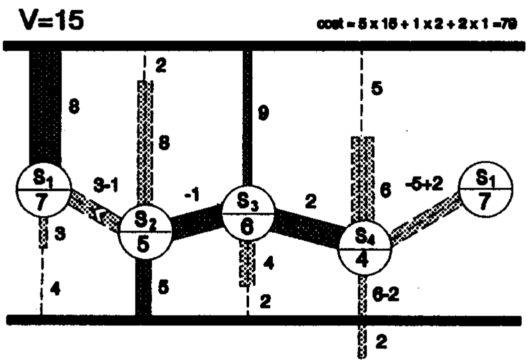

圖3　方案三

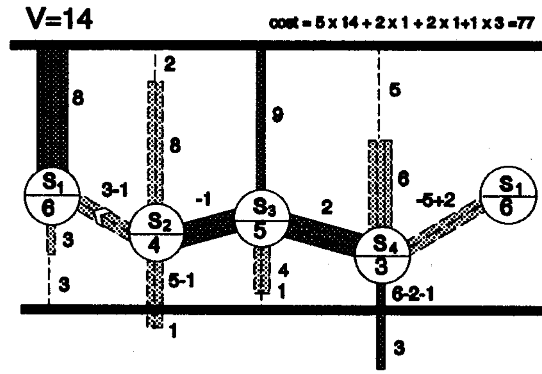

圖4　方案四

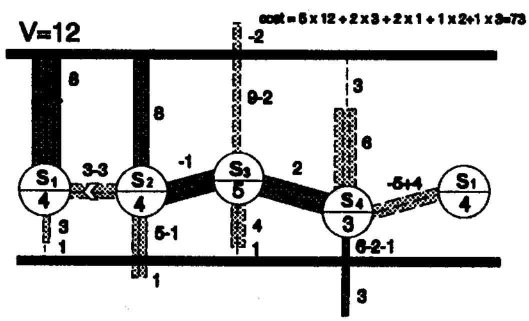

圖5　方案五（最佳解）

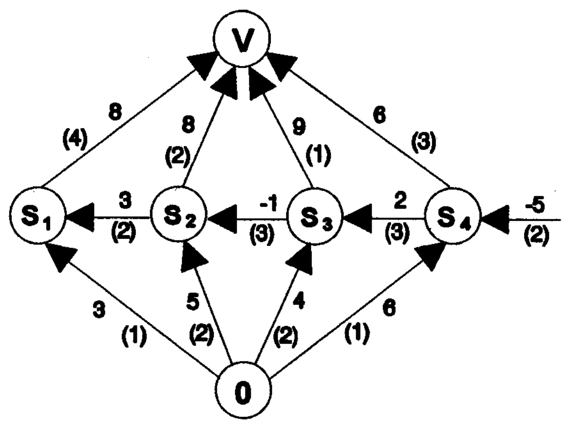

圖6　資料網路圖

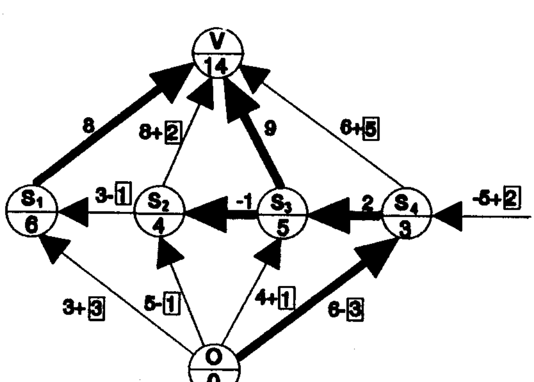

圖7　方案四供需網路圖

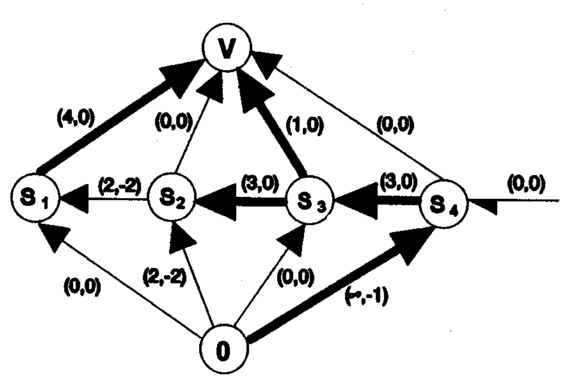

圖8　方案四成本網路圖

用實際比例長度或寬度來表示資料，而在對應線旁註明長度或寬度資料之數字，因此是一種示意圖。方案網路圖中每條管線的對應值有：（標的與最少）需求值、供應值與標的需求值之差額（缺額或餘額）與管線切割或嵌加之單位成本。爲了明確起見，可以將這些數值分別顯示在兩個網路圖上：一個稱爲供需圖（如圖7），其管線均標明標的需求值，其後以「＋」連接餘額，以「－」連接缺額，「□」內數字代表其缺餘額量；另一爲成本圖（如圖8），對應有兩個數值，前一數字表示在目前規劃方案下截短該標的1單位之成本，後一數字表示嵌加1單位之成本，因此與單位缺額成本不盡相同。在圖論[12, 13]中管線稱爲邊或弧（Edge or arc），節點稱爲點或頂點（Point or vertex）。

三、二個規劃方案

若以圖0中所有管線最低（第四時期）與最高處（第一時期）分別當作水庫的庫底與庫頂，則形成一個滿足所有需求的規劃方案（見圖1，方案一），其網路求法見參考文獻[4, 6]。若將庫底O蓄水量定爲0，則由比例圖各實管線可決定各時期蓄水量（節點值）。

$$S_4 = O + l_4 = 0+6=6$$
$$S_3 = S_4 + d_3 = 6+2=8$$
$$S_2 = S_3 + d_2 = 8+(-1)=7$$
$$S_1 = S_2 + d_1 = 7+3=10$$

這個方案的水庫容量爲

$$V_1 = S_1 + f_1 = 10+8=18$$

圖1中五個需求l_4，d_3，d_2，d_1，f_1的供應量等於標的需求量，乃以實管線表示。其他需求均有餘額則以虛管線表示。此方案各需求無缺額，所以固定成本即爲總成本：

$$Z_1 = 5\times 18=90$$

以上所列滿足所有標的需求的規劃方案（圖1，方案一）可以當作下節所要介紹的解法的初始解。以下另外介紹一個需求不是完全滿足的方案（圖4，方案四）。

3.1 節點值與水庫容量之決定

圖4中供應量等於標的或最少需求的實管線(f_1，f_3，d_2，d_3，l_4)構成一株張成樹。一般而言，張成樹是連接所有節點而又沒有任何迴路的管線的集合，屬於張成樹的管線稱爲枝子而其他的管線則稱爲弦，所有弦的集合稱爲餘樹（Cotree）[12]。一個圖可以有很多株張成樹，圖1至圖5中的實管線就是同一個圖的五株張成樹。今考慮方案四（圖4），由庫底O出發，沿著枝子可求得各時期節點值（蓄水量）與水庫容量：

$$l_4 : S_4 = O + l_4 = 0+3=3$$
$$d_3 : S_3 = S_4 + d_3 = 3+2=5$$
$$d_2 : S_2 = S_3 + d_2 = 5+(-1)=4$$
$$f_3 : V = S_3 + f_3 = 5+9=14$$
$$f_1 : f_1 = V - f_1 = 14-8=6$$

因此各時期蓄水量爲

$$(S_1, S_2, S_3, S_4) = (6, 4, 5, 3)$$

而此方案之水庫容量$V_4 = 14$

3.2 標的供應量

(1)蓄洪量＝容量－蓄水量

$$=14(1,1,1,1)-(6,4,5,3)$$
$$=(8,10,9,11)$$

(2)供水量＝期初蓄水量＋期間進水量－期末蓄水量

$$=(6,4,5,3)+(6,9,6,12)-(4,5,3,6)$$
$$=(8,8,8,9)$$

(3)貯水量＝蓄水量＝(6, 4, 5, 3)

以上所得各標的供應量可以歸納成表4。

3.3 標的供需差額

表4供應量與表1標的需求量的對應項的差值即爲表5所列缺餘額。

3.4 成本計算

根據表5中爲負的缺額項算得對應的缺額成本，加上水庫固定成本可得方案四之總成本：

$$Z_4 = 2\times1+2\times1+1\times3+5\times14=7+70=77$$

3.5 二方案之比較

表4　方案四各需求的供應量

時期		1	2	3	4
供應量	蓄洪	8	10	9	11
	供水	8	8	8	9
	貯水	6	4	5	3

表5　方案四各標的缺餘額

時期		1	2	3	4
缺餘額	蓄洪	1	+2	0	+5
	供水	−1	0	0	+2
	貯水	+3	−1	+1	−3

表6　二方案成本比較表

方案	水庫容量	缺額標的	固定成本	缺額成本	總成本
方案一	18	無	90	0	90
方案二	14	d_1, l_2, l_3	70	7	77

雖然方案四因爲不能滿足一些標的需求因此產生了7單位的缺額損失，但是水庫容量可以由18單位降至14單位，共減少了5×4＝20單位的固定成本，所以整體而言，方案四比方案一成本仍低了13單位。

四、網路切割解法

由以上兩方案的比較可知，適當的讓某些標的產生缺額可以降低水庫總成本。以下將以方案四（圖4）爲例，利用圖論[12]中樹與割集（Tree and cut set）以及線性規劃[10]的簡形法（Simplex method）等觀念，說明如何以逐步切割（減少部分需求）而降低總成本的方法，來改善方案求得最佳解[6,8]。

4.1　決定本方案所對應的基本切割集合

上節已說明張成樹連接了所有節點，如果把組成張成樹的任何一條枝子切斷，則所有的節點就會分成兩個集合：一是枝子前端所在之集合，以A表示；一是枝子後端所在的集合，以A'表示，也就是枝子的指向爲A'→A。例如在圖4中若切斷枝子f_1，則所有節點被分爲A'＝{S_1}與A＝{V, S_2, S_3, S_4, O}兩個集合。但連接A', A兩個集合的管線除了枝子外，還有一些弦（虛管線），這些弦要一併切斷，整個圖形才會眞正分成兩個獨立集合。枝子與這些連接兩組節點的弦稱爲切割集合或割集（Cut set or cut）。每條枝子均有其對應的割集，例如上面例子中，A'與A二個集合間尙有弦d_1（連接S_1，S_2），l_1（連接S_1，O），d_4（連接S_1，S_4），所以f_1的對應割集＝{f_1，d_1，l_1，d_4}，方案四各枝子所對應的割集見表9，因爲這是一株張成樹的枝子所對應的割集，所以稱爲一個基本割集，而一株張成樹的所有基本割集則稱爲一個基本割集組，一個網路圖的所有割集都能以一個基本割集組表示[12]，所以在考慮一個方案的可能變動時可以只考慮相應的基本割集組，而不必考慮其他割集。

各方案圖上都應該另有一條連接庫頂與庫底的弦線，其長度爲水庫容量，其單位切割成本爲水庫單位固定成本的負值，負值表示切割反而有利。這條管線有時需要特別處理，所以在這裡沒有把它表示出來，可是在決定割集時必須考慮，請讀者注意。

4.2　決定各割集的直接成本、機會成本及淨成本

其實從另一個角度來看，當枝子截短或嵌加時，只有在割集中的弦長度會受影響（可能縮短或增長），其他管線並不受影響。所以切割的直接成本是枝子本身截短或嵌加的成本，而對應的機會成本則是割集中弦的對應改變所產生的成本改變。在計算機會成本時必需根據枝子與弦的指向及目前缺餘額的情況而決定：

⑴割集中各弦因枝子嵌截所引起的對應改變

當枝子嵌加或截短時，割集中的弦究竟是嵌是截並不一定，這要看弦的指向。與枝子有相同指向的弦其爲嵌或截與枝子相同。與枝子指向相反的弦其嵌或截則與枝子正好相反，即枝嵌則弦截，枝截

則弦嵌。

⑵割集各管線截短或嵌加之成本

弦與枝子截短或嵌加所對應的成本變化可歸納如下表：

表7　割集各管線之單位切割成本

割集管線	枝	子		弦
	無缺餘額	缺額上限	有餘額	有缺額
截短	單位缺額成本	∞	0	單位缺額成本
嵌接	0	－單位缺額成本		－單位缺額成本

①供應量大於標的值（有餘額）時：

不論截短或嵌加成本皆爲零。

②供應量等於標的值（無缺餘額）時：

截短則有缺額成本；嵌加則成本爲零。

③供應量小於標的值（有缺額）但不爲零時：

截短有缺額成本；嵌加則有收益，其絕對值等於缺額成本值，因爲原先此段已有缺額，故增加供應量等於減少缺額。

④供應量等於零（缺額達上限）時：

截短之成本爲無限大；嵌加則有收益，其絕對值等於缺額成本。

以上爲割集管線的嵌或截及其對應成本考慮之原則，茲以圖4中枝子f_3 截短1單位爲例：

枝子二端對應集合爲A＝｛S_1，V｝與A'＝｛S_2，S_3，S_4，0｝，枝子f_3 對應割集＝｛f_3，f_4，d_4，l_1，d_1，f_2，V｝，其中f_4，f_2，l_1，d_1 的指向與f_3 的相同爲A'→A，所以均隨枝子f_3 截短而d_4 指向相反爲A→A'，所以反而嵌加。又僅d_1 有缺額，割集其他各弦則均有餘額。所以根據表7可知各弦切割成本，故機會成本爲

(Σ各弦之成本變化)＋水庫容積變化之成本

$=(0+0+2+0+0)+(-5)=-3$

又　直接成本＝f_3 單位缺額成本＝1

因此　淨成本＝直接成本＋機會成本

$=1+(-3)=-2$

4.3　選擇最有利的割集並決定其切割量

根據前述的方法，可分別求出各枝子對應割集的單位切割淨成本。如果所有割集的單位淨成本均爲正，表示切割不再有利，則此時已達最佳解。若尙有負值，取其絕對值最大者做爲切割對象，繼續演算。決定切割對象後便需考慮可切割量，割集中的枝子及弦各有其可變動的範圍，取其中最小者爲割集之切割量。割集中各管線可切割量（可變動量）決定的原則如下表：

表8　割集各管線之可變動量

管線情況	枝	子	弦	
	無缺餘額	缺額達上限	有餘額	有缺額
截短	缺額上限	0	餘額	目前供應量－最少供應量
嵌加	沒有限制	缺額上限	沒有限制	缺額

①枝子管線之實際供應量等於標的值（無缺額）時可變動量：

在截短時爲其缺額上限；在嵌加時沒有上限。

②枝子管線之實際供應量等於零（缺額達上限）時可變動量：

在截短時爲零；在嵌加時爲其缺額上限。

③弦線在缺餘額爲上下限（即退化）時與枝子之考慮相同，不退化時則可變動量：

截短時有餘額者爲其餘額；有缺額者爲目前供應量減少供應量。

嵌加時：有餘額者沒有限制；有缺額者爲其缺額。

以方案四(圖4)爲例，根據表8的原則，各枝子的單位切割淨成本如表9。因爲所有其他割集都能以表9基本割集表示，所以目前只考慮這一個割集組，而其中又以f_3所對應的割集單位切割淨成本－2最爲有利，因此採此集合作爲切割對象，根據表8的原則此割集中各管線的可切割量如表10。

表9　方案四各割集單位切割淨成本

基本割集			直接成本	機會成本		淨成本
枝	弦					
f_1	d_1, l_1, d_4		4	$-2+0+0$		2
f_3	f_4, d_4, l_1, d_1, f_2	V	1	$0+0+0+2+0$	-5	-2
d_2	l_2, d_1, f_2		3	$2-2+0$		3
d_3	f_4, d_4, l_3, l_2, l_1	V	3	$0+0+0+2+0$	-5	0
*l_4	l_1, l_2, l_3	V	-1	$0-2+0$	$+5$	2

*1　已達缺額上限，不能再截短只能嵌加。

表10　方案四最有利割集之可切割量

管線	f_3	f_4	d_4	l_1	d_1	f_2
變動方式	截短	截短	嵌加	截短	截短	截短
供應狀況	無缺餘額	有餘額	有餘額	有餘額	有缺額	有餘額
可切割量	3	5	∞	3	2	2

故定切割量$=\min\{3,5,\infty,3,2,2\}=2$，若再多切割則單位淨成本就會改變。

4.4 修正方案與決定新方案的成本

由選定的割集及切割量可從舊案得到新案（圖5），修正的原則如下：

(1)管線長度的修正：屬於割集的管線按照其變動方式修正。不屬於割集的管線則不受影響。

割集各管線都截短2單位，割集管線差額修正如表11：

表11　切割前後割集管線之缺餘額

管線		f_3	f_4	d_4	l_1	d_1	f_2
缺餘額	原案	0	5	2	2	-1	2
	新案	-2	3	4	1	-3	0

f_3由枝子轉變爲弦，d_1或f_2二選一由弦轉變爲枝子。

(2)節點值的修正

根據新張成樹可重定各節點的節點值（即各時期初的蓄水量)。上面的例子中新的張成樹由 $\{f_1, f_2, d_2, d_3, l_4\}$ 或 $\{f_1, d_1, d_2, l_3, l_4\}$ 所構成，若取前者，則d_1 可視為退化之弦，若取後者，則f_2 可視為退化之弦。但兩者定出之新節點值仍相同，今取前者得圖5，由庫底節點出發，沿該張成樹的各枝子可求得各節點值（蓄水量或水庫容量）。

l_4 ： $S_4 = 0 + l_4 = 0+3=3$

d_3 ： $S_3 = S_4 + d_3 = 3+2=5$

d_2 ： $S_2 = S_3 + d_2 = 5+(-1)=4$

f_2 ： $V = S_2 + f_2 = 4+8=12$

f_1 ： $S_1 = V - f_1 = 12-8=4$

因此新節點值 $\{S_1, S_2, S_3, S_4\} = \{4,4,5,3\}$

水庫容量＝12單位

(3)方案成本的修正

新案的總成本可以按照前一節所介紹累積缺額成本的方式計算，也可以根據舊案總成本及切割淨成本求得。以方案四為例，其總成本為77。因為單位切割淨成本為－2，切割量為2，所以方案五

新案總成本＝舊案總成本＋單位切割淨本×切割量

$=77+(-2)\times2=73$

4.5 最佳方案

由方案四比例圖切割可得一新方案比例圖如圖五（方案五），其各枝子的單位切割淨成本如表12所示：

表12 方案五枝子單位切割成本

基本割集			直接成本	機會成本		淨成本
枝	弦					
f_1	d , l , d		4	$-2+0+0$		2
f_2	f_3 , f_4 , d_4 , l_1 , d_1	V	2	$1+0+0+0+2$	-5	0
d_2	f_3 , f_4 , d_4 , l_1 , l_2	V	3	$1+0+0+0+2$	-5	1
d_3	f_4 , d_4 , l_1 , l_2 , l_3	V	3	$0+0+0+2+0$	-5	0
*l_4	l_1 , l_2 , l_3	V	-1	$0-2+0$	$+5$	2

*l_4 已達缺額上限，不能再截短只能嵌加。

上表中所有枝子切割淨成本均不小於0，所以切割無法再降低總成本，故此方案即為最佳之規劃方案。

五、案例演算過程與網路切割解法流程

上節所介紹的是網路切割解法決定割集與切割量的步驟，整個問題從初始方案一直到最佳方案五其改進過程經整理可得表13，水庫容量與成本之關係圖如圖9所示。解法的流程見圖10 [6]。

熟悉線性規劃者可能已經察覺到上述切割解法的流程與線性規劃簡單形體法（簡稱簡形法或單體法Simplex method）的相似處，的確，以上所介紹的切割法事實上可以說是簡形法在網路切割問題上的特殊化版本，所以可稱作網路切割簡形法。未接觸線性規劃簡形法者應該也可藉此了解簡形法的步驟。

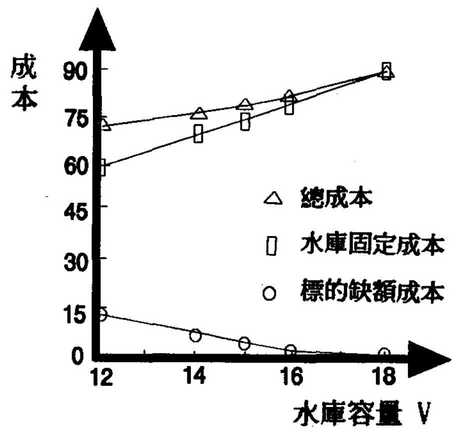

圖9 水庫容量與成本關係圖

表13　網路演算過程

項　目　　　方　案	1	2	3	4	5
(1)水庫容量（V）	18	16	15	14	12
(2)水庫固定成本	90	80	75	70	60
(3)標的缺額成本	0	2	4	7	13
(4)總成本＝(2)＋(3)	90	82	79	77	73
(5)切　割　枝　子	l_4	d_1	l_2	f_3	最佳解
(6)可　切　割　量	2	1	2	2	

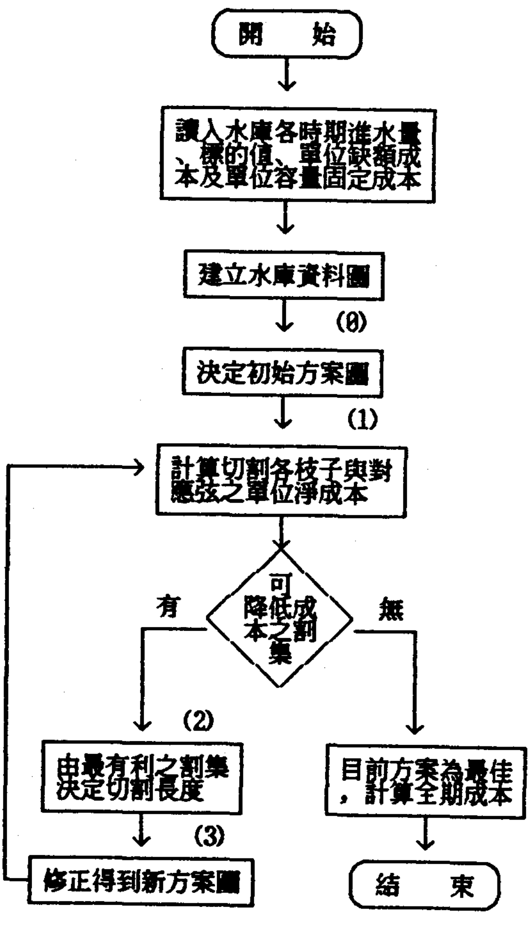

圖10　水庫容量問題解法流程圖

(0) 找初始張成樹

推求一個初始規劃方案，亦即選一株初始張成樹。

(1) 挑枝子切割

分別求各枝子與對應弦線切割一單位長度時之淨成本，若其中之最小者爲負，則選擇該方式切割以降低總成本，否則原案已是最佳解。

(2) 定切割長度

比較所選割集各管線之可切割量，取其最小者作爲切割長度。

(3) 得新張成樹

按照上述方式切割得到一株新張成樹，所切割的枝子成爲新弦線，可切割量最小的一個管線成爲新枝子，重回步驟(1)。

六、高效率的切割成本求法—網孔值法

前面所介紹割集淨成本的求法在處理大型問題時相當費時，其實另有二種效率極高的方法－網流法與網孔法。在此僅簡單介紹其中比較直接自然的網孔法，其基本觀念如下：

比例圖中管線間的區域稱爲網孔，與節點有節點值一樣，每一個網孔也有它的網孔值。任何枝子一端的節點值可由他端的節點值與枝子的長度求得，同理任何一條弦的兩側網孔值也有類似的關係：

右側網孔值＝左側網孔值＋弦管線寬

但是要注意若弦有餘額，則應採餘額部分的寬度而視之爲0。管線的左右是相對於管線的方向，網路圖各管線的方向均爲向上與向左，因此是順著該方向來分管線的左右。利用上列關係式可以由任一網孔開始，設其網孔值爲零，然後橫向跨越弦管線（並非枝子！）依次定出所有網孔的網孔值。以方案四（圖4）爲例，令l_1 左側網孔值爲0，按照上述網孔值的求法則：

l_1 右側網孔值

＝l_1 左側網孔值＋l_1 管線寬＝0＋0＝0

d_1 右側網孔值

＝d_1 左側網孔值＋d_1 管線寬＝0＋2＝2

其餘網孔值可以類推。因爲周期的關係，所以l_4 與f_4 右側網孔值分別等於l_1 與f_1 左側網孔值。圖4方案四所對應的網孔值如圖11所示。

網孔值的求法與節點值的求法可以對應，因爲管線的寬度隔開網孔就像管線的長度隔開節點，所以在求法上一個是橫過管線到另一網孔，一個是縱走管線到另一節點。而且張成樹的餘樹（Cotree，所有弦的集合）連接了所有網孔，正如張成樹（所有枝子的集合）連接了所有節點，因此從節點觀點轉向網孔觀點時，除了寬度與長度的角色互換，樹與餘樹與枝子（即弦線）的角色也互換。此外，割集與迴路的角色也互換，因爲將節點分成二部分的一個割集從網孔的觀點看來卻是一個迴路；反之連接節點的迴路（一個弦與一些枝子）將所有網孔切割成二部分，所以節點的迴路是網孔的割集，反之亦然。這些角色互換的幾何對偶性（Geometric dual）[12]必須是在平面形（Plane graph）中才會有，而水庫模式各標的管線組成的圖形是平面圖形，但是若將庫頂與庫底的連線也加入，就不是平面圖形了，所以這條表示水庫容量的管線必須特別處理。網孔及網孔值是本人根據上述平面圖形之幾何對偶圖形所倡用的新觀念，可以使得原來相當抽象的幾何對偶觀念，因爲不需另繪幾何對偶圖形而具體化，所以前面對偶觀念中角色互換的直觀說明才可能比較具體而且容易了解。

在利用本段初說明的方法跨越弦線決定所有網孔值後，可以根據上述「網孔迴路上的管線構成一個割集」的特性，以下式有系統的求得各枝子的單位切割成本：

枝子單位切割淨成本
＝枝管線寬＋（左網孔值－右網孔值）
＋水庫固定成本改變值

方案四各枝子所對應的單位切割淨成本可從圖11求得如表14，請對照表9。

表14　由網孔值求切割淨成本表

枝子	枝管線寬	左網孔值	右網孔值	水庫固定成本改變值	單位切割淨成本
f_1	4	0	＋2	0	2
f_3	1	2	0	－5	－2
d_2	3	2	＋2	0	3
d_3	3	2	0	－5	0
$*l_4$	－1	2	0	＋5	＋2

$*l_4$ 爲嵌加

當弦線長度等於標的值或等於最少值時（即退化弦，乃缺額或餘額等於上下限之弦），其嵌加或截去部分的管線寬度不同，而且嵌加成本通常爲負值，故寬度亦取負值，所以使用本節二式求網孔值與切割淨成本時必需注意寬度與符號。

七、計劃時程與趕工成本管理問題

假設有一個包含多項工作的工程，工作項目間彼此有先後的順序關係，有些工作可以趕工，但必須多付出成本，且已知各項工作的正常時間、工作所需的最短時間（簡稱最趕時間）、單位時間趕工成本（本工程因趕工而直接增加的成本）及單位時間間接成本（本工程直接的趕工成本以外公司的固定成本），如表15與圖12。試求使總成本最小的工作時程安排方案〔13, 18〕。

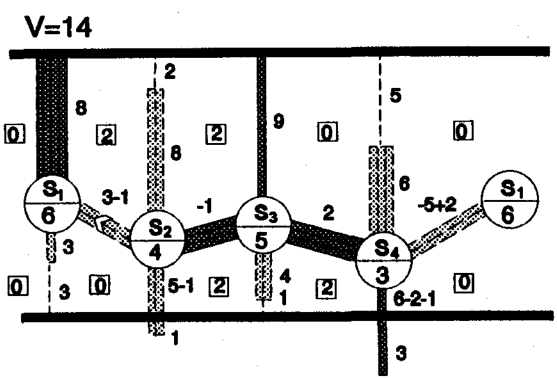

圖11　方案四對應之網孔值圖

這個問題每項工作可趕工的時間有一定的上限，爲正常時間與最趕時間之差，簡稱可趕時限。與水庫規劃問題對照，趕工時間相當於供應缺額，可趕時限相當於缺額上限（標的值與最少值之差），二問題各項目可以對照如表16。

仔細比對表16中二問題的對應項目，可見二者具有相同的結構，因此趕工問題也可以利用網路切割法來求解，整個問題演算過程中方案改進情形如圖13-17與表17所示。因爲這個案例的網路是平面圖形，所以切割成本的計算可以採用上節的網孔法。

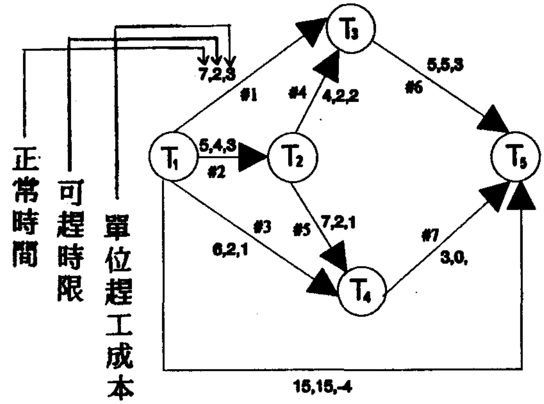

圖12　資料圖

表15　計畫時程成本資料表

工作編號	工作項目	正常時間	最趕時間	可趕時限	單位趕工成本
#1	1-3	7	5	2	3
#2	1-2	5	1	4	3
#3	1-4	6	4	2	1
#4	2-3	4	2	2	2
#5	2-4	7	5	2	1
#6	3-5	5	0	5	3
#7	4-5	3	3	0	∞
單位時間間接成本		4			

表16　時程與水庫二問題項目比較

項目	管	節	已知資料				變數項目		
問題	線	點	正常值	下限值	切割單位成本	割限	節點	終點	管線
趕工問題	工作	事項	正常時間	最趕時間	趕工單位時間成本	趕工時限	事項時間	完成時間	趕工時間
水庫問題	需求	容積	標的需求	最少需求	需求單位缺額成本	缺額上限	蓄水量	水庫容量	供應缺額

表17　案例計畫時程演算過程

方案	計畫時間	方案成本 間接	直接	總	割集 枝	弦	切割成本 直接	機會	淨	切割量
1	15	60	0	60	#5	#3, #6, #0	1	0+0−4	−3	1
2	14	56	1	57	#4	#1, #3, #4, #0	2	0+0+1−4	−1	1
3	13	52	4	56	#2	#1, #3, #0	3	0+0−4	−1	1
4	12	48	7	55	最佳解					

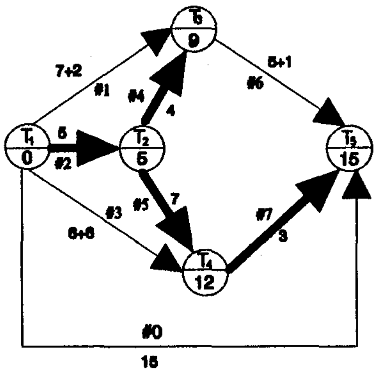

圖13　方案一（初始解）

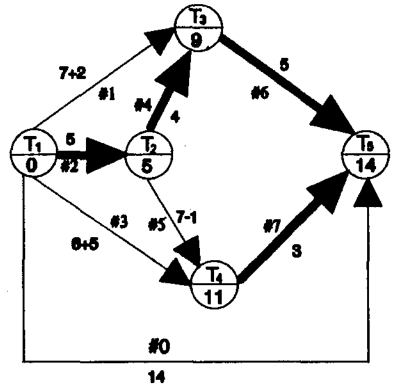

圖14　方案二

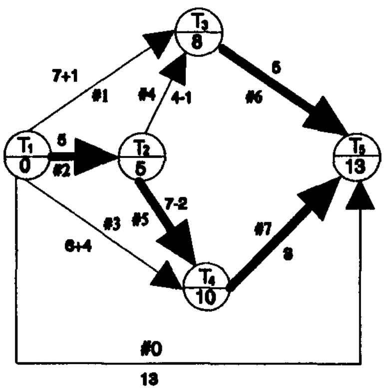

圖15　方案三

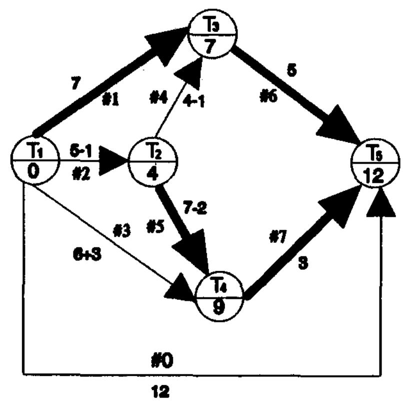

圖16　方案四（最佳解）

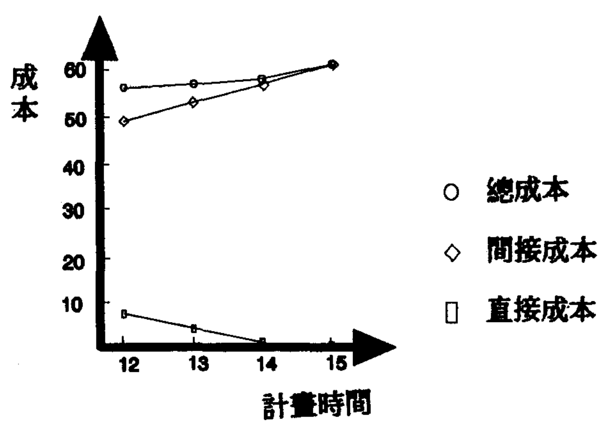

圖17　時程與成本關係圖

八、解法發展過程與網路對偶性

對於工程管理上常用的時程／成本權衡問題（Project time/cost trade-off）傅可申（D. R. Fulkerson）教授曾作過探討[13]，他不直接解原問題而是將它轉換爲代數對偶（Algebraic dual）網路流量問題然後求解，因爲當時網流問題才有高效率的演算法。時程問題的這個對偶轉換引發我的靈感，因而發現了水庫的網路流量特性[2]，後來發展成爲水庫標的規劃模式[4, 5]，最後在網路比例圖上發現了切割解法[6, 8]，現在回頭把切割解法應用在時程問題上。

由以上的說明可知，對偶是二個模式二種解法發展過程中的關鍵觀念，網路理論中代數對偶性最出名的例子是福特（L. R. Ford）與傅可申二位所發現的最大流量－最小割值（Max-flow min-cut）定理[13]：任一網路由一點 s 到另一點 t 所能輸送的最大流量等於分開 s 與 t 二點所有切割集合中的最小割值。這裡假設網路的每一條管線都有它輸送流量的上限（相當於本文管線的寬度，一個割集的割值即爲對應的單位切割淨成本）。如果所求爲最小割值則除了直接求割集中各管線上限的和也可以透過最大流量的求法來求割值，反之，也可以透過割值的求法來求流量。

在比較複雜的網路問題中，需要考慮的除了管線流量的上限還有輸送單位成本或收益（相當於本文管線的長度），因此要決定的不只是最大流量的輸送方式而是最大收益的輸送方式，而其對偶問題則是最小成本的切割方式。本文所考慮的水庫規劃與時程成本二個問題同屬後者，如果將上述最大流量－最小割值的對偶觀念推廣，則爲了求最小成本切割，是可以用對偶的最大收益流量，傅可申教授當初就是這樣處理的[13]，也有部分用對偶流量的方式處理的[18]，但是對偶問題管線中流量的實際意義是影子價格，這個觀念與各管線中影子價格流量之間的關係相當抽象不易掌握，只是網流問題的解法有許多現成的程式可用，仍有它方便之處。

水庫容量線性標的規劃模式是我自一九八七年開始，爲水資會所作研究計畫的部分成果，這些計畫發展了水庫模式的需求與成本比例圖的切割解釋，而爲了能利用圖形自然直觀的解釋，避免非必要的對偶轉折，乃發展出網路切割解法[6, 8]以及網孔觀念。同時又回頭將時程成本問題表示成網路切割形式，並且以切割解法解時程成本問題。切割解法的效率與網流解法相當，所以現在可以直接求解而不必藉助於對偶觀點。希望這個不經過對偶轉折的直接解法會使時程或其他網路切割模式的分析與推廣更爲方便。上述研究計畫也探討了一些可能的應用，這些都是網路切割問題，因此與一般水資源系統所用的網路流量問題[17]在觀念與解法上都不相同。在此要感謝水資會[6, 9]、國科會[2, 7]與農委會[3]過去在研究或進修計畫上的支持。水庫標的規劃模式之所以能發展到這樣具體的地步是因爲水資會的多位前輩在近年來對本人在水庫模式研究上的持續支持。

這裡考慮的水庫規劃與時程成本二個問題在外觀面貌上雖然不同，但是在骨架結構上卻是一樣。現在先後予以探討與比較，顯現了優選問題應用的多樣性與模式解法的結構性，希望由此能激發出更多其他的網路切割模式！切割問題和流量問題一樣應該會有非常廣泛的應用。傅可申教授雖已在1976年初過世，但是對他於1975年春季在美國康乃爾大學任教時所給予我論文的指導[2]，還希望藉此機會表達我最深的謝意。傅可申老師的代數對偶網流解法以及本文所介紹的網路切割解法與幾何對偶網孔觀念呈現了同一個時程問題的多種面貌，可橫看也可側看，是嶺也是峰。流量是沿著二個節點之間管線的長度方向縱流，切割則是對著二個網孔之間管線的寬度方向橫切。這樣具體的對偶觀點可以讓我們進一步直接面對傅可申老師他著名的網流演算法－對勁法（Out of kilter algorithm）[13]，這個方法是網流問題中應用最廣的方法，本文二個模式就能用它求解[7, 13]。對勁法可用於不同初始情況，方便靈敏度分析，因此演算步驟相當複雜，但是透過上述二種對偶觀念，似乎可以消除可能的隔閡。而由於這些觀點的相互激盪，希望不論在演算方法或應用層面上都可以引人進入一個左右逢源的新境界。

九、結論與展望

本文所探討的水庫規劃與時程成本二個問題是規劃與管理上典型的例子，它們的性質截然不同，但是因爲結構相同，所以可用同樣的網路切割方法，以非常高的效率求解，而若非針對問題的結構去發展或選擇模式與解法，很可能費神耗時而難有所獲。水庫標的規劃模式與網路切割解法這個組合有下列特點：

(1) 圖形表達具體自然：以比例圖或網路圖具體的顯示需求、成本、蓄水量與容量等數值，讓使用者憑直覺進入問題核心－了解問題結構與掌握問題解法而超越可能的數學隔閡，因此免除優選模式推廣時所常見之障礙。

(2) 效率優越不限期數：演算步驟在網路圖上以明確的切割方式進行，所需計算時間與記憶約爲一般線性規劃方法1/n，n爲期數，對於上仟個時期的問題，前者所需還不到後者的千分之一，因此在處理多水庫長期數的規劃問題時，原來需要大型或超級計算機的，現在使用個人計算機就夠了。

(3) 模式基本應用廣泛：水庫標的規劃模式可廣泛的應用於容量與出水量規劃、規線研擬與即時操作等問題上。它所考慮的條件：水庫水量平衡與蓄水量上、下限（蓄洪與貯水）約束，都是水庫最基本的條件，因此除了上述各種直接應用，也可以與其他方法聯合應用，或是作爲其他較複雜相關模式的初始解。

(4) 區劃處理擴充容易：在單水庫網路模式的基礎上可以建立多水庫模式或擴充爲其他複雜實用的模式，而且若以區劃（Partition）與鬆弛及約束（Relaxation and restriction）等方法[9]處理，則仍然能利用其個別水庫原有的網路結構，而維持相當高的演算效率。

以上各點顯示切割解法在水庫問題的推廣、演算、應用與擴充等各方面都有相當優異的效果，網路解釋與切割解法是水庫模式一項歷史性的突破，它可以提昇我們對水庫問題的了解。其實它對其他的網路切割問題與對網路規劃對偶關係的發展可能都會有具體的影響。本文這二個模式雖然都屬於網路規劃模式，但是並非傳統的網路管線流量問題，而是網路管線切割問題。當初是爲了演算效率才將時程成本問題化爲對偶的網路流量問題求解[13]，水庫問題的網路特性是受此影響而發現的，其後經過了幾度的演進[2-8]才發展出現在這樣直觀的比例圖切割解釋與解法，而且又反過來將切割解法應用在時程問題上。這個切割解法的效率與流量解法一樣的高，所以在演算法上切割與流量二個對偶解法現在是眞正對等了。線性規劃是由於對偶關係而使得理論與應用都更爲豐富，網路規劃更是如此。既然順沿管線輸送流量的迴路以及橫過管線攔截通道的割集等對偶觀念已經有切割解法的刺激，可以預期網路規劃中對偶關係的探討、演算方法的發展與應用模式的建構等各方面都將會有更豐碩的收穫。

以上對二個模式與網路切割解法的發展與特點所作的回顧與歸納，希望能夠再加强各位對網路優選方法的興趣與了解。優選方法的應用雖然愈來愈普遍，但是在系統分析中它仍然只是其中的一個方法，必須與其他方法配合。因爲實際系統一般都非常複雜，所以只有在合理的予以簡化並建立一個基本模式之後，才有可能以優選方法推求模式的解，而且這個解只是基本模式或簡化系統的並不是實際系統的，因此接著需要對關鍵因素進行廣泛的靈敏度分析以便篩選出一些較佳方案，然後再以詳細模擬的方式分析這些方案並予以比較修正，最後才將成果提出作爲決策採擇的參考[11]。於必要時甚至還可以在模擬比較之後，回頭修正優選模式重新篩選方案，再作詳細模擬並分析比較。爲了讓系統的分析工作能更爲周全，優選與模擬或其他方法可以交替反覆使用。

現代的工程系統愈來愈龐大、愈來愈複雜，考慮的因素也愈來愈多，因此系統的規劃是科際團隊的工作，例如一個水資源計畫在考慮水文、地質、地形、其他自然資源與環境等條件之外，還必須考慮經濟、社會、法律、政治等因素，這些條件或因素的種類繁多而且有許多不是傳統的，因此爲了彼此間的溝通，團隊成員需要適當的溝通工具，而優選方法不只是系統規劃、設計與管理的工具，也可以當作集體決策的一種工具[11]，事實上這些工具在許多領域中可能已經是通用的方法了。

優選方法因爲本身理論的持續發展與其計算工具－電子計算機的進步普及，可以預期必定會如一般問題通用的分析工具－基礎代數與幾何一樣，成爲大部分系統問題通用的分析工具。

從建立優選模式、發展其解法與實際加以應用的一些經驗可歸納出一個結論：發展與應用模式是爲了深入了解問題的結構而不只是爲了算出一堆數字！

參考文獻

1. 胡文章，「線性規劃在水庫規劃及操作之應用」，台灣水利第25卷1期，1977年。
2. 劉佳明，"A Dual Interpretation of a Linear Reservoir Model"，台灣水利第24卷第1期，1976年3月。

3. 劉佳明，桃園地區水源有效利用與灌溉管理改善之研究，農復會研究報告，1978年12月。
4. 劉佳明，「水庫容量線性對偶模式與網路解法」，第3屆水利工程研討會論文集，1986年5月。
5. 劉佳明，"A Dual Network Model for a Linear Reservoir Goal Programming Problem"，中日水資源工程研討會論文集，1987年4月。
6. 劉佳明，水庫標的線性規劃模式及其網路解法之研究，經濟部水資會研究報告，台大農工研究所，1987年6月。
7. 劉佳明，乾旱期間水庫運轉之網流模式，國科會研究報告，台大農工研究所，1987年7月。
8. 劉佳明，「水庫標的線性規劃問題之網路切割法簡介」，台灣水利第36卷第2期，1988年6月。
9. 劉佳明，串聯水庫系統標的線性規劃模式及其網路解法之研究，經濟部水資會研究報告，台大農工研究所，1989年2月。
10. Bazaraa, M.S., J.J. Jarvis and H.D. Sherali, Linear Programming and Network Flows, John Wiley & Sons, 1992.
11. de Neufville, R., Applied Systems Analysis, McGraw-Hill, 1990.
12. Deo, N., Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, 1974, Chapters 3-6.
13. Ford, L.R., Jr., and D.R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press, 1962, p.11; pp.151-161; pp.162-169.
14. Glover, F., G. Jones, D. Karney, D. Klingman, and J. Mote, "An Integrated Production, Distribution and Inventory Planning System", Interfaces, vol. 9, no. 5, 1979.
15. Glover F., and D. Klingman, "Network Application in Industry and Government", AIIE Transactions, vol. 9, no. 4, 1977.
16. Klingman, D. and J.M. Mulvey, (Ed), Network Models and Associated Applications, MPS 15, North-Holland, 1981.
17. Major, D. C. and R. L. Lenton, Applied Water Resource Systems Planning, Prentice-Hall, 1979.
18. Phillips, S., Jr. and M.I. Dessouky, "Solving the Project Time/Cost Tradeoff Problem Using the Minimal Cut Concept", Management Science, Vol. 24, no. 4, 1977.

（上接第28頁）

Acknowledgement

TRACER computer program was developed by Dr. C.R. McKee of In-Situ Inc.

References

1. Craig, Forrest F., Jr., The Reservoir Engineering Aspects of Waterflooding. Society of Petroleum Engineers of AIME (1971).
2. In-Situ Inc., Several unpublished reports.
3. Muskat, M., Physical Principals of Oil Production. McGraw-Hill Book Company, Inc.(1949).

收稿日期：民國81年12月18日
接受日期：民國81年12月29日