

專 論

利用水位歷線推估洪峰深度之探討

Investigation on Application of Depth Hydrograph for Estimating Flood Depth

淡江大學水資源及環境工程學系教授

施 清 吉

Ching-Chi Shih

摘 要

根據 Saint Venant 方程式之漸近解，由其前三階的近似解組合成瞬時水面線。而後，再配合水位歷線的最高水位及其時對時間的第二階偏導數，以推估洪峰深度。

ABSTRACT

Based upon the asymptotic solutions of the Saint Venant Equations, the instantaneous water surface profile is first obtained and constructed by the first three approximations. The flood depth can then be estimated from the instantaneous water surface profile coupled with the highest water depth detected from the depth hydrograph and the second partial derivation of the depth with respect to time at this moment.

一、前 言

洪水未來臨之前及過後，假設河川或渠道內的流況為均勻流 (Uniform flow) 或正常流 (Normal flow)。在這一段期間，測位站 (Stage station) 的水位歷線 (Depth hydrograph) 先上升而後再下降。從水位歷線的記錄，吾人即可研判這個測位站的水位何時為最高。令 t_1 與 y_1 分別代表此時以及測位站的最高水位。然而，在此時刻，瞬時水面線的最高點並不在測位站。易言之，洪水峰並不在測位站上，而是在測位站的上游。如果洪峰附近的流況可視為機動波 (Kinematic wave)^{(1)*}，則洪峰深度是一個關鍵性的未知數。

其時，洪峰與瞬時水時線 (Instantaneous water surface profile) 是息息相關的，因為洪峰代表深度梯度為 0。所以，為了解決這個問題，瞬時水面線的圖形必須予以適當的假設，例如採用拋物線型或誤差函數型 (Error function) 的函數關係式^(2, 3)。這樣一來，又引進了額外的未知數；至少有兩個，一個是洪峰與測位站的距離，另一個是函數關係式內的未定係數。如果測位站的水位呈現為最高時的時間 t_1 不予以引用，則水位歷線可提供兩個條件用以「解」上述的未知數：一是其時的最高水位 y_1 ，二是其時該站的深度對時間的第二階偏導數。但是水位歷線的第二階偏導數必須配合適當的假設才得以使用，因為所假設的函

數關係式是瞬時的，其內的未定係數只用以代表該測位站及該時刻 t_1 。通常採用的假設是洪峰軌跡及局峰 (Local crest) 軌跡相互平行。這個假設首先用以連貫瞬時水面線及水位歷線，而後再進一步連貫水位歷線的第二階偏導數與函數關係式的未定係數。最後一個用以「解」上述未知數的依據是來自連續方程式 (Continuity equation)。測位站的最高水位 y_1 決定於 $\partial y / \partial t = 0$ ， y 與 t 分別代表水深與時間；由連續方程式又得知此時在測位站的 $\partial Q / \partial x = 0$ ， Q 與 x 分別代表流量與縱向空間座標。引用其他適當的假設，例如假設洪水波為擴散波 (Diffusion wave)，此時流量即可表為深度與水位梯度等的函數式，但其內不包含速度。如此一來，再次引用所假設的瞬時水面線，就可建立以洪峰與局峰間的距離為主的關係式。總之，瞬時水面線的函數關係式予以適當的假設後，依據上述的概念即可建立由三個代數式所組成的聯立方程式，用以「解」兩峰間距，洪峰深度以及函數關係式的未定係數。

若瞬時水面線假設為拋物線型，則其函數關係式為一空間座標 x 的二次式。另一方面，若假設為誤差函數型，但省略未定係數的高次項，只保留二次項；則在本質上，其函數關係式同樣可視為近乎於空間座標的二次式。不論瞬時水面線假設成何型式的函數關係式，式中均含一未定係數，且具有下列相同的特徵：(1) 因次 (Dimension) 為長度 (沿縱向空間座標) 的倒數，(2) 其值視時間與測位站的位置而定，(3) 絕對值都非常小，而且小於 0。其實，所有前述的假設及其問題的內涵都可由另一角度予以了解與分析。利用微擾法 (Perturbation method) 可建立，以接近初時均勻流之程度為擾動項 (Perturbation term) 的漸近解 (Asymptotic solution)，此解包含深度與速度^[1]。「解」的展開係採用以擾動項為主的多項式，但配合空間座標的二次項，瞬時水面線只須含蓋前面三階的近似解。由此，再根據前述概念即可「解」相關的未知變數。

二、理論分析

若渠道為寬矩型，且能量線坡度 S_f 以 Chezy 式計，同時式中的 Chezy 常數 C_o 為一定值，即 $S_f = V^2 / C_o^2 / y$ ，則連續方程式與運動方程式分別為^[4]

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{(yv)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = S_o - \frac{v^2}{C_o^2 y} \quad (2)$$

式中

v ：断面平均速度

g ：重力加速度

S_o ：渠底坡度

且令

$$\tau = t - \frac{x}{v_o + c_o} \quad (3)$$

式中 $c_o = \sqrt{gy_o}$ ， v_o 與 y_o 分別代表初時均勻流的速度與深度。參數 τ 用以代表擾動項，則深度 y 與速度 v 的漸近展開式 (Asymptotic expansion) 分別為

$$y = y_o + \tau^1 y_1(t) + \tau^2 y_2(t) + \dots \quad (4)$$

$$v = v_o + \tau^1 v_1(t) + \tau^2 v_2(t) + \dots \quad (5)$$

將式 (4) 與式 (5) 代入式 (1) 與式 (2) 之後，不同階的近似解之微分方程式就可由收集擾動值 τ 的同次項求得。第零階近似解為已知的均勻流；同時，又可得

$$v_1 = \frac{c_o}{y_o} y_1 \quad (6)$$

第一階近似解 y_1 所須滿足的微分方程式為

$$\frac{dy_1}{dt} - \frac{3y_1^2}{2y_o(1+Fr_o)} + \frac{gS_o y_1}{2v_o} = 0 \quad (7)$$

式中 $Fr_o = v_o / \sqrt{gy_o}$ 。「解」得第一階近似解 y_1 後，由式 (6) 就可求得另一個第一階近似解 v_1 。而第二階近似解所須滿足的微分方程式為

$$\begin{aligned} & (v_o + c_o) \frac{dy_2}{dt} - 3v_1 y_2 - 3v_1 y_2 + \frac{y_o}{c_o} \times \\ & (v_o + c_o) \frac{dv_2}{dt} - 3 \frac{y_o}{c_o} v_1 v_2 + g \frac{y_o}{c_o} \times \\ & (v_o + c_o) \left\{ S_o \left[\frac{2v_2}{v_o} + \frac{v_1^2}{v_o} \right] - \right. \\ & S_o \left[\frac{2y_1}{y_o} + \frac{v_1}{v_o} \right] + S_o \frac{y_1^2}{y_o^2} - \\ & \left. S_o \frac{y_2}{y_o} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) 包含另一個第二階近似解 v_2 ，這一個未知數並不是由同階的相關式求得，而是由前階 (第一階) 的相關式求得。第一階的相關式除了式 (7) 的微分方程式外，另一式為

$$2v_2y_0 = -2v_1y_1 + 2y_2c_0 + (v_0 + c_0)\frac{dy_1}{dt} \quad (9)$$

代入式(9) 及其導數 $\frac{dv_2}{dt}$ 於式 (8), 即可得第二階近似解 y_2 所須滿足的微分方程式, 其結果為

$$\frac{dy_2}{dt} + f(t)y_2 = r(t) \quad (10)$$

$$\text{式中 } f(t) = b - \frac{3by_1}{\eta} \quad (11)$$

$$\text{且 } b = \frac{gS_0}{2v_0}(2 - Fr_0) \quad (12)$$

$$\eta = \frac{y_0 g S_0 (1 + Fr_0)(2 - Fr_0)}{3v_0} = \frac{2}{9} \times by_0 (1 + Fr_0) \quad (13)$$

$$\text{與 } r(t) = -r_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + r_2 y_1 \frac{dy_1}{dt} - r_3 \frac{dy_1}{dt} + (r_4 - r_6)y_1^2 - r_5 y_1^3 \quad (14)$$

$$\text{且 } r_1 = \frac{v_0 + c_0}{4c_0}$$

$$r_2 = \frac{5}{2y_0}$$

$$r_3 = \frac{gS_0(v_0 + c_0)}{2c_0 v_0}$$

$$r_4 = \frac{gS_0}{v_0 y_0} \quad (15a, b, c, d, e, f)$$

$$r_5 = \frac{c_0}{(v_0 + c_0)y_0^2}$$

$$r_6 = \frac{gS_0}{2c_0 y_0} \left[1 - \frac{c_0}{v_0} \right]^2$$

則如式(4)與式(5)所示, 每一階近似解都包含二個未知數: 深度與速度。每一階近似解的微分方程式並不是聯立的, 同時「解」深度與速度; 而是僅「解」深度, 速度是由前階近似解的微分方程式計算而得。此外, 對於每一階近似解的微分方程式, 都

可分別由式(1)與式(2)求個二個常微分方程式, 但是這兩個方程式却都包含了高一階的近似解。例如「解」第一階近似解, y_1 與 v_1 , 這一階近似解的微分方程式包含了 y_2 與 v_2 。二個第一階近似解的微分方程式剛好都能消掉高階未知數 y_2 與 v_2 , 否則 y_1 與 v_1 就無法解得。

針對某一位置而言, 洪水來臨會使該處的水位持續上升, 一直到洪峰抵達。在這一段期間, 水位變化是屬於正波 (Positive wave)。如衆所週知, 只要初時福祿數 Fr_0 大於 2, 任何上升水位總究會導致「湧」的形成。但是, 若初時福祿數 Fr_0 小於 2, 上升水位是否會形成「湧」, 這就視水位上升率是否超過某一臨界值, 或 $\frac{dy_1}{dt}$ 是否

大於 0^[5]。易言之, 如果初時福祿數 Fr_0 小於 2, 無「湧」形成時, 水位上升率的臨界值即相當於 $\frac{dy_1}{dt} = 0$ 。所以由式 (7) 即得知

$$y_1 < \eta = \frac{y_0 g S_0 (1 + Fr_0)(2 - Fr_0)}{3v_0} \quad (16)$$

式(16)顯示, 任何時刻的第一階近似解 y_1 必須小於 η , 才不致於形成「湧」。而 η 值完全決定於初時流況。此外, 積分式 (7), 即可求得第一階近似解, 其結果為

$$y_1 = y_1(0) \frac{1}{e^{-at}} \left\{ 1 - \frac{y_1(0)}{\eta} \left[1 - \frac{1}{e^{-bt}} \right] \right\} \quad (17)$$

式中 $y_1(0)$ 代表在 $t = 0$ 時, 第一階近似解之初時值, 式(17)為一時間的遞減函數, 隨着時間的增加, 第一階近似解急速趨近於 0, 而以 $t = 0$ 時的值為最大。

「解」得第一階近似解 y_1 後, 吾人就可根據式(10)求第二階近似解 y_2 , 其結果為

$$\begin{aligned} y_2 = & \frac{1}{e^{-bt}} \left\{ 1 - \frac{y_1(0)}{\eta} \left[1 - \frac{1}{e^{-bt}} \right] \right\}^{-3} \left\{ -r_1 b^2 y_1(0) \times \right. \\ & \left[1 - \frac{y_1(0)}{\eta} \right]^{-2} t - r_1 b y_1(0) \frac{y_1(0)}{\eta} \left[1 - \frac{y_1(0)}{\eta} \right] \times \\ & \left[\frac{1}{e^{-bt}} - 1 \right] + r_2 y_1(0) y_1(0) \left[1 - \frac{y_1(0)}{\eta} \right] \left[\frac{1}{e^{-bt}} - 1 \right] + \\ & r_3 b y_1(0) \left[1 - \frac{y_1(0)}{\eta} \right] t - r_3 b y_1(0) \frac{y_1(0)}{\eta} \left[1 - \frac{y_1(0)}{\eta} \right] t - \\ & r_3 y_1(0) \frac{y_1(0)}{\eta} \left[1 - \frac{y_1(0)}{\eta} \right] \left[\frac{1}{e^{-bt}} - 1 \right] + (r_4 - r_6) \times \\ & \left. \frac{y_1(0) \eta}{2b} \left[1 - \left[1 - \frac{y_1(0)}{\eta} \left[1 - \frac{1}{e^{-bt}} \right] \right]^2 \right] + r_5 \frac{[y_1(0)]^3}{2b} \left[\frac{1}{e^{-2bt}} - 1 \right] + y_2(0) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

式中 r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 與 r_6 分別定義於式 (15a, b, c, d, e, f), 而 $y_2(0)$ 代表在 $t = 0$ 時, 第二階近似解之初時值。

三、結果與討論

瞬時水面線示於式 (4), 其中第一階近似解 y_1 與第二階近似解 y_2 分別示於式 (17) 與式 (18)。
。若令

$$Fr_o = \frac{v_o}{c_o} = \frac{v_o}{\sqrt{gy_o}}$$

$$t' = tb$$

$$x' = xb / (v_o + c_o)$$

$$y' = y / y_o \quad (19a, b, c, d, e, f, g, h)$$

$$y_1' = y_1 / \eta$$

$$y_2' = y_2 / [by_1(0)]$$

$$A' = e^{-t'} [1 - y_1(0)' (1 - e^{-t'})]^{-1}$$

$$B' = -\frac{t'}{4y_1(0)'} [1 - y_1(0)']^2 + \frac{17}{12} [1 - y_1(0)'] (e^{-t'} - 1) +$$

$$\frac{t'}{y_1(0)' (2 - Fr_o)} [1 - y_1(0)'] - \frac{t'}{(2 - Fr_o)} [1 - y_1(0)'] -$$

$$\frac{t'}{(2 - Fr_o)} [1 - y_1(0)'] (e^{-t'} - 1) + \frac{1}{3y_1(0)' (2 - Fr_o)} \times$$

$$[2 - Fr_o (1 - 1/Fr_o)^2] \{1 - [1 - y_1(0)' (1 - e^{-t'})]^2\} +$$

$$-\frac{2}{3} y_1(0)' [e^{-2t'} - 1]$$

$$y_1(0)' = y_1(0) / \eta$$

$$y_2(0)' = y_2(0) / [by_1(0)]$$

則式 (4) 變為

$$y' = 1 + \frac{2}{3} (1 + Fr_o) y_1'(t' - x') +$$

$$-\frac{2}{3} (1 + Fr_o) y_1(0)' y_2'(t' - x')^2 \quad (20)$$

而式 (17) 與 (18) 分別變為

$$y_1' = y_1(0)' A' \quad (21)$$

與

$$y_2' = (1 + Fr_o) e^{-t'} [1 - y_1(0)' (1 - e^{-t'})]^3 \times$$

$$y(0)' \left[B' + \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'} \right]$$

$$= A' (1 + Fr_o) [1 - y_1(0)' (1 - e^{-t'})]^{-2} \times$$

$$y(0)' \left[B' + \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'} \right] \quad (22)$$

式中

$$(23)$$

$$(24)$$

綜觀式 (20) 至式 (24), 即可發現初時福祿數 Fr_o 。第一階近似解的初時值 $y_1(0)$, 與第二階近似解的初時值 $y_2(0)'$ 為重要的控制參數, 而整個現象的變化完全決定於 y_1' 與 y_2' 的變化。這些現象將詳加討論於後。本文分別採用了三個不同的初時福祿數, 即 $Fr_o = 0.2, 0.4$ 與 0.6 ; 而 $y_1(0)'$ 的值由 0.05 至 0.95 , 間距為 0.05 ; 另 $y_2(0)'$ 採用相對 $y_1(0)'$ 的比值 ($y_2(0)' / y_1(0)'$), 其值由 -0.05 至 -0.95 , 間距為 -0.05 。

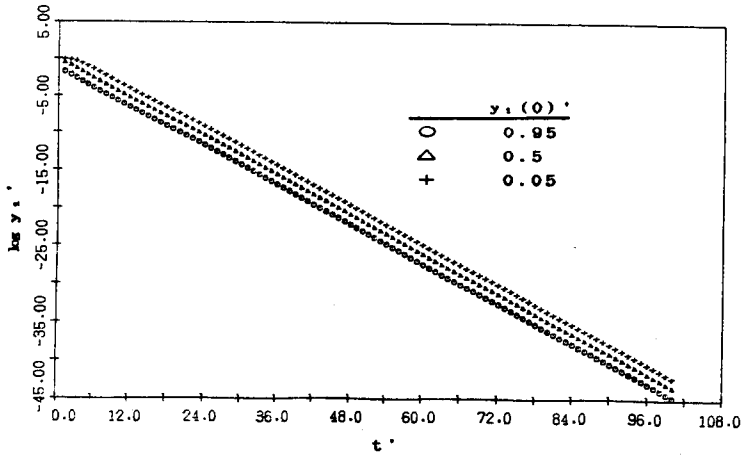
一、第一階近似解 y_1

如式 (21) 所示, 如果 $y_1(0)' = 1$ 即 $y_1(0) = \eta$, 第一階近似解 y_1 將趨近於無窮大。第一階近似解代表深度上升率, 若上升率超過臨界值 η 即會形成「湧」, 而此臨界值 η 的大小完全決定於初時流況, 參閱式 (13)。第一階近似解為時間的遞減函數, 遞減速率相當大, 所以, 圖一的垂直座標軸採

用 $\log y_1'$, 而水平座標軸為 t' , 並以 $y_1(0)'$ 為參數。三條曲線的 $y_1(0)'$ 值分別等於 $0.05, 0.5$ 與 0.95 。曲線的走向顯示第一階近似解 y_1' 與時間 t' 間的關係幾近於指數型, 除非 t' 的值非常小。這一點正如式 (21) 與 (23) 的型式所示。而參數 $y_1(0)'$ 的影響以 $t' = 0$ 時為最大, 跟着影響整條曲線的移動, 但並不影響曲線的走向與梯度。

二、第二階近似解 y_2

無因次第二階近似解 y_2 示於式 (22), 除了自變數 t' 外, 尚包括三個參數, 即 $Fr_o, y_1(0)'$ 與 $y_2(0)' / y_1(0)'$ 。第二階近似解 y_2 代表深度的上升率的上升率, 其因次為深度/時間²。水位之上升是來自第一階近似解, 但水位之下降卻來自第二階近似解。因此, 任何時刻的第一階近似解必須大於 0 ; 但在任何時刻的第二階近似解 y_2 必須小於 0 。所以第二階近似解的初時值 $y_2(0)'$ 也必須小



圖一 第一階近似解

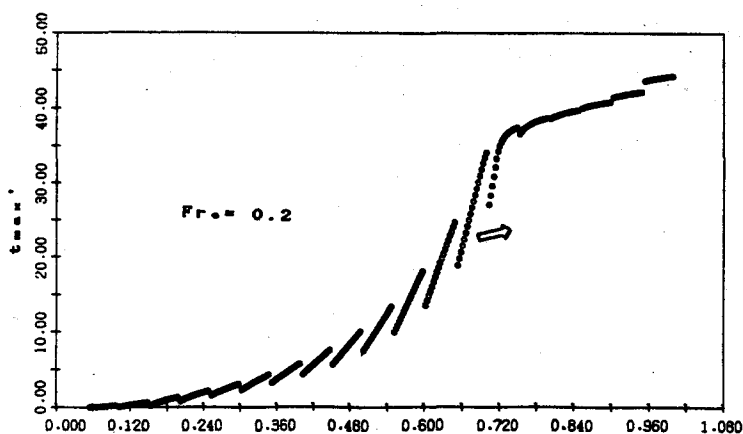
於 0。此外，第二階近似解與時間的關係並不像第一階近似解那般單純；後者為單調遞減函數，但前者却不然。參閱式 (24)， t' 趨近於很大時，則 $\exp(-t')$ 趨近於 0。在這種情況下，等號右邊的第一項，第三項及第四項之值皆與 t' 成比例；因此，這三項就成為主要的控制項，其和將趨近於 $t' [1 - y_1(0)'] / y_1(0)' / [-1/4 + 1/(2 - Fr_0)]$ 。如果這三項之和大於 $y_2(0)' / y_1(0)'$ 的絕對值，則 y_2' 的值就由小於 0 變為大於 0。但是，如前述，第二階近似解 y_2 必須小於 0。故本文採用在第二階近似解 y_2 為 0 時的時刻做為時間的最大容許值，以 t_{max}' 表示，其變化展示圖二系列。圖二的水平與垂直座標軸分別為 $[y_1(0)' - 0.1 y_2(0)' / y_1(0)']$ 與 t_{max}' 。水平座標軸採用 $[y_1(0)' - 0.1 y_2(0)' / y_1(0)']$ 的合併型式，而不採用個別的 $y_1(0)'$ 或 $y_2(0)'$ 是為了減少影響因子的個數。以 t_{max}' 而言，其影響因子有 Fr_0 ， $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'$ 。而今 $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'$ 予以合併，計算結果的展示只須以初時福祿數 Fr_0 為參數。

第一階近似解 y_1 的微分方程式為非線性；其餘的均為線性，但非均勻。一般而言，自第二階起，微分方程式的型式都是非常單純，但是愈來愈複雜，參閱式(10)至式(15)。除非是非常特殊情況，一般「解」到第一階就夠了，足以了解現象的全貌。但是，由於本文所探討的瞬時水面線為空間座標 x 的二次式，故必須解到第二階，參閱式 (3)。不論那一階近似解，最重要的參數為 b 與 η ，分別定

義式(12)與(13)，其值均決定於初時流況。此外，以深度而言，各階近似解都含蓋一個初時值，第一階與第二階的初時值分別為 $y_1(0)$ 與 $y_2(0)$ ，這二個值均用以控制瞬時水面線的形狀。如前所述， $y_1'(0) > 0$ 代表深度上升率的初時值大於 0，而 $y_2'(0) < 0$ 代表深度上升的上升率的初時值小於 0。這兩參數的角色分別相當於 $\frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0}$ 與 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$ 。

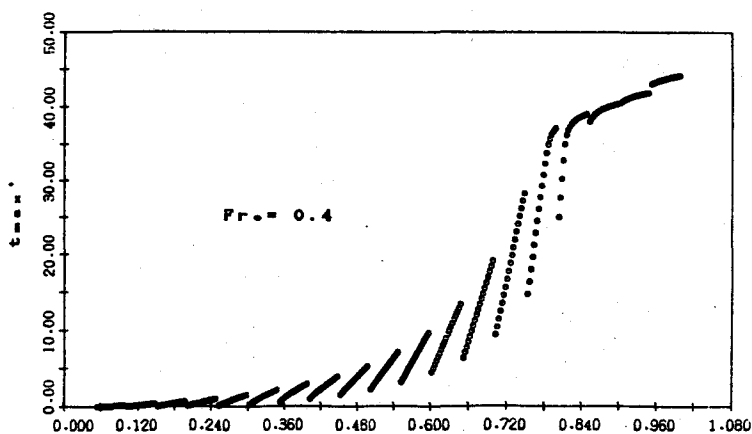
。而今，合併變數 $[y_1(0)' - 0.1 \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}]$ 內的 $\frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}$ 改以負計，故 $[y_1(0)' - 0.1 \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}]$ 正代表這兩參數的影響均以使「水位上升」的效果計。因此，其值愈大，則引伸第二階近似解 y_2 需要較長的時間，才會由小於 0 變為大於 0。易言之，最大容許時間 t_{max}' 將隨着 $[y_1(0)' - 0.1 \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}]$ 的增加而增加。圖二系列的曲線走向正反映這個現象。展示於圖上的結果是由十九個線段所組成，不同的線段代表不同的 $y_1(0)'$ 值。每一個線段的左端之水平座標為 $y_1(0)' + 0.005$ ，而右端點則為 $y_1(0)' + 0.095$ 。其次，如果將圖三系列合併於同一圖上，即可發現不同的初時福祿數 Fr_0 。只影響位於中間的部份線段（斜率較陡）。增加初時福祿數的值將導致部份的線段向右移，如圖二·一的箭頭所示。位於左、右兩邊的線段幾乎不受初時福祿數的影響。

除了自變數 t' 外，第二階近似解 y_2 同時受三個參數的影響，圖三·一，三·二與三·三分別



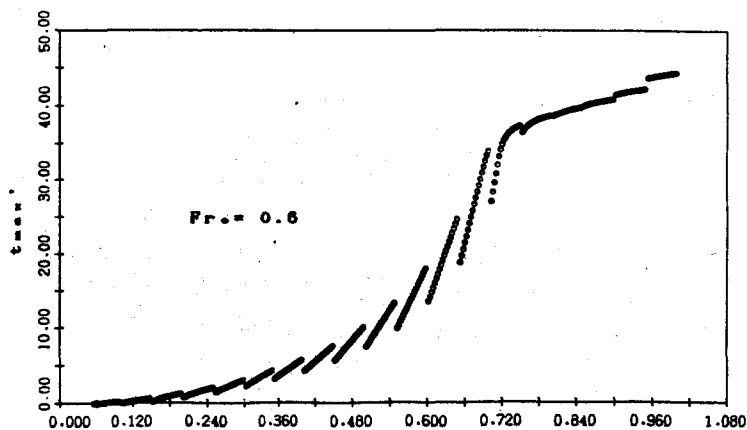
$$y_1(0)' - 0.1 \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}$$

圖二 • 一最大容許時間



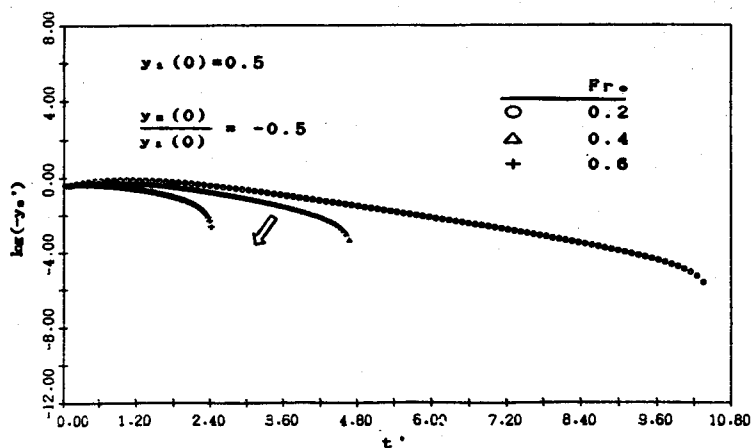
$$y_1(0)' - 0.1 \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}$$

圖二 • 二最大容許時間

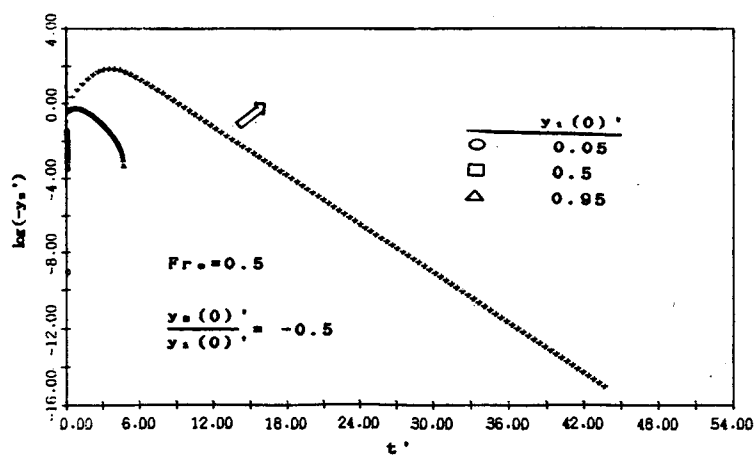


$$y_1(0)' - 0.1 \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}$$

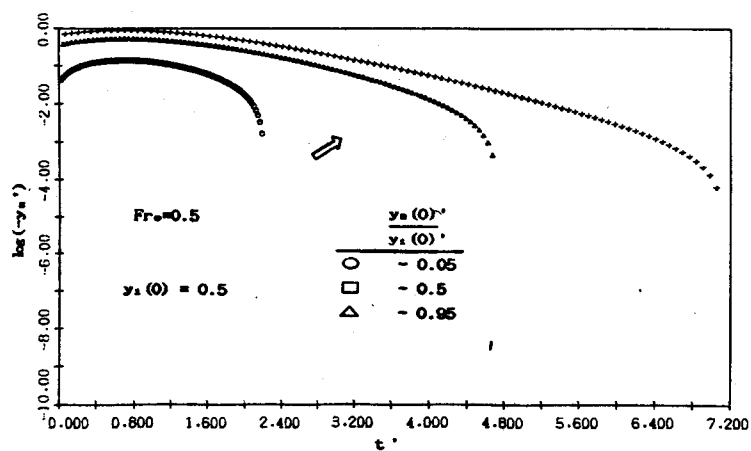
圖二 • 三最大容許時間



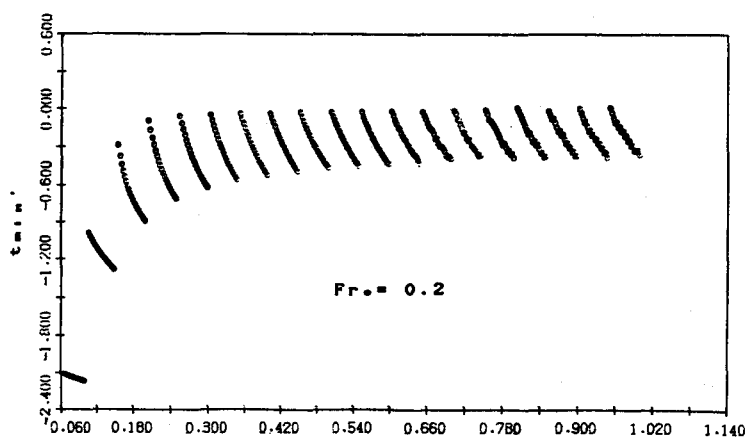
圖三 • 一第二階近似解



圖三 • 二第二階近似解

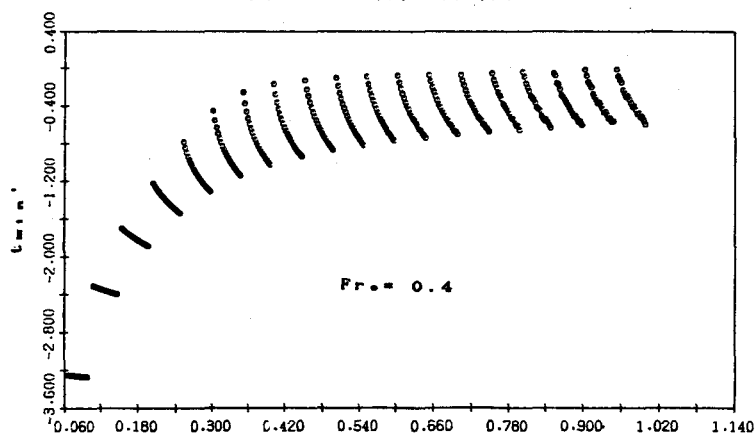


圖三 • 三第二階近似解



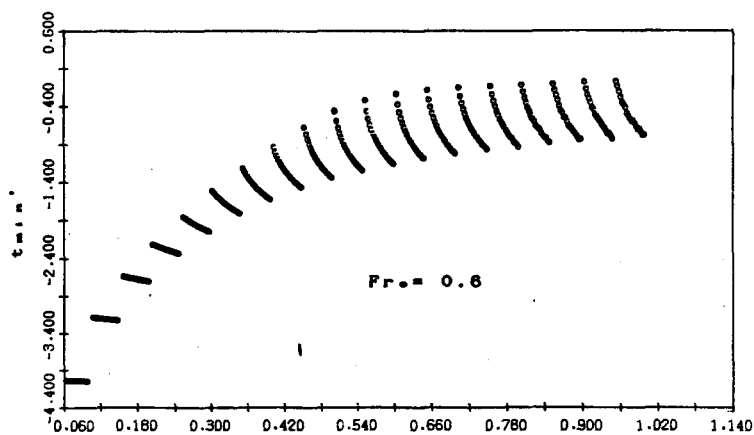
$$y_1(0)' - 0.1 \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}$$

圖四•一 最小容許時間



$$y_1'(0) - 0.1 \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}$$

圖四•二 最小容許時間



$$y_1(0)' - 0.1 \frac{y_2(0)'}{y_1(0)'}$$

圖四•三 最小容許時間

代表參數 Fr_0 ， $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'$ 的單獨影響。這三個圖的水平座標軸都是 t' ，而垂直座標軸均為 $\log(-y_2')$ ；同時以箭頭指示當參數值增加時，曲線移動的方向。一般而言，除了少數的情形，同時又限制於在 $t'=0$ 的附近外，第二階近似解 y_2' 與時間 t' 的關係均為遞增函數；若以 $\log(-y_2')$ 表示，則為遞減函數。因此，曲線的走勢均是自左上方向右下方，或是自上向下。圖三系列顯示第二階近似解 y_2' 絕非屬於單純的指數型，而是相當複雜的函數關係。除了自變數 t' 外，同時深受參數 Fr_0 ， $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'/y_1(0)'$ 的影響。

圖三•一的參數為初時福祿數，其值分別為 0.2, 0.4 與 0.6，另兩參數值保持不變， $y_1(0)' = 0.5$ ， $y_2(0)'/y_1(0)' = -0.5$ 。圖三•二的參數改為 $y_1(0)'$ ，同樣採用三個不同的值 0.05, 0.5 與 0.95，另兩參數變為 Fr_0 與 $y_2(0)'/y_1(0)'$ ，其值分別等於 0.4 與 -0.5。圖三•三的參數再改為 $y_2(0)'/y_1(0)'$ ，也同樣採用三個不同的值 -0.05, -0.5 與 -0.95，另兩參數值分別為 $Fr_0 = 0.4$ 與 $y_1(0)' = 0.5$ 。一般而言，在同一圖上，不同的參數值之影響首先反映於對 t_{max}' 的影響，而後再影響整個關係曲線的走向。以圖三•

一為例，增加初時福祿數無疑地即代表增加傳遞速度。因此，第二階近似解 y_2' 由負值變為正值的時間也跟着減小。易言之，隨着初時福祿數的增加，圖三•一顯示函數曲線自右向左移動。另一方面，參數 $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'/y_1(0)'$ 的影響適巧相反。參閱圖三•二提高 $y_1(0)'$ 的值自然延長 t_{max}' 的值，所以，函數曲線的移動是自左而右。而圖三•三的情形也類似於圖三•二，因為參數 $y_2(0)'/y_1(0)'$ 的遞減，其效果相當於 $y_1(0)'$ 的遞增。

三、理論解

理論上，若瞬時水面線假設為式(4)所示的型式，利用測位站的水位記錄來分析洪水峰，則就相當於由四個方程式解四個未知數 $y_1'(0)$ ， $y_2'(0)$ ， t' 與 x' ，已知條件為測位站的最高水位 $y_1' (= \frac{y_1}{y_0})$ 及其時的深度對時間之二階偏數 $a' (= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \times \frac{1}{b\eta})$ ， a' 為無因次值。測位站水位呈現最高水位的條件為 $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ 。由式(20)的微分即可得

$$y_1' + [y_1' (y_1' - 1) + 2y_1(0)' y_2'] (t_1' - x_1') + y_1(0)' E' (t_1' - x_1') = 0 \quad (25)$$

式中

$$E' = \frac{y_1' D'}{y_1(0)'} - y_2' + 3y_1' y_2' \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{而 } D' = (1 + Fr_0) \left\{ -\frac{1}{4} [2y_1'^2 - 3y_1' + 1] + \frac{5}{3} y_1' (y_1' - 1) - \frac{1}{(2 - Fr_0)} (y_1' - 1) \right. \\ \left. + \frac{2}{3(2 - Fr_0)} [2 - Fr_0(1 - 1/Fr_0)^2] y_1' - \frac{4}{3} y_1'^2 \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

另一方面由連續方程式又可得 $-\frac{\partial q}{\partial x} = 0$ ，故

$$\begin{aligned} f(t_1') = \\ y_1(0)' [A' + 2y_2' (t_1' - x_1')] [Fr_0 + I' (t_1' - x_1') + J' (t_1' - x_1')^2] + \\ \frac{1.5}{2 - Fr_0} [I' + 2J' (t_1' - x_1')] [1 + \frac{2}{3} (1 + Fr_0) y_1' (t_1' - x_1') + \\ \frac{2}{3} (1 + Fr_0) y_1(0)' y_2' (t_1' - x_1')^2] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

式中

$$I' = -\frac{2}{3} (1 + Fr_0) y_1(0)' A' \quad (29)$$

$$J' = -\frac{2}{3} - (1+Fr_o) \left[-\frac{4}{3} - y(0)'^2 (1+Fr_o) A'^2 + 2y_1(0)' y_2' + (1+Fr_o) y_1' (y_1'-1) \right] \quad (30)$$

測位站的最高水位 y_1' 及其二階導式 a' ，可分別由式(20)及其微分式求得，即

$$y_1' = 1 + \frac{2}{3} - (1+Fr_o) y_1' (t_1' - x_1') + \frac{2}{3} - (1+Fr_o) y_1(0)' y_2' (t_1' - x_1')^2 \quad (31)$$

$$a' = 2y_1' (y_1'-1) + y_1(0)' y_2' + [y_1' (2y_1'^2 - 3y_1' + 1) + 4y_1(0)' E'] (t_1' - x_1') + y_1(0)' H' (t_1' - x_1')^2 \quad (32)$$

式中

$$H' = \frac{y_1'}{y_1(0)'} G' - E' + 3y_1' y_2' (y_1'-1) + 3y_1' E' \quad (33)$$

而

$$G' = (1+Fr_o) \left\{ -\frac{1}{4} [6y_1'^3 - 12y_1'^2 + 7y_1' - 1] + \frac{5}{3} y_1' \times (y_1'-1)^2 - \frac{5}{3} y_1' [2y_1'^2 - 3y_1' + 1] - \frac{1}{(2-Fr_o)} [2y_1'^2 - 3y_1' + 1] + \frac{2}{3(2-Fr_o)} [2 - Fr_o(1 - 1/Fr_o)^2] y_1'(y_1'-1) - 4y_1'^2 (y_1'-1) \right\} \quad (34)$$

式(25)，(28)，(31)與(32)為一組聯立非線性方程式。儘管目前在應用上有許多現成的套裝程式可供求非線性聯立方程式之「解」，例如 IMSL 的副程式 DNEQNF，DNEQNJ。但是，設定相關未知數的初始值是件相當棘手的事。除非設定了適當的開始值，否則根本無法逐次疊代以趨近於「解」。為了這個緣故，本文首先探討在容許的範圍內， a' 與 y_1' 的變化範圍如何。此處的容許範圍是指未知數 t_1' ， x_1' ， $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'$ 。採用這樣的方式是基於下列原因：(1) 在表面上看來，式(25)，(28)，(31)與(32)確實是相當複雜；但是，實際上這四個方程式的函數關係還是以時間為主，設定了時間 t_1' 之值，其他的相關值，都可直接計算而得。(2) 未知數 t_1' ， x_1' ， $y_1'(0)'$ 與 $y_2(0)'$ 的容許範圍易於界定，同時其物理意義也顯著，例如 $0 < y_1(0)' < 1$ ， $y_2(0)' < 0$ ， $t_1' < t_{max}$ 。

如上段所求，如果未知數 t_1' ， x_1' ， $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'$ 的值已知，就可由式(31)與(32)分別求得 y_1' 與 a' 。因此，在四個已知值的當中有二個值可任意輸入，剩下兩個值須由二個相關式「解」得；前者是指 $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'$ ，而後者是指 t_1' 與 x_1' 。所以，在整個討論與分析的過程中，不同的 Fr_o ， $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'$ 值可予以有系統地輸入，而後再採用一般的數值方法由式(25)與

(28)解 t_1' 與 x_1' 。以式(25)與(28)而言，函數關係以時間為主，而且相當複雜。除了必須小於 t_{max} 的條件外，還必須符合下列三個條件：(1) 不論根 t_1' 等於多少，對應的 y_2' 必須小於 0。(2) 參閱式(28)，若以 t_1' 與 x_1' 合併為一個未知數，即 $(t_1' - x_1')$ ，而不以單獨的 t_1' 與 x_1' 為未知數，則式(28)為一元二次方程式，實數根才具意義。因此，式(28)的判別式必須大於 0。(3) 計算結果顯示，根 $(t_1' - x_1')$ 的種類有二種：一是兩根皆小於 0，負根；二是正與負各一個。但是針對殘餘式(28)的結構只能採用正根，不能採用負根。式(23)，(29)，(22)與(30)顯示，不論 t_1' 值為何， A' 與 I' 的值恆大於 0，而 J' 與 y_2' 的值恆小於 0。所以，如式(28)所示，第一項的值是否大於 0 就決定於 $[A' + 2y_2' (t_1' - x_1')]$ ，而第二項則決定於 $[I' + 2J' (t_1' - x_1')]$ 。因此，若採用負根，則式(28)的值恆大於 0。在這情況下，式(28)根本不可能等於 0，也就無法「解」得 t_1' 與 x_1' 的值。滿足上述三個條件的最小時間定義為 t_{min} 。此外， t_{min} 還必須小於 t_{max} 。總而言之，只有能滿足這些條件的 Fr_o ， $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'$ 才輸入計算。其次，如前段所述，輸入值的範圍分為三層：外層為 $Fr_o = 0.2, 0.4$ 與 0.6 ；中層為 $y_1(0)' = 0.05$ 至 0.95 ，間距為 0.05；內層為 $y_2(0)'/y_1'$

$(0)' = -0.05$ 至 -0.95 ，間距為 -0.05 。每輸入一組值 ($Fr_0, y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'/y_1(0)'$)，必須先求得對應的 t_{max}' 與 t_{min}' 。計算結果顯示，雖然在合理範圍內，例如 $0 < y_1(0)' < 1$ ， $-1 < y_2(0)'/y_1(0)' < 0$ ，都可求得對應的 t_{max}' ，但 t_{min}' 就不一定。 t_{max}' 與 $y_1(0)'$ 及 $y_2(0)'$ 間的關係已展示於圖二系列，而圖四系列為 t_{min}' 與 $Fr_0, y_1(0)'$ 及 $y_2(0)'$ 間的關係。

$$\begin{aligned} Fr_0=0.2, y_1'(0)=0.05, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.25; \\ Fr_0=0.2, y_1'(0)=0.10, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.10; \\ Fr_0=0.4, y_1'(0)=0.05, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.25; \\ Fr_0=0.4, y_1'(0)=0.10, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.15; \\ Fr_0=0.4, y_1'(0)=0.15, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.10; \\ Fr_0=0.4, y_1'(0)=0.20, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.10; \\ Fr_0=0.6, y_1'(0)=0.05, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.20; \\ Fr_0=0.6, y_1'(0)=0.10, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.15; \\ Fr_0=0.6, y_1'(0)=0.15, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.15; \\ Fr_0=0.6, y_1'(0)=0.20, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.10; \\ Fr_0=0.6, y_1'(0)=0.25, y_2(0)'/y_1(0)' > -0.10. \end{aligned}$$

一般而言，較大的 $y_2(0)'/y_1(0)'$ 值，都無法求得對應的 t_{min}' 。類似於圖二系列，展示於圖四系列的結果也是由十九個線段所組成，不同的線段也是代表不同的 $y_1(0)'$ 值。每一個線段的左端點與右端點之水平座標並無規則可循，這是由於有些輸入組無法求得對應的 t_{min}' 。圖四系列顯示隨着 $[y_1(0)' - 0.1y_2(0)'/y_1(0)']$ 的增加，同一線段（或相同的 $y_1(0)'$ 值）的 t_{min}' 呈現遞減。此外，增加初時福祿數將使所有的線段向下移。

「解」聯立方程式(25)與(28)的方法相當多。不論採用那一種疊代方法，通常都是先選一個介於 t_{max}' 與 t_{min}' 間的時間 t_1' ，而後再代入式(28)，檢驗其值是否等於 0 或小於容許誤差。故式(28)可視為 t_1' 的殘餘式，以 $f(t_1')$ 表示， $f(t_1') = 0$ ，即表示根的所在。計算結果顯示，在 t_1' 介於 t_{max}' 與 t_{min}' 間的根為一個或二個等兩種情形，分別稱之為第一種情形與第二種情形，視 $Fr_0, y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'/y_1(0)'$ 的值而定。若為第一種情形，在此根的前面，還有一個「近似」根。此地所謂的「近似」根係指根的形成並不是由於 $f(t_1') = 0$ ，而是由於 $f(t_1')$ 的值已經相當小，但不可能等於 0。「近似」根的特徵為在其根的附近有兩條不與水平軸 ($t_1' = 0$) 相交的曲線。沿左邊一條，

參閱圖四系列，水平座標軸與圖二系列的相同，仍然採用 $[y_1(0)' - 0.1y_2(0)'/y_1(0)']$ ，但垂直座標軸改為 t_{min}' 。輸入值的範圍同樣地分為三層，每一層的範圍與間距都相同。計算結果顯示同時滿足前段所述的條件之範圍縮小了。每一組輸入值 ($Fr_0, y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'/y_1(0)'$) 都可求得對應的 t_{max}' 。可是對 t_{min}' 而言則不然。下列的範圍無法求得對應的 t_{min}' ：

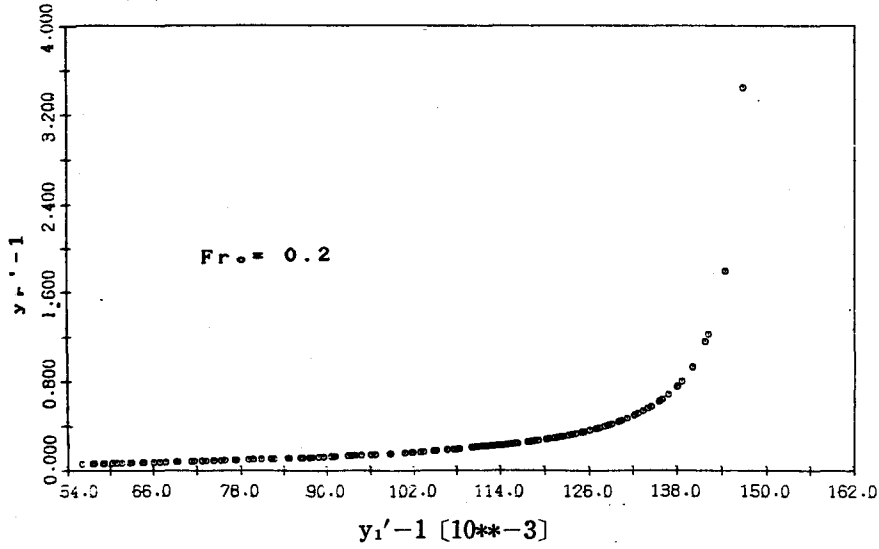
當 t_1' 的值由小而大， $f(t_1')$ 趨近於接近 0 的負值，大約 -0.03 。沿右邊一條，當 t_1' 的值由大而小， $f(t_1')$ 趨近於正無窮大。因此，在這種情形下，「近似」根的求得只能決定於兩相鄰疊代值 t_1' 的間距小於容許誤差，不能同時再滿足殘餘值小於容許誤差的條件。本文採用的最小間距為 10^{-7} ，即時間 t_1' 的有效數字為 7 位，殘餘值的絕對值只能符合小於 0.03 的需求。其次，若為第二種情形，則在第一根與第二根含一「近似」根。而後，為了便於說明起見，不再特別區分根的性質，均依其值的大小分別稱之為第一根，第二根，或（與）第三根（如果屬於第二種情形）。

如上段所述，式(28)的實數根 t_1' 可能兩個也可能三個，視 $Fr_0, y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'/y_1(0)'$ 的值而定，但是，不論採用那一個根 t_1' ，在測位站的最高水 y_1' 及其第二階偏導數 a' 必須分別大於 1 及小於 0，參閱式(31)與(32)。計算結果顯示只有最小的第一根 t_1' ，才能符合這兩個條件（符合其中的一個，同時也能符合另一個），另一個或另二個較大的根均無法同時滿足這兩個條件。這關鍵在於這兩個式的最後一項（等號右邊）。只有這一項的符號與其他項的符號相反。例如式(31)，等號右邊的第一項與第二項均大於 0，只有第三項為

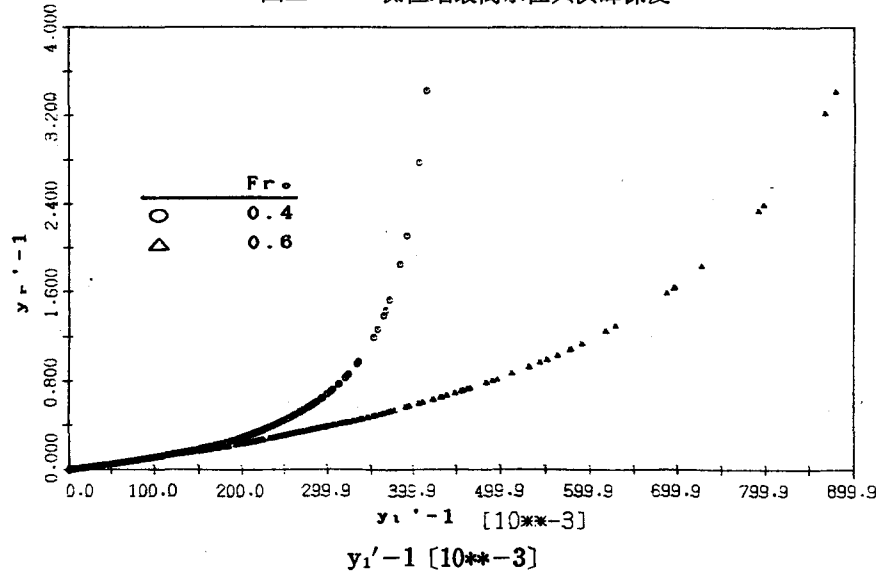
$2/3 \times (1 + Fr_0) y_1(0)' y_2' (t_1' - x_1')^3$ 小於 0。而式(32)的情況剛好相反，前三項均小於 0，只有第四項 $y_1(0)' H' (t_1' - x_1')^3$ 大於 0。各項的大小均決定於 $(t_1' - x_1')$ ，其值均大於 0，但是其值隨着 t_1' 的增加而急劇增大，正是由於這個緣故，才使得只有最小的第一根 t_1' 能滿足上述的兩個條件。

不同的 Fr_0 ， $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'/y_1(0)'$ 值有系統地輸入後，先經過前述種種判斷與屏除不適用的輸入值後，就可分別由式(31)與(32)求得測位站的最高水位 y_1' 及其第二階偏導數 a' 。求得了 t_1' 之後，就可由式(20)求洪峰位置 x_r' ，其條件

為 $\partial y / \partial x = 0$ ；再以 $t' = t_1'$ 與 $x' = x_r'$ 代入式(20)計算洪峰深度 y_r' 。洪峰流量可利用機動波 (Kinematic wave) 假設與均勻流公式，由洪峰深度 y_r' 計算而得。另外，以實用立場而言，水位記錄所提供的直接記錄是最高水位 y_1' ，而不是偏導數 a' 。因此，結果的展示採用 y_1' 為水平軸，河峰深度 y_r' 為垂直軸，兩者的關係展示於圖五系列。圖五系列顯示，不論初始福祿數 Fr_0 等於多少，洪峰深度 y_r' 均隨着最高水位 y_1' 的增加而增加。這是相當合理的，因為瞬時水面是整個升高，而不是部份升高，部份下降。



圖五・一 測位站最高水位與洪峰深度



圖五・二 測位站最高水位與洪峰深度

四、結 論

在洶湧波濤的洪水侵襲下，只有水位歷線可經由儀器測得，流速與流量根本無法測得。因此，在這種情形下，假設一個適當的函數關係式做為測位站呈現最高水位時的瞬時水面線，是個相當具有實用價值的方法。遺憾的是，函數關係式只能包含一個未定係數，不能多於一個；同時這個未定係數只能針對測位站，及測位站呈現最高水位的時刻。然而，若瞬時水面線是基於如本文所提的擾動解，則上述的多種限制就沒有必要了。目前的擾動解只採用最低的兩階近似解，故容許兩個未定係數；但是它們不再是針對某一個特定時刻，而是時間的函數，可助於了解未定係數的真相。此外，在以往的分析裏，瞬間水面線是經由假設而得的，並不是由相關方程式積分而得。所以，函數關係式內的未定係數必須藉助於額外的假設後，才足以「解」所有的未知數。這正是要假設兩峰軌跡相互平行的緣故。如果本文的分析也引用這個假設，則擾動解可擴充至第三階近似解，不過其結果相當複雜，而且難以分析。

基本上，利用水位歷線的已知最高水位 y_1' 來推測洪峰深度 y_r' 相當於「解」一組聯立代數式，而未知數為 t_1' , x_1' , $y_1(0)'$ 與 $y_2(0)'$ 。這四個未知數的初時值必須符合下列條件，才能期待由疊代方式而獲得「解」；否則，就無法獲得「解」，即使能得「解」，「解」也不見得具意義。這些條件為(1)未形成「湧」，(2) $y_1 > 0$ ，(3) $y_2 < 0$ 。

參閱圖二系列，其結果的展示係含蓋十九條線段，不同的線段代表不同的第一階初時值 $y_1(0)'$ ，而第二階初時值 $y_2(0)'$ 予以合併以 $[y_1(0)' - 0.1y_2(0)'] / y_1(0)'$ 表示其內的“0.1”是任意取的。這樣的展示不但簡潔而且清楚；不然的話，圖二·一就得分成十九張圖表示。從線段的位置與分佈看來，如果採用其他更適當的值，而不是目前所採用的“0.1”，或許圖二系列的函數圖形可能轉換成更簡潔；易言之，十九條線段可部份重疊成一條曲線，構成一一對應的關係，這是相當值得的嘗試

。類似的現象也同樣出現於圖四系列。

圖五系列表示測位站的最高水位 y_1' 與洪峰深度 y_r' 間的關係。垂直座標軸為 $y_r' - 1 (= y_r / y_0 - 1)$ ，其幅度自 0 至 4。換言之，根據本文的分析結果，最大的洪峰深度可能超過原來深度的四倍之多。以這個幅度而言，推測的洪峰深度滿能符合一般的需求，另一方面測位站的最高水位 y_1' 展示於水平座標軸 $y_1' - 1$ ，其幅度小於 1。這個幅度似乎比一般的情況小了；這顯示擾動間所推測的兩峰間距比較大，或第一階初時值比較大。

五、致 謝

本系林鈺同學的細心打字，以及研究生莊明德之繪製原圖，致本論文得以完成，作者在此謹致深厚謝意。

參 考 文 獻

1. Lighthill, M. J. and Whitham, G. B., "On Kinematic Waves I, Flood Movement in Long Rivers," Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A229 (May 1955), pp. 281-316。
2. Henderson, F. M., "Flood Waves in Prismatic Channels," Proc. Am. Soc. Civil Engrs., Vol. 89, No. HY4 (July 1963), p. 39.
3. 施清吉：「引用擴散波於洪峰流量之分析」，臺灣水利，第三十八卷第三期（1990），pp. 1-14。
4. Henderson, F. M., "Open Channel Flow" (1966), pp. 375-379。
5. 施清吉：「加置於均勻流之波動分析」，中國農業工程學報，第三十五卷第二期（1989），pp. 1-14。

收稿日期：民國81年9月26日

接受日期：民國81年10月16日