

封閉型農業環境最佳溫濕度控制系統設計

Design of an Optimal Temperature-Humidity Control System in Confined Agricultural Environments

國立宜蘭農工專校農機科副教授

廖 中 明

Chung-Min Liao

摘 要

描述封閉型農業環境中溫濕度動態行為之一對線性非耦合向量矩陣微分方程式可用以推導一最佳溫濕度控制系統中之控制器。用現代狀態變數控制理論觀點設計出一比例 (P) 及一比例加積分 (PI) 控制器作為封閉型農業環境中之一最佳溫濕度控制系統。本文採用一線性二次調節器 (LQR) 推導線性一非時變系統方程式之控制策略。文中針對三種不同之輸出或量測變數設計三種個別之控制系統，系統中考慮起始狀態 (脈衝式) 與步級干擾作用。最後並以一典型豬舍溫濕度控制設計之過程為例加以介紹。

關鍵詞：農業環境，現代控制理論，線性二次調節器，最佳反饋控制器。

ABSTRACT

A pair of linear uncoupled vector-matrix differential equations describing the dynamic behavior of temperature and humidity in confined agricultural environments is being used in the development of controllers for an optimal temperature-humidity control system. A proportional (P) and a proportional-integral (PI) feedback controllers have been designed from the view point of modern state variable control theory as an optimal temperature-humidity control system in confined agricultural environments. The linear quadratic regulators (LQRs) with output feedback control of a linear-invariant system equation is chosen for this study. Both impulse and step disturbances are taken into account. Three separate systems have been devised, each differing in the output or measured variables of interest. To illustrate this procedure, the design was applied to control the temperature-humidity in a typical swine building.

Keywords: agricultural environments, modern control theory, linear quadratic regulator, optimal feedback controller.

符 號 說 明

A	狀態變數向量之常數矩陣
B	控制變數向量之常數矩陣
C	輸出矩陣
D	干擾變數向量之常數矩陣
h_r	新鮮空氣濕度, lbw/lba
h_i	循環空氣濕度, lbw/lba
h_r	室內空氣濕度, lbw/lba
J	目標函數值
K_i	第 i 個反饋增益
K_o	反饋矩陣
M	輸出矩陣
M_s	輸出矩陣
N	輸出矩陣
Q	目標函數中之權重矩陣
Q_r	內熱負荷, B.T.U./min
R	目標函數中之權重矩陣
$T_{d,p}$	室內露點溫度, °F
T_r	新鮮空氣溫度, °F
T_i	循環空氣溫度, °F
T_r	室內溫度, °F
t, t_r	特定時間, min
t_n	通風量平均停留時間, min
u	控制變數向量
v	干擾值變數向量
v_i	干擾值
W_r	水分負荷, lbw/min
x	狀態變數向量
y	輸出變數向量
z	輸出變數向量
希臘字母	
$\delta_{(i)}$	Delta 函數
η	狀態變數變化率向量
θ	控制向量變化率
μ	輸入變數性能範圍指標
σ	輸出變數性能範圍指標
τ	特定時間, min
ϕ_r	室內相對濕度, %
ω	狀態向量變化率

1. 前 言

在前面一篇相關文章裏 (廖中明, 1990), 筆者

者曾推導出一數學模式描述封閉型農業環境溫濕度之動態行為。該模式乃由一組常微分方程式組成。前文並詳述該模式於畜舍在夏天及冬天氣候下之設計及操作上之應用。本文之主要目的則為, 以前文所開發之線性多變數模式為主, 應用現代或最佳控制理論(modern or optimal control theory) 合成一反饋控制器, 以聯合控制農業環境中之溫濕度。

下列三個系統將作為本文分析之對象。

(a) 系統 I

狀態變數為室內絕對濕度 (h_r) 及室內溫度 (T_r)。反饋變數亦為 h_r 及 T_r 。因反饋控制變數已合成, 因此, 存在於 h_r 與 T_r 中之偏差會減至極小。

(b) 系統 II

狀態變數為 h_r 及 T_r 。反饋變數則為室內露點溫度 ($T_{d,p}$) 及 T_r 。反饋控制變數已合成, 因此, 存在於室內相對濕度 (ϕ_r 及 T_r 中之偏差會減至極小。

(c) 系統 III

狀態變數為 h_r 與 T_r 。反饋變數則為 ϕ_r 及 T_r 。反饋控制已合成, 因此存在於 ϕ_r 及 T_r 中之偏差值會減至極小。

若由實用之溫濕度控制系統觀點言, 系統 II 及系統 III 則特別重要。系統 II 及系統 III 最主要之差異在於反饋或量測變數之選用上。

2. 系統 I 之反饋控制器設計

封閉型農業環境中之溫濕度動態行為可以一線性非耦合之向量-矩陣常微分方程式表示 (廖中明, 1990) :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dv, \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

其中:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta h_r \\ \Delta T_r \end{pmatrix} = \text{狀態變數向量,}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta h_i \\ \Delta T_i \end{pmatrix} = \text{控制變數向量,}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta h_r \\ \Delta T_r \\ \Delta Q_r \\ \Delta W_r \end{pmatrix} = \text{干擾變數向量,}$$

而 A, B, 及 D 則為常數矩陣。

本文將採用線性二次調節器 (linear quadratic regulator, LQR) 之原理設計系統 I 之最佳反饋控制策略。此方面之先驅研究者為 Kalman 氏 (1960)。Kalman 氏當初所處理之問題為，對一線性模式其關於二次目標函數之一最佳反饋系統做設計。然而，LQR 却有一最大之缺點，即它只能處理起始狀況 (initial condition) 或脈衝式 (impulse type) 之干擾值。

因而，在此先暫時考慮由方程式(1)所修改之式子：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_1 \quad (2a)$$

當方程式 (2a) 承受一脈衝式干擾：

$$U_i(t) = v_i \delta(t), \quad i=1, 2, \quad (2b)$$

其中干擾項 $Dv(t) = x_i \delta(t)$ ，亦即，讓 $D = x_i$ ，及 $v(t) = \delta(t)$ 。下面的研究中將會說明方程式(1)之形式的系統如何轉化為一 LQR 的形式，從而改進其反饋控制策略。

於是，給定一方程式(2)之系統，並欲決定一最佳控制變數向量 (u)，而將下列之二次目標函數極小化 (Skelton, 1988; Palm, 1983)：

$$J = \int_0^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (3)$$

其中假設 Q 為正半限定權重矩陣 (positive semi-definite weighting matrix)，而 R 則為正限定權重矩陣。從設計原理之觀點言，方程式(3)中之 $x^T Q x$ 項會壓抑由調節狀態， $x = 0$ ，而來之系統的多餘偏差值；而 $u^T R u$ 項則抑制過多控制作用的使用。於是，方程式(3)之極小化其物理作用便是用來設計以保持狀態接近零態而無過多之控制消耗。

方程式(2)及(3)便組成一 LQR。若將方程式(3)極小化，可得一存在且唯一之最佳控制變數向量 (\hat{u})，並可表示如下 (Skelton, 1988; Palm, 1983)：

$$\hat{u} = -R^{-1} B^T P^* \hat{x} \quad (4)$$

其中 P^* 為一對稱且具正限定矩陣。 P^* 亦為下列 Riccati 方程式之解：

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1} B^T P - Q, \quad P(t_f) = 0 \quad (5)$$

若 A 及 B 矩陣為常數，且當 $t_f \rightarrow \infty$ ，又當方程式(2)中之系統為具可控制性 (controllability) 時，則最佳控制向量便具線性與非時變 (time-invariant) 之性質 (skelton, 1988; palm,

1983)。

此例中，最佳控制向量可表示為：

$$\hat{u} = -R^{-1} B^T P^* \hat{x} \quad (6)$$

其中 P^* 為一對稱與正限定矩陣，且為下式代數 Riccati 方程式之解：

$$-P^* A - A^T P^* B R^{-1} B^T P^* - Q = 0 \quad (7)$$

系統具可控制性之滿足條件為：若且為若矩陣 $[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$

具 n 秩 (rank)。 n 則為向量 x 之階數 (skelton, 1988; palm, 1983)。溫濕度控制系統通常須控制在半無限 (semi-infinite) 期間內，因此，方程式(6)所提供之線性非時變控制器特別適合該控制之目的。方程式(4)與(6)顯示控制向量 (\hat{u}) 與狀態向量 (\hat{x}) 成一比例。於是，由古典控制理論之說法，方程式(6)可視為一眾所皆知之比例控制器 (P 控制器)。

2.1 系統 I 加常數干擾值

上節所述之 LQR 有一短處使得它不能應用於許多實際問題上：它僅能處理起始狀況或脈衝式干擾值。因此，方程式(1)才做暫時之修正。若方程式(1)的線性系統承受一有限步級 (finite step) 干擾，或同時承受一起始狀況及一有限步級干擾，則上節所述之最佳反饋控制器通常無法達到及維持穩定狀態之狀況，即： $x = 0$ 。因此，須對上述之 LQR 再做修正，以達所設計出之反饋控制器能維持狀態向量在 $x = 0$ ，且在任何有限常數干擾值下都能維持穩定狀態。

現則再考慮方程式(1)中之系統：

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dv, \quad x(0) = 0 \quad (1a)$$

$$V_i(t) = v_i, \quad i=1, 2 \quad (1b)$$

其中 v_i 為常數干擾值。本問題在 $x(0)$ 為非零值時，同樣可以適用 (Johnson, 1968)。假設起始狀態為系統平衡狀態，則極小化之目標函數為 (Johnson, 1968)：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T Q x + \dot{u}^T R \dot{u}] dt, \quad (8)$$

其中 Q 為正限定而 R 則為正限定矩陣。

方程式(8)之目標函數與方程式(3)的不同點為，對控制變數本身中偏差的抑制改為對控制變數變化率中偏差的控制。對方程式(1)取對時間之導數可得：

$$\ddot{x} = A \dot{x} + B \dot{u}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = Dv, \quad (9)$$

若定義，

$$\omega \equiv \dot{\mathbf{x}}, \theta \equiv \dot{\mathbf{u}},$$

則方程式(1)及(9)可改寫為下列一向量微分方程組：

$$\dot{\mathbf{x}} = \omega, \mathbf{x}(0) = 0,$$

$$\dot{\omega} = \mathbf{A}\omega + \mathbf{B}\theta, \omega(0) = \mathbf{D}\nu.$$

上式方程組可再合併改寫為：

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}_s \boldsymbol{\eta} + \mathbf{B}_s \theta, \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_1, \quad (10)$$

其中：

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \omega \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}\nu \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

方程式(8)若以新的變數代入，可改寫為：

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\eta} + \theta^T \mathbf{R} \theta] dt \quad (11)$$

其中：

$$\mathbf{Q}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{pmatrix},$$

因為 \mathbf{Q} 為正半限定矩陣，因此， \mathbf{Q}_s 亦為正半限定矩陣。於是，方程式(1)及(8)所考慮之最初問題便可下列之替代形式來說明。

給定方程式(10)中之線性系統，找一連續且不受設限之向量 θ ，讓方程式(11)呈極小化。此問題便成為一LQR，而其最佳反饋控制可表為：

$$\hat{\theta} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_s^T \mathbf{P} \hat{\boldsymbol{\eta}}, \quad (12)$$

其中 \mathbf{P} 為對稱且正限定之 Riccati 方程式之解：

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P} \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_s^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B}_s \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_s^T \mathbf{P} - \mathbf{Q}_s, \quad (13)$$

$$\mathbf{P}(t_f) = 0.$$

若方程式(10)中之系統具可控制性，且當方程式(11)中之 $t_f \rightarrow \infty$ 時，則 $\mathbf{P}(t_f) \rightarrow \mathbf{P}^*$ ；其中 \mathbf{P}^* 為下式代數 Riccati 方程式之一具對稱且正限定之解：

$$-\mathbf{P}^* \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_s^T \mathbf{P}^* + \mathbf{P}^* \mathbf{B}_s \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_s^T \mathbf{P}^* - \mathbf{Q}_s = 0. \quad (14)$$

方程式(12)中之最佳控制向量則可寫為：

$$\hat{\theta} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_s^T \mathbf{P}^* \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (15)$$

方程式(15)可再改寫為：

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{21} \\ \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\omega} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

其中 \mathbf{K}_{ij} 為矩陣 $[-\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_s^T \mathbf{P}^*]$ 的適切分割次矩陣 (appropriately partitioned submatrices)。

將方程式(16)之右式展開可得下式結果：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= [\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21}] \hat{\mathbf{x}} + [\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22}] \hat{\omega} \\ &= [\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21}] \hat{\mathbf{x}} + [\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22}] \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

若將上式對時間做積分，可改寫為：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(t) &= [\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22}] \hat{\mathbf{x}}(t) \\ &+ [\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21}] \int_0^t \hat{\mathbf{x}}(\tau) d\tau \quad (17) \end{aligned}$$

方程式(17)於是便為方程式(1)及(8)所考慮之最初問題，並帶有常數干擾值之最佳控制向量。方程式(17)為狀態向量及其時間積分值之組合。若與古典控制理論相較，則可看出方程式(17)為一比例加積分控制器 (PI) 控制器。

3. 系統 II 及 III 之反饋控制器設計

前述所導之線性二次調節器更適切地可稱為狀態調節器。因為，通常此問題乃考慮如何使狀態向量 (\mathbf{x}) 之所有元素減至極小。它亦假設狀態變數 (\mathbf{x}) 的所有元素乃是直接可用於反饋之目的，以致於控制變數 (\mathbf{u}) 可藉由狀態變數的組合而產生。然而實際上並非所有狀態變數都可視為反饋變數。再者，雖可藉由一卡門濾波 (Kalman filter) (Kalman and Bucy, 1961) 或狀態推估值 (state estimator) (Gelb, 1974) 之一些形式來建立狀態變數，然設計者倒希望藉由可用之輸出變數之線性組合來求得控制變數。

以上的考慮對於溫濕系統中狀態變數為 \mathbf{T}_r 及 \mathbf{h}_r 的情形下則很合理。然藉量測這些變數可能並不方便建立一最適反饋控制器。因為，縱使 \mathbf{T}_r 可立即量測，對 \mathbf{h}_r 之量測却非直接可得；其倒不如藉量測一些輸出變數，像露點溫度 (\mathbf{T}_{dp}) 或相對濕度 (ϕ_r) ，再藉由這些量測值替代量測 \mathbf{h}_r ，以求得反饋控制變數要來得方便些。

當反饋控制變數是由輸出變數量測值而得，則所謂輸出 LQR (output LQR) 便成為主導；而所關切之問題便是使輸出向量元素減至極小。因此，對系統 II 及 III 言，考慮的輸出向量為：

$$\text{對系統 II : } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{T}_{dp} \\ \Delta \mathbf{T}_r \end{pmatrix}.$$

$$\text{對系統 III: } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\phi_r \\ \Delta T_r \end{pmatrix}.$$

對系統 II 言，狀態變數 (x) 與輸出向量 (z) 的關係可表為：

$$z = MX,$$

其中 M 為一適切因次係數矩陣 (appropriately dimensional coefficient matrix) (M 矩陣之推導可參閱附錄)。通常 ϕ_r 及 h_r 之間並無直接的關係式存在。它們的關係一般都經由濕球或露點溫度之關係求得。因此，利用露點溫度為中間值，對系統 III 有以下之輸出關係：

$$y = Cx,$$

其中：

$$C = NM.$$

N 亦為一適切因次係數矩陣，其推導可參閱附錄。

除在新的目標函數中以 y 代替 x 外，系統 II 及 III 之主要目的與方程式 (3) 及 (8) 相似：皆欲將目標函數極小化。再者，反饋控制策略之求得將不像系統 I 中之 x 的函數，而是 z 的函數 (系統 II) 或是 y 的函數 (系統 III)。

3.1 系統 II 的比例控制

系統 II 的主要目的為，將室內相對濕度偏差 ($\Delta\phi_r$) 及室溫偏差 (ΔT_r) (即，y) 最小化，其中乃利用室內露點溫度偏差 (ΔT_{dp}) 及室溫偏差 (ΔT_r) 為量測輸出變數。

現考慮下列之系統：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \\ U_i(t) &= u_i \delta(t), \quad i=1, 2, \\ z &= Mx. \end{aligned} \quad (18)$$

並欲將下列目標函數極小化：

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^t [y^T Q y + u^T R u] dt, \\ y &= Nz = Cx, \end{aligned} \quad (19)$$

其中方程式 (19) 對相關於 y 亦有相同之設計目標函數 (即，如同方程式 (2) 相關於 x 一樣。現將 $y = Cx$ 之關係代入方程式 (19)，可得：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t [x^T C^T Q C x + u^T R u] dt \quad (20)$$

如果方程式 (18) 為具可觀測性 (observability)，則當 Q 為正半限定時， $C^T Q C$ 亦為正半限定。

系統之可觀測性乃滿足：若且為若下列矩陣

$$[C^T A^T C^T (A^T)^2 C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T]$$

具有 n 秩 (rank)。(skelton, 1988; palm, 1983)。

於是，對系統 II (當 $t_r \rightarrow \infty$ 時) 之最適控制向量為：

$$\begin{aligned} \hat{u} &= -R^{-1} B^T P_1^* \hat{x}, \\ &= -R^{-1} B^T P_1^* C^{-1} \hat{y} \end{aligned} \quad (21)$$

其中 P_1^* 為下列代數 Riccati 方程式之一正限定及對稱矩陣解：

$$-P_1^* A - A^T P_1^* + P_1^* B R^{-1} B^T P_1^* - C^T Q C = 0 \quad (22)$$

為求得方程式 (21)，系統亦假設具可控制性。系統 II 之反饋控制可由 z 之量測值導得。因此，利用方程式中之 $\hat{y} = N \hat{z}$ 的關係，最後便可導得系統 II 之比例控制策略：

$$\begin{aligned} \hat{u} &= -R^{-1} B^T P_1^* C^{-1} N \hat{z}, \\ &= -R^{-1} B^T P_1^* M^{-1} \hat{z}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中， $C^{-1} = (NM)^{-1}$ 。應注意的是，方程式 (21) 及 (23) 中均假設 C^{-1} 及 M^{-1} 之存在。Levine 與 Athans 氏 (1970) 則曾考慮過 C^{-1} 及 M^{-1} 不存在之例子。

3.2 系統 II 之比例加積分控制

考慮下列系統：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dv, \quad x(0) = 0, \\ V_i(t) &= v_i, \quad i=1, 2, \\ z &= Mx. \end{aligned} \quad (24)$$

並欲將下列目標函數極小化，以得到一最佳控制向量 (\hat{u})：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t [y^T Q y + \dot{u}^T R \dot{u}] dt, \quad (25)$$

其中方程式 (25) 相關於 \dot{u} 之設計目標與方程式 (19) 相關於 u 是相同的。將 $y = Cx$ 代入方程式 (25)，可得：

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^t [x^T C^T Q C x + \dot{u}^T R \dot{u}] dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [x^T S x + \dot{u}^T R \dot{u}] dt \end{aligned} \quad (26)$$

其中： $S = C^T Q C$ 。

將方程式 (24) 取對時間之導數，可得：

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A \dot{x} + B \dot{u}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = Dv, \\ \dot{z} &= M \dot{x} \end{aligned} \quad (27)$$

並定義：

$$\omega = \dot{x}, \theta = \dot{u}, \xi = \dot{z}$$

則方程式(24)及(27)便可改寫為下列一組向量微分方程式：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega, \quad x(0) = 0, \\ \dot{\omega} &= A\omega + B\theta, \quad \omega(0) = Dv, \\ z &= Mx, \\ \dot{\xi} &= M\omega. \end{aligned}$$

上式向量方程式組亦可合併再改寫為：

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_s \eta + B_s \theta, \quad \eta(0) = \eta_1, \\ q &= M_s \eta, \end{aligned} \quad (28)$$

其中 η, η_1, A_s 及 B_s 在方程式(10)中已定義過。方程式(28)中：

$$q = \begin{pmatrix} z \\ \xi \end{pmatrix}, \quad M_s = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

再者，若方程式(28)以新的變數代則，則目標函數可改寫為：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t [\eta^T S_s \eta + \theta^T R \theta] dt, \quad (29)$$

其中：

$$S_s = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T Q C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程式(29)中由於 S 為正半限定，因此， S_s 亦為正半限定。於是，方程式(24)及(25)中之原始輸出調節器問題便可改寫為一狀態調節器問題：給定方程式(28)之系統而欲尋找一 θ ，讓它可將方程式(29)極小化。當 $t_r \rightarrow \infty$ 時，此問題之最佳控制向量（假設方程式(24)中之系統皆滿足可控制性及可觀測性）可寫為：

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= -R^{-1} B_s^T P_1^* \hat{\eta}, \\ &= -R^{-1} B_s^T P_1^* M_s^{-1} \hat{q}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中 P_1^* 為下列代數 Riccati 方程式之一正限定及對稱解：

$$-P_1^* A_s - A_s^T P_1^* + P_1^* B_s R^{-1} B_s^T P_1^* - S_s = 0$$

方程式(30)可再改寫為：

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{\xi} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{\omega} \\ \hat{z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

其中 L_{ij} 則為矩陣 $(-R^{-1} B_s^T P_1^* M_s^{-1})$ 之適切分割次矩陣。

與方程式(10)相同之處理方式，方程式(31)可改寫為：

$$\hat{u}(t) = [L_{12} + L_{22}] \hat{z}(t) + [L_{11} + L_{22}] \int_0^t \hat{z}(\tau) d\tau, \quad (32)$$

方程式(32)則為系統 II 帶有常數干擾值之最適反饋控制器，或稱為 P I 控制器。上面的推導中亦假設 M^{-1} 及 N^{-1} 的存在。

3.3 系統 III 之比例控制

系統 III 與系統 II 大致相同，只是系統 III 最佳控制向量乃以 y 之函數表示而非 z 。因此，系統 III 之比例控制之導得亦是考慮下列系統：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_1, \\ V_i(t) &= v_i \delta(t), \quad i = 1, 2, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (33)$$

其中將量測輸出 y 代替 z 。極小化之目標函數與方程式(19)相同，即：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t [y^T Q y + u^T R u] dt.$$

在假設可控制性及可觀測性存在之前題下，如果 $t_r \rightarrow \infty$ 時，則其最佳控制向量與方程式(21)同，即：

$$\hat{u} = -R^{-1} B^T P_1^* C^{-1} \hat{y},$$

其中 P_1^* 則為方程式(22)之一正限定與對稱之解。

3.4 系統 III 之比例加積分控制

除輸出變數為 y 而非 z 之外，系統 III 之 P I 控制器之推導亦與系統 II 完全相同。因此，考慮下列系統：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dv, \quad x(0) = 0, \\ V_i(t) &= v_i, \quad i = 1, 2, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (34)$$

而極小化之目標函數則為方程式(25)，即，

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t [y^T Q y + \dot{u}^T R \dot{u}] dt.$$

假設系統為具可觀測性及可控制性，且 $t_r \rightarrow \infty$ ，則其最佳控制向量與方程式(32)相同，即，

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= [L_{12} + L_{22}] \hat{z}(t) \\ &\quad + [L_{11} + L_{21}] \int_0^t \hat{z}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

若將 $\hat{z} = N^{-1} \hat{y}$ 之關係代入上式，可導得：

$$\hat{u}(t) = [L_{12} + L_{22}]N^{-1}\hat{y}(t) + [L_{11}L_{21}]N^{-1}\int_0^t \hat{y}(\tau) d\tau \quad (35)$$

方程式(35)即為系統Ⅲ之最佳 P I 控制策略。

4. 系統模擬

上述所推導之對三個不同系統的理論分析目的乃是希望設計者可依其所需選擇不同之替代方案。然而，對這些控制器應用之數值例中，倒不須對每個不同控制系統一一介紹，因此，本文決定採用系統Ⅲ來模擬一農業微氣候中之溫濕度最佳控制系統。系統Ⅲ之 P 及 P I 控制器之結構圖則示於圖一。本文所舉實例乃以一豬舍為模擬對象。此豬舍其穩定狀態之夏天操作狀況列於表一（廖中明，1990）。

表一、穩定狀態之夏天操作狀況

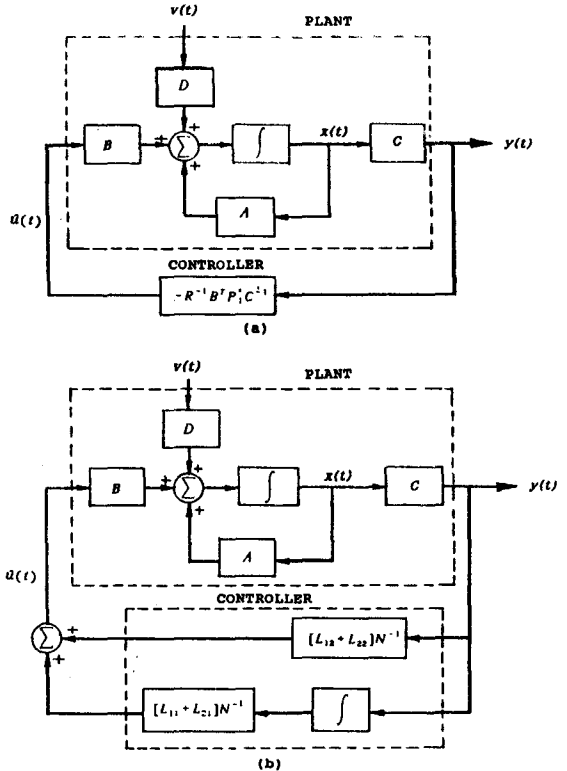
$V = 4000 \text{ FT}^3$	$W_{r,s} = 0.01467 \text{ (lb water/min)}$
$Q_{r,s} = 104.3 \text{ (BTU/min)}$	
室內： $T_{r,s} = 75^\circ\text{F}$	$h_{r,s} = 0.0093 \text{ lbw/lba}$ (50% RH)
室外： $T_{r,s} = 95^\circ\text{F}$	$h_{r,s} = 0.0186 \text{ lbw/lba}$ (52% RH)
循環空氣： $T_{i,s} = 69^\circ\text{F}$	$h_{i,s} = 0.0082 \text{ lbw/lba}$ (75% RH)
新鮮空氣質量流率： $F_{r,s} = 140 \text{ lba/min}$	
循環空氣質量流率： $F_{i,s} = 1253 \text{ lba/min}$	
畜舍內總空氣質量流率： $(F_{i,s} + F_{r,s})v_{r,s} = 79225 \text{ FT}^3/\text{min}$	

模擬分兩種不同狀況討論。第一種狀況為：假設系統受室外干擾值影響，即戶外溫度 (T_r) 及戶外濕度 (h_r) 承受一突然之步級變化。假設 T_r 由 $T_{r,s}$ 變為 $T_{r,s} + 10^\circ\text{F}$ 而 h_r 則由 $h_{r,s}$ 變成 $h_{r,s} + 0.003 \text{ lbw/lba}$ 第二種狀況則假設畜舍內由於豬隻或工作人員的突增而造成系統之干擾現象。狀況 2 假設畜舍內熱負荷 Q_r 及濕負荷 ω_r 都承受一步級改變： Q_r 由 $Q_{r,s}$ 變為 $Q_{r,s} + 60 \text{ BTU/min}$ 而 ω_r 則由 $\omega_{r,s}$ 變為 $\omega_{r,s} + 0.045 \text{ lbw/min}$ 。

上述干擾例子中，其相關之室內溫度 (T_r) 及室內相對濕度 (ϕ_r) 在 P 及 P I 調節器動作下之最佳反饋控制器之反應皆模擬，並以圖形來做分析與討論。所有圖形結果皆以無因次時間， \bar{t} 之函數表

示。在此定義 $\bar{t} = t/t_n$ ，其中 t = 時間，而 t_n 則為畜舍通風流量之平均停留時間 (mean holding time)；因此， $\tau = V / \{(F_{i,s} + F_{r,s}) / v_{r,s}\}$ 。

數值分析之第一步驟為證明該系統為具可觀測性及可控制性。計算結果屬實。接着便分析目標函數中之 Q 及 R 兩權重矩陣的影響。Q 及 R 兩矩陣在此皆選用對角矩陣，即，



圖一、控制系統Ⅲ之結構：(a)最佳 P 控制；
(b)最佳 P I 控制

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}$$

因此，方程式(19)及(25)則可分別表示為：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (q_{11}y_1^2 + q_{22}y_2^2 + r_{11}u_1^2 + r_{22}u_2^2) dt \quad (36)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (q_{11}y_1^2 + q_{22}y_2^2 + r_{11}\dot{u}_1^2 + r_{22}\dot{u}_2^2) dt \quad (37)$$

其中：

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}$$

由於方程式(36)及(37)中之 y_1 , u_1 及 \dot{u}_1 具不同大小階數 (order of magnitude), 因此, 一些相似之比例因子 (scaling factor) 可用來做為選擇 q_{11} , q_{22} , r_{11} , 及 r_{22} 之依據。若這些比例因子皆被選用, 則存在於方程式(36)及(37)中之狀態變數之偏差才會有相同之大小階數。相同地, 所有存在於控制變數中之偏差才會有相同大小階數 (Skelton, 1988)。例如, 若 $q_{11}y_1^2$ 及 $q_{22}y_2^2$ 為相同大小階數, 即,

$$q_{11}y_1^2 = q_{22}y_2^2,$$

於是,

$$q_{11}/q_{22} = y_2^2/y_1^2.$$

權重矩陣則可由下列方法得其特定之性能範圍 (performance bound) (Skelton and De Lorenzo, 1985):

$$\int_0^{\infty} y_i^2(t) dt \leq \sigma_i^2, \text{ 及 } \int_0^{\infty} u_i^2(t) dt \leq \mu_i^2, \quad i=1, 2, \quad (38)$$

而多變量之輸出及輸入值的均方根值 (root mean square value, RMS) 可用來決定此性能範圍:

$$y_{i\text{RMS}} = \left[\int_0^{\infty} y_i^2(t) dt \right]^{1/2}, \text{ 及 } u_{i\text{RMS}} = \left[\int_0^{\infty} u_i^2(t) dt \right]^{1/2}, \quad i=1, 2. \quad (39)$$

在此特例中, 可同時要求將輸出之量測值, 即 $\Delta\phi_r$ 及 ΔT_r 之 RMS 值設限在一定範圍內; 假設在暫態期間, $y_{1\text{RMS}}$ 的階數大約在 10^{-4} , $y_{2\text{RMS}}$ 為 1; 而 $u_{1\text{RMS}}$ 為 10^{-6} , $u_{2\text{RMS}}$ 則為 1。因此,

$$q_{22} \approx 10^{-4} q_{11},$$

同理可得,

$$r_{22} \approx 10^{-6} r_{11}.$$

由於沒有一般規則可循以推導出 u_1^2 及 \dot{u}_1^2 之階數關係, 因此本文假設它們都具有相同大小階數。亦即, $u_1^2 = \dot{u}_1^2 \approx 10^{-6}$, 而 $u_2^2 = \dot{u}_2^2 \approx 1$ 。於是, 在開始分析中只須調整 q_{11} 及 r_{11} 值, 而 q_{22} 及 r_{22} 值却可藉上述比例因子關係固定於一個定值上。本文分析中則令 $r_{11} = 1$, 而僅 q_{11} 值變動。關於非線性代數 Riccati 方程式的數值解法則依循一簡單之非自迴 (Nonrecursive) 法則 (Vaughan, 1970)。

模式模擬中, 系統 III 之最佳 P 控制可表示為:

$$\hat{u}(t) = -R^{-1} B^T P_1 * c^{-1} \hat{y}(t),$$

$$= K_0 \hat{y}, \quad (40)$$

上式可再改寫為:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} \hat{y}_1(t) \\ \hat{y}_2(t) \end{pmatrix}. \quad (41)$$

K_0 矩陣中之元素: K_{11} , K_{12} , K_{21} , 及 K_{22} 則是須求得之反饋增益 (feedback gains)。

在 P I 控制策略模擬中, 最佳控制向量可表為:

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^{-1} \int_0^t \hat{y}(\tau) d\tau \\ N^{-1} \hat{y}(t) \end{pmatrix} = K_0 \begin{pmatrix} \int_0^t \hat{y}(\tau) d\tau \\ \hat{y}(t) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

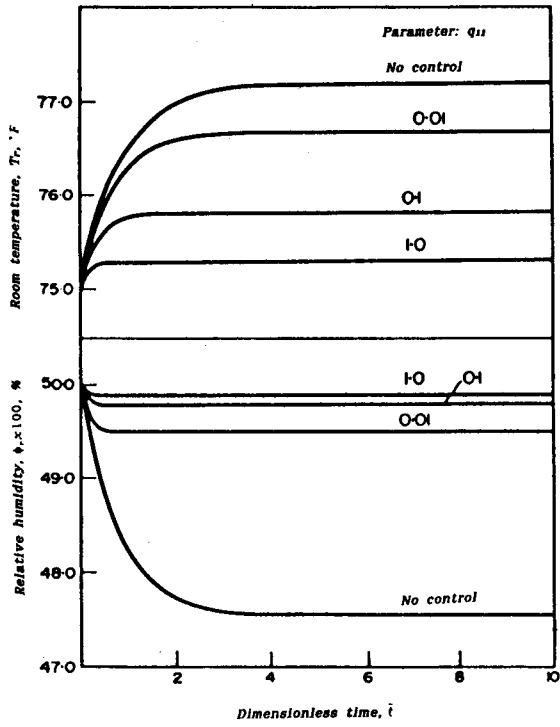
上式可再表示為:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} \int_0^t \hat{y}_1(\tau) d\tau \\ \int_0^t \hat{y}_2(\tau) d\tau \\ \hat{y}_1(t) \\ \hat{y}_2(t) \end{pmatrix} \quad (43)$$

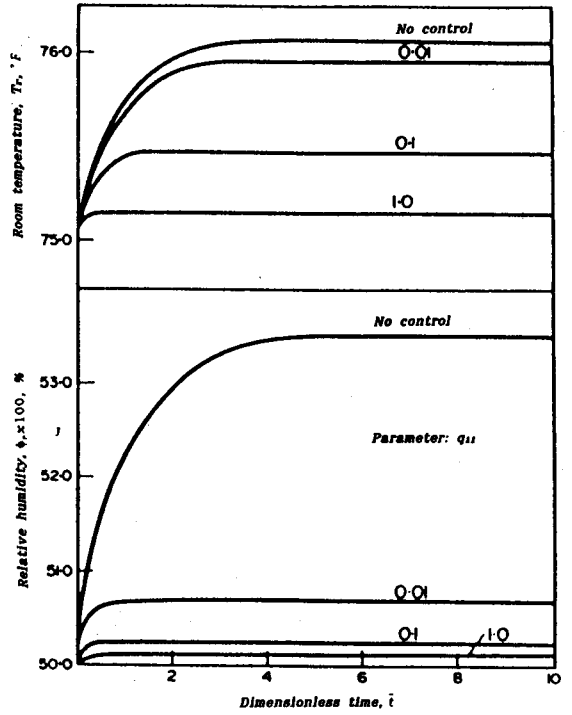
因此, 在 P I 控制中最重要之控制參數則為八個反饋增益: K_{13} , K_{14} , K_{11} , K_{12} , K_{24} , K_{21} , 及 K_{22} 。

狀況 1. 圖二及圖三所示分別為在 P 及 P I 控制模式動作下之 T_r 及 ϕ_r 的反應。兩圖形中, q_{11} 為參數值; 且由圖中很明顯地可看出只要改變 q_{11} 值, 便可得到欲求之 T_r 及 ϕ_r 之反應。如果需要, 亦可改變上述之比例因子來達到所須之反應。這也顯示出適當的選擇權重矩陣, 也許可包括藉由對狀態或控制變數設限之非直接形式之獲得。由圖二及圖三之比較可看出 P I 控制較 P 控制來得更佳, 此乃由於前者可使控制策略成一阻尼式 (damped) 反應, 亦無穩定狀態漂移 (offset) 或越過式 (overshoot) 圖形產生。雖然 P 控制可藉增加 q_{11} 值來減小支矩, 然而, 在操作 P 控制時却會有一最適移去 (trade-off) 介於可接受之穩定狀態支矩及由設計或經濟考慮所定出之 q_{11} 值之上限。

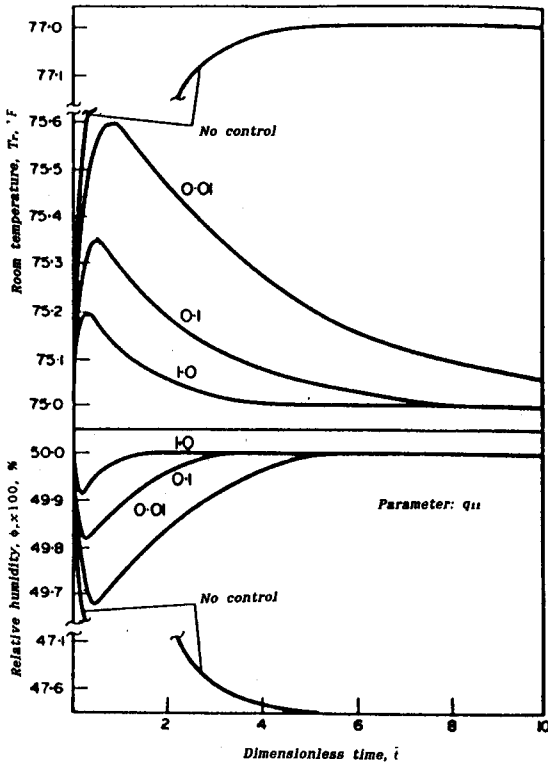
狀況 2. T_r 及 ϕ_r 承受 P 及 P I 調節動作之最適反應示於圖四及圖五。對圖二及圖三的分析亦可應用在圖四及圖五中。由圖二至圖五中可明顯地看出對存在於 ϕ_r 中之偏差值壓抑的權重要比對 T_r



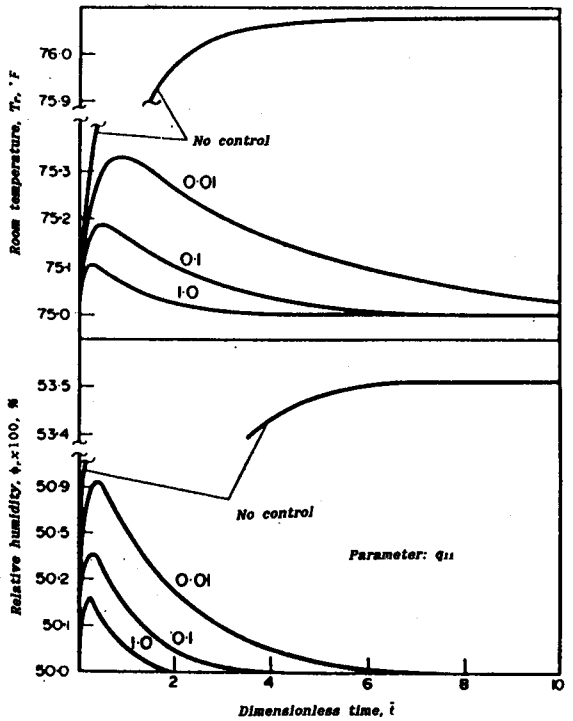
圖二、P 控制動作下之溫度及相對濕度反應 (狀況 1)



圖四、P 控制動作下之溫度及相對濕度反應 (狀況 2)



圖三、P I 控制動作下之溫度及相對濕度反應 (狀況 1)



圖五、P I 控制動作下之溫度及相對濕度反應 (狀況 2)

來得多些。然而，這僅是上述所採用比例因子的結果。因此，若要解決此一不平衡之權重分配，也許可調整比例因子。這乃決定於設計者之原則及對偏差值， y_1 及 y_2 ，的考慮上。

5. 結論與建議

(1) 本文乃利用最佳控制理論對封閉型農業環境中溫濕度的聯合控制設計出最佳反饋控制器。且針對不同之輸出或量測變數亦設計出三種個別之控制系統。

(2) 最佳化乃基於將一特殊之積分二次目標函數極小化。亦即，將室內溫度及室內相對濕度與控制作用做極小化。起始狀況（脈衝式）與步級干擾作用皆考慮進控制模式中。並利用現代控制理論合成最佳 P 及 P I 控制器。

(3) 控制系統設計後，設計者尚不能很準確地達到預期系統中系統元素或系統參數之正常操作之特性。因此，在日後之設計中應將靈敏度分析考慮進去，以評估理論結果之價值。

參 考 文 獻

1. 廖中明 • 1990 • 封閉型農業環境之溫濕度動態行為分析 • 中國農工學報 36(4) : 39-49。
2. Gelb, A. 1974. Applied optimal estimation(ed.) The MIT Press, Mass.
3. Johnson, C.D. 1968. Optimal control of the linear regulator with constant disturbance. IEEE Trans. Automation Control AC-13: 416-421.
4. Kalman, R. E. 1960. Contribution to the theory of optimal control. Boletin de Sociedoa Matematica Mexicana 5:102-119.
5. Kalman, R. E., and R. S. Bucy. 1961. New results in linear filtering and prediction theory. Trans. ASME, J. Basic Eng. 83:95-106.
6. Levine, W. S., and M. Athans. 1970. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems. IEEE Trans. Automation Control AC-15:44-56.

7. Palm III, W.J. 1983. Modeling, analysis and control of dynamic systems. John Wiley & Sons, New York, New York, N. Y.
8. Skelton, R. E. 1988. Dynamic systems control. John Wiley & Sons, New York, N. Y.
9. Skelton, R.E., and M. DeLorenzo. 1985. Space structure control design by variance assignment. AIAA, J. Guidance, Control and Dynamics 8(4):454-462.
10. Vaughan, D. A. 1970. A nonrecursive algebraic solution for the discrete Riccati equation. IEEE Trans. Automation Control AC-15:597-599.
11. Wood, L.A. 1970. The use of dew-point temperature in humidity calculations. J. Res. Nati. Bur. Stand. 74c:117-122.

附 錄

M 矩陣及 N 矩陣之推導

室內露點溫度 ($T_{d,p}$) 與室內絕對濕度 (h_r) 有以下之關係存在 (Wood, 1970) :

$$T_{d,p} = \frac{\beta}{\alpha - \log \left[\frac{\pi}{1 + \left(\frac{M_w}{M_a} \right) \frac{1}{h_r}} \right]} - \gamma, \quad (A1)$$

其中 :

$$\begin{aligned} \alpha &= 6.70282, \\ \beta &= 3150.52^\circ \text{F}, \\ \gamma &= 391.0^\circ \text{F}, \\ \pi &= \text{總壓力, in Hg}, \\ M_a &= \text{空氣分子量, 28.8}, \\ M_w &= \text{水分子量, 18.0} \end{aligned}$$

上式關係為非線性，因此，須先將其線性化以求得介於 h_r 及 $T_{d,p}$ 之一線性轉換。若方程式 (A1) 是以設點 (set-point) 值， $T_{d,p}^*$ 及 h_r^* ，為主導之線性化過程，則由偏差變數組成之線性表示式可寫為：

$$\Delta T_{d,p} = \left(\frac{\partial T_{d,p}}{\partial h_r} \right) * \Delta h_r, \quad (A2)$$

其中：

$$\Delta T_{d,p} = T_{d,p} - T_{d,p}^*,$$

$$\Delta h_r = h_r - h_r^*$$

$$\left(\frac{\partial T_{dp}}{\partial h_r}\right)^* = \frac{(T_{dp}^* + \gamma)^2}{\beta} \left[\frac{0.27139}{h_r^*(h_r^* + 0.625)} \right]$$

上式“*”則為設點值。

再者，室內露點溫度 (T_{dp}) 與室內相對濕度 (ϕ_r) 之關係可寫為 (Wood, 1970) :

$$\log \phi_r = \beta \left[\frac{1}{T_r + \gamma} - \frac{1}{T_{dp} + \gamma} \right] \quad (A3)$$

若方程式 (A3) 為以設點值, ϕ_r^* , T_{dp} , 及 T_r^* 為主導之線性化過程, 則:

$$\Delta \phi_r = \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial T_{dp}}\right)^* \Delta T_{dp} + \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial T_r}\right)^* \Delta T_r \quad (A4)$$

其中:

$$\Delta \phi_r = \phi_r - \phi_r^*$$

$$\Delta T_r = T_r - T_r^*$$

$$\left(\frac{\partial \phi_r}{\partial T_{dp}}\right)^* = \frac{2.303\beta\phi_r^*}{(T_{dp}^* + \gamma)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \phi_r}{\partial T_r}\right)^* = -\frac{2.303\beta\phi_r^*}{(T_r^* + \gamma)^2}$$

再定義:

$$y = \begin{pmatrix} \Delta \phi_r \\ \Delta T_r \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \Delta T_{dp} \\ \Delta T_r \end{pmatrix}$$

於是, 相關於 x , y , 及 z 的轉變, 便可由方程式 (A2) 及 (A) 求得:

$$z = Mx \text{ 及 } y = Nz$$

其中:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial T_{dp}}{\partial h_r}\right)^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial T_{dp}}\right)^* & \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial T_r}\right)^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上述M及N矩陣則皆為常數矩陣。

收稿日期: 民國80年 4月11日

修正日期: 民國81年 2月 4日

接受日期: 民國81年 2月28日

清淮企業有限公司

負責人: 侯百能

地址: 台中縣外埔鄉土城路154-1號

電話: (037)881485