

專 論

黏滯流通過方形障礙物之流場模擬

A Numerical Simulation of Viscous Flow

Passing a Square Structure

淡江大學水資源及環境工程研究所教授

淡江大學水資源及環境工程研究所研究生

曾 振 遠

劉 佳 興

Cheng-Yuan Tseng

J. S. Liou

摘 要

本研究以數值方法模擬黏滯流通過方形障礙物，探討的主題為尾流形成區漩渦的形成與運動及受力情形。數值方法採用顯性有限差分法，以 Navier-Stokes 方程式為控制方程式，其中時間項取前項差分、對流項取權重上風法 (Weight Upwind)、阻力項與壓力項取中央差分。模擬之流況雷諾數分別為 100、250、400。

探討之物理量分別為速度、壓力、阻力及史脫荷數 (Strouhal number)，以流線圖及速度分布圖說明流場運動情形。結果顯示漩渦形成與運動，依序為對稱的漩渦隨時間的增加長度繼續增大直到形成不對稱漩渦，最後上下交替分離，產生週期性的卡門漩渦羣 (Karman vortex street)。

本文中分析阻力的方法，依據控制體積動量積分方程式，此方法不僅獲得阻力，並且可以驗證模擬結果符合動量守恒，值得採用。結果顯示阻力隨時間的增加亦上下振動，具有週期性之特徵，阻力振動頻率為卡門漩渦羣上下擺動之兩倍。

ABSTRACT

The purpose of this paper is to present streamline, velocity profile and drag coefficient for the flow field of viscous flow pass a square structure. The governing equation of this analysis is Navier-Stokes equation. The numerical method is an explicit differencing scheme, which is using weight-upwind difference for convection terms, central difference for viscous and pressure terms.

The streamline and velocity profile of the flow field have shown the initiation and subsequent developed of the vortex-shedding phenomenon at different Reynolds Numbers of 100, 250 and 400. The alternative vortexes are visualized in the near wake behind the structure. The drag force is found by methods of the control volume theory. The drag coefficient also reveals the oscillatory character, which has double vortex shedding frequency. The model will apply to predict the effect of the wind-force on building structure.

一、前 言

當流體流經一障礙物，產生複雜的流場變化，依流動狀況可分成爲三區討論：(1)形成區(Formationzone)；(2)穩定區(Stable zone)；(3)衰減區(Decay zone)。1912 Von Karman⁽¹¹⁾發表有關卡門漩渦羣(Karman vortex street)論著，以勢能流理論解析在穩定區之流場。對於尾流(wake)的形成與運動及受力情形已有很多學者專注本主體的研究^(1,4,5,9,13)，有關黏滯尾流形成原理至今仍是流體力學專家所探討的專題之一。尾流之渦流運動對流體中構造物設計，有相當重要的影響；以固定在地面上之建築物爲例，建築物的設計強度必須足以抗衡流體拖曳力(Drag force)，於尾流區因渦流產生的振動(Vortex-induced vibration)頻率，假若與構造物設計頻率相同，構造物必須承受共振的風險^(20,22)。其他如橋墩等水工結構物亦影響甚鉅。因此探討流體流經形狀不同構造物，形成尾流漩渦的特性及運動是必須且是相當重要的，此乃本研究之動機。

黏滯流通過一方形障礙物之流場分析，其控制方程式係分別由連續方程式及動量方程式推演而得之兩個偏微分方程式，因二偏微分方程式屬非線性，是故其理論解析無法求得。近數拾年來學者均以實驗及計算機來模擬分析，其中大部份均是以圓柱體及平板構造物爲分析對象^(9,15,21,23)，甚少涉及方形構造物之研究，而方形構造物在實際工程上之應用却相當廣泛，例如：建築物、橋墩等水工結構物。1982 DAVIS⁽⁷⁾採用矩形體做爲流場模擬之對象，其使用數值方法爲顯性有限差分法，以Navier-Stokes 爲控制方程式，其中對流項以三次上風差分技巧(third-order upwind differencing)表率。結果顯示，漩渦運動與雷諾數有密切關係，此可由阻力及史脫荷數(Strouhal Number)之結果證明；由於採用高次內插函數，所以對於邊界的處理比較複雜，此乃本方法之主要缺點。此外，DAVIS 僅引用數值模擬之史脫荷數與實驗結果相驗證，至於障礙物的受力情形却沒進一步的驗證分析。

追隨文獻中以數值方法分析流體通過障礙物之流場，可分爲兩大類方法：(1)近似勢能流方法(Approximation potential method)；(2)Navier-Stokes 方法。第一類方法將流場分爲

外區(Outer)及內區(Inner)，外區用勢能流方法分析流場，內區在分離點之前，受邊界層作用(Boundary Layer)，分離點之後，受分離的邊界層(Separated boundary layer)作用，此種方法合併了理論分析與數值方法⁽⁸⁾，由於內外區交接面的處理尙有待討論中。

第二類方法求解 Navier-Stokes 方程式，又可分爲兩種：第一種直接求解速度——壓力方法，第二種方法將 Navier-Stokes 方程式轉成渦度擴散方程式(Vorticity transport equation)，求解的變數分爲流函數(Stream function)及渦度值(Vorticity)，再由流函數與速度的關係，求得速度。這種方法優點是控制方程式本身已滿足連續方程式，又在轉換過程中，將壓力項去除，省略了求解壓力的過程中。Payne⁽¹⁵⁾首先應用此方法成功的求出流場數值解。這種方法的缺點在邊界上渦度假設較爲困難。第一種方法直接求解流場的基本變數——速度與壓力，其優點及實際性是未來數值解的趨勢，基本上它可擴充至三維，針對流場障礙物，亦可增加其複雜性，由單一障礙物擴充到障礙物羣，探討障礙物羣之間的交互作用，爲實際應用問題。

採 Navier-Stokes 方程式有不能模擬高雷諾數流況的缺點，然而以近似勢能流方法可以克服此困難。

本文目的爲探討黏滯流體通過障礙物之二維流場，以方形構造物爲模擬對象，採用數值模擬對流場尾流漩渦的形成，分析漩渦運動及受力情形。數值模擬結果必須與實驗結果相互驗證，才能證明結果的可靠性，本文僅提出數值模擬結果，有關實驗的證明有待進一步研究中。

註：[] 表示參考文獻的編號。

二、理論解析

本研究係以非壓縮的流場運動爲模擬對象，流場爲無限大區域，入口處爲均勻流速。由於邊界層分離效應(Separation)流體無法半順繞過方形體的背面轉彎，所以於尾流區形成導稱渦流——附着渦流(Attached eddy)，隨時間發展尾流區出現再分離的流場變化，出現上下交替不對稱渦流運動——卡門漩渦羣，漩渦繼續往下游流動，由於黏滯力作用所以漩渦衰減。

2-1 控制方程式建立

對於一均勻流通過障礙物的流場，分析過程依據下列假設：

- (1) 障礙物為方形體，長寬各為 B ；
- (2) 流體本身為不可壓縮流；
- (3) 黏滯係數為定值的連續體，滿足牛頓流體的特性，剪應變與應力成線性關係；
- (4) 二維流場， Z 軸方向為一單位長；
- (5) 忽略重力作用。

以下求解，以無因次連續方程式，及動量方程式為流場控制方程式。

1. 連續方程式 (Continuity Equation)

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

2. 動量方程式 (Momentum Equation)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

流場之無因次化 (Dimensionless)

$$x = \frac{x}{B}, y = \frac{y}{B}, u = \frac{u}{U_0}, v = \frac{v}{U_0} \quad (2.3)$$

$$P = \frac{P}{\rho U_0^2}, t = \frac{t}{t_0}, t_0 = \frac{B}{U_0} \quad (2.4)$$

B ：特徵長度，方塊的寬。

U_0 ：參考速度，設為自由流流速。

t_0 ：參考時間（流體質點以自由流流速，越過特徵長度所需要的時間。）

其中 $Re = \frac{U_0 B}{\nu}$ 為雷諾數 (Reynold Number)。

方程式中上加橫線者代表有因次變數，加箭頭為代表向量變數。

由(2.1)、(2.2)式可知，在卡氏平面座標系 (Cartesian coordinate) (x, y)，自變數為 x, y, t ，因變數為 u, v, p ；三個方程式，配合適當的邊界及初始條件，可以解出任一時段、任一位置的流況。

2-2 流場邊界條件與初始條件

由於障礙物的存在，造成對自由流 (Free-Stream) 的干擾，此干擾往兩側及上游傳遞的距離為有限，然而此干擾卻可以繼續往下游傳遞至無窮遠處 [16, P. 384]。由於數值運算只能在有限的區域進行，因此下游邊界可嘗試選取足夠大的長度，來模擬無限大的邊界。

1. 流場邊界條件為：(如圖2-1，表2-1)

- (1) 上游入口：均勻流速 (Uniform)；
- (2) 下游出口：速度梯度為零；
- (3) 兩側：為理想流狀態，不受黏滯性影響；
- (4) 障礙物之四周：為不可滑動 (No-Slip)

$$u = 0, v = 0。$$

2. 流場初始條件：

$t = 0$ ，除了障礙物之外，整個流場為均勻流場。

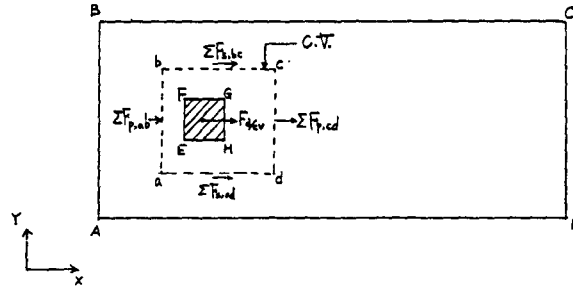


圖 2-1 流場示意圖

表 2-1 邊界條件之數學關係式

邊 界	說 明	數 學 式 表 示
AB	入 口	$u = U_0, v = 0$
BC	側 邊	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
CD	出 口	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$
AD	側 邊	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
EFCH	障 礙 物	$u = 0 \quad v = 0$

2-3 流場阻力計算

由於分離效應，流動對障礙物產生形狀阻力 (Form Drag)，流體黏滯性產生表皮摩阻力 (Skin Friction Drag)，這兩者合稱阻力 (Drag Force) 或拖曳力。

依據牛頓第二運動定律如有力作用於一物體力必會引起動量的改變，設此作用為 F ，此力在 X 軸的分量為 F_x ； Y 軸的分量為 F_y 。採用上述的理論，應用動量的改變，可以計算流動對障礙物沿流動方向的拖曳力 (Drag Force)。於流場任意選取一控制體積 (Control Volume)，以選取長方形較為方便 (圖2-1)。

應用控制體積理論於選取之控制體上，分析拖曳力採作用在X方向的控制體積動量方程式。作用在控制體積上的力，分別為淨壓力（ F_p ）、剪力（ F_s ）、拖曳力（ $F_{d/c.o}$ ）。

$$F_x = \frac{d}{dt} (\overline{m\bar{u}}) \quad (2.5)$$

$$F_x = \Sigma F_p + \Sigma F_s + F_{d/c.o} \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt} (\overline{m\bar{u}}) = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.o.} \rho d\bar{R} + \iint_{c.s.} \rho \bar{u} (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (2.7)$$

其中 \bar{R} ：控制體積（有因次）

\vec{A} ：進出控制體的表面積（有因次）

分析過程依據下列假設：

(1)控制體不隨時間而變化，所以

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.o.} \rho d\bar{R} = 0 ;$$

(2)流體本身為不可壓縮流， $\rho = \text{const}$ ；

(3)二維流場，Z軸方向為一單位長；

(4)流體滿足牛頓流體的特性。

其主要理論公式如下：

1.作用在控制體a b面及c d面，才會造成x方向的淨壓力。

$$\Sigma F_p = \Sigma F_{p,a,b} - \Sigma F_{p,c,d} = \int_a^b \bar{P} d\bar{y} - \int_c^d \bar{P} d\bar{y} \quad (2.8)$$

2.作用在控制體b c面及a d面的剪力。

$$\Sigma F_s = \Sigma F_{s,b,c} - \Sigma F_{s,a,d} = \int_b^c \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} d\bar{x} - \int_a^d \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} d\bar{x} \quad (2.9)$$

3.作用在控制體拖曳力。

$$F_{d/c.o} = C_d \cdot \frac{1}{2} \rho U_2^2 B \quad (2.10)$$

4.離開控制體的線動量淨流出率。

$$\begin{aligned} \iint_{c.s.} \rho \bar{u} (\vec{V} \cdot d\vec{A}) &= \int_a^c \rho \bar{u}^2 d\bar{y} \\ &+ \int_b^c \rho \bar{u} \bar{v} d\bar{x} - \int_a^b \rho \bar{u}^2 d\bar{y} \\ &- \int_a^d \rho \bar{u} \bar{v} d\bar{x} \quad (2.11) \end{aligned}$$

由於本研究的數值結果為無因次，所以將控制

體積動量方程式同樣取為無因次較為方便。由無因次關係式(2.3)及(2.4)：(2.8)~(2.11)分別改寫成(2.12)~(2.15)

$$\Sigma F_p = \rho U_0^2 B \left(\int_a^b P dy - \int_c^d P dy \right) \quad (2.12)$$

$$\Sigma F_s = \rho U_0^2 B \left(\int_b^c \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} dx - \int_a^b \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) \quad (2.13)$$

$$F_{d/c.o} = \rho U_0^2 B \left(-\frac{C_d}{2} \right) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \iint_{c.s.} \rho \bar{u} \vec{V} \cdot d\vec{A} &= \rho U_0^2 B \left(\int_a^c u (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \right. \\ &= \rho U_0^2 B \left(\int_a^c u^2 dy + \int_b^c uv dx \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b u^2 dy - \int_a^d uv dx \right) \quad (2.15) \end{aligned}$$

將(2.12)，(2.13)，(2.14)，(2.15)代入(2.5)，(2.6)，(2.7)式，得：

$$\begin{aligned} C_d &= 2 \left(\int_a^b P dy - \int_c^d P dy + \int_b^c \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} dx + \int_a^b u^2 dy + \int_a^d uv dx \right. \\ &\quad \left. - \int_c^d u^2 dy - \int_b^c uv dx \right) \quad (2.16) \end{aligned}$$

對於流場受力情形分析，本研究僅探討障礙物的阻力，由(2.16)阻力係數關係式，配合無因次流場控制方程式所計算速度及壓力結果，可得流場中阻力係數。

三、數值分析方法

本文所採用的數值方法為顯性有限差分法，使用交錯網路，壓力位於格網中心，速度分量分別位於格網四邊（如圖3-1）。此種網格類似控制體積，收斂性比較好。網格間距隨流場的位置而變化（不規則格點），方塊四周的邊界層，及尾流區構建較稠密，而在變化較少的區域，格點選取較疏。

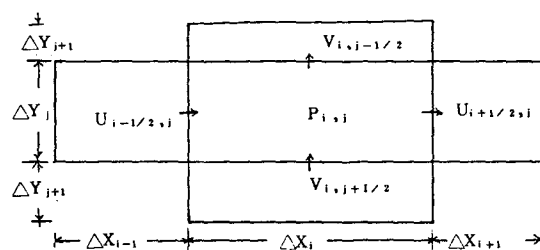


圖 3-1 流場網路及U.V.P的配置圖

- (1) 壓力位於格網中心，以 $P_{i,j}$ 表示；
- (2) X 方向速度分量在格網右邊及左邊，分別表示成 $U_{i+1/2,j}$ ， $U_{i-1/2,j}$ ；
- (3) Y 方向速度分量在格網頂部及底部，分別表示成 $V_{i,j+1/2}$ ， $V_{i,j-1/2}$ ；
- (4) X 方向註標以 i 表示；
- (5) Y 方向註標以 j 表示；
- (6) 爲了方便撰寫程式，以 $i^* = i + 1/2$ 及 $j^* = j + 1/2$ 。

由於採非均勻網格，網格間距除了 ΔX_i ， ΔY_j ，格網 (i, j) 中心與格網 $(i, j + 1)$ ，與格網 $(i + 1, j)$ 中心間距，亦是重要數值運算參數：

$$\Delta X_{i+1} = \frac{1}{2}(\Delta X_i + \Delta X_{i+1})$$

$$\Delta Y_{j+1} = \frac{1}{2}(\Delta Y_j + \Delta Y_{j+1})$$

3-1 差分方程式建立

1. 動量差分方程式

- (1) 時間項：取前項差分。
 - (2) 壓力梯度，阻力項：取中央差分。
 - (3) 對流項：取權重上風法 (Weight Upwind)
- 由方程式(2.2)可知 X 的方向動量方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

（ $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ ）與 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ 均爲對流項表示法，然而以差分式分析，兩者的結果並不相同，（因經由泰勒展開式捨去高次項——截尾誤差 (Truncation error)，一般採後者 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ 有較好的結果⁽¹⁶⁾。

所以 X 及 Y 方向動量方程式改寫成：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

於網格 (i, j) 動量差分方程式：

$$\hat{u}_{i^*,j}^{n+1} = u_{i^*,j}^n + \Delta t [-DPDX^n - DUUDX^n - DVUDY^n + VISX^n] \quad (3.3)$$

$$\hat{v}_{i^*,j}^{n+1} = v_{i^*,j}^n + \Delta t [-DPDY^n - DUVDX^n - DVVDY^n + VISY^n] \quad (3.4)$$

(3.3) 及 (3.4) 式 $\hat{u}_{i^*,j}^{n+1}$ 、 $\hat{v}_{i^*,j}^{n+1}$ 爲 $n + 1$ 時段的預測值， $DPDX^n$ 、 $DUUDX^n$ 、 $DVUDY^n$ 、 $VISX^n$ 、 $DPDY^n$ 、 $DUVDX^n$ 、 $DVVDY^n$ 、 $VISY^n$ 分別可由差分理論推導出。

2. 連續差分方程式

由動量差分方程式(3.3)、(3.4)分別計算 $n + 1$ 時間的速度預測值，代入速度差分方程式，等號右邊 D 爲散度 (divergence)，假如 $D = 0$ ，表示結果符合質量不減法則。

於網格 (i, j) 連續差分方程式：

$$\frac{1}{\Delta v_i} (\hat{u}_{i^*,j}^{n+1} - \hat{u}_{i^*-1,j}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y_i} (\hat{v}_{i^*,j}^{n+1} - \hat{v}_{i^*,j-1}^{n+1}) = D \quad (3.5)$$

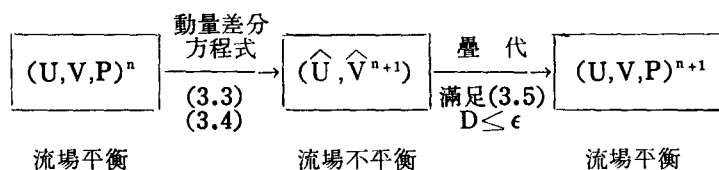
3-2 疊式法則

方程式(3.3)，(3.4)，藉着時間項前向差分的技巧，即以已知值預測未知值（新時刻），此未知值不僅要滿足動量方程式，亦要滿足連續方程式。預測值代入連續方程式中 (3.5)，不爲零，即表示流場處於不平衡狀態，不滿足質量守恆。

當 $D > 0$ ，表示有流量流出網格，網格內的壓力由平衡狀態調整爲減小，抗衡流量的流出，使網格內速度趨於平衡。當 $D < 0$ ，表示有流量流進網格，網格內的壓力由平衡狀態調整爲加大，來抗衡流量流入，使網格內速度趨於平衡。

於動量方程式中，僅能得到 \hat{U} ， \hat{V} 預測值，新時刻的壓力值 (P)，並無法求得，所以藉着滿足連續方程式的條件，即質量守恆、速度與壓力相互調整，使新時刻流場爲平衡狀態，代表疊代過程結束，即 U^{n+1} 、 V^{n+1} 、 P^{n+1} 可以獲得。

以簡單的示意圖歸納以上的敘述：



考慮網格 (i , j) 比鄰近的網格壓力值多 ΔP , 此 ΔP 即為調整方程式滿足不可壓縮的修正量。由(3.3) 式可得下一個時段預測值，

$$\hat{u}_{i*,j}^{n+1} = u_{i*,j}^n + \Delta t \left\{ \frac{(P_{i,j}^n - P_{i+1,j}^n)}{\Delta X_{i+1}} - DUUDX^n - DVUDX^n + VISX^n \right\}$$

$$\text{設 } u_{i*,j}^{k=0} = \hat{u}_{i*,j}^{n+1} \quad (k \text{ 代表次數})$$

$$\begin{aligned} u_{i*,j}^{k=1} &= u_{i*,j}^n + \Delta t \left\{ \frac{(P_{i,j}^n + \Delta P - P_{i+1,j}^n)}{\Delta X_{i+1}} - DUUDX^n - DVUDX^n + VISX^n \right\} \\ &= u_{i*,j}^n + \Delta t \left\{ \frac{(P_{i,j}^n - P_{i+1,j}^n)}{\Delta X_{i+1}} - DUUDX^n - DVUDX^n + VISX^n \right\} + \frac{\Delta t}{\Delta X_{i+1}} \Delta P \\ &= u_{i*,j}^{k=0} + \frac{\Delta t}{\Delta X_{i+1}} \Delta P \end{aligned}$$

同理

$$u_{i*,j}^k = u_{i*,j}^{k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta X_{i+1}} \Delta P \quad (3.6)$$

$$u_{i*,j-1}^k = u_{i*,j-1}^{k-1} - \frac{\Delta t}{\Delta X_i} \Delta P \quad (3.7)$$

$$v_{i*,j*}^k = v_{i*,j*}^{k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta Y_{j+1}} \Delta P \quad (3.8)$$

$$v_{i*,j*-1}^k = v_{i*,j*-1}^{k-1} - \frac{\Delta t}{\Delta Y_j} \Delta P \quad (3.9)$$

$$P^k = P^{k-1} + \Delta P \quad (3.10)$$

希望第 k 次疊代的散度 (D) 為零：

$$\frac{1}{\Delta X_i} (u_{i*,j}^k - u_{i*,j-1}^k) + \frac{1}{\Delta Y_j} (v_{i*,j*}^k - v_{i*,j*-1}^k) = 0 \quad (3.11)$$

而第 k - 1 次疊代其散度為 D：

$$\frac{1}{\Delta X_i} (u_{i*,j}^{k-1} - u_{i*,j-1}^{k-1}) + \frac{1}{\Delta Y_j} (v_{i*,j*}^{k-1} - v_{i*,j*-1}^{k-1}) = D \quad (3.12)$$

由方程式(3.7)~(3.12)，可以得到壓力修正量的關係式：

$$\Delta P = \frac{D}{\Delta t \left\{ \frac{1}{\Delta X_i} \left(\frac{1}{\Delta X_i} + \frac{1}{\Delta X_{i+1}} \right) + \frac{1}{\Delta Y_j} \left(\frac{1}{\Delta Y_j} + \frac{1}{\Delta Y_{j+1}} \right) \right\}} \quad (3.13)$$

將 (3.13) 代入(3.6)~(3.10)，計算下一次疊代值的 u、v、p，當 D 趨近於零，則停止疊代由(3.13)式亦可知壓力修正量趨近於零，表示流場以處於平衡；疊代過程必須所有的網格 D 值皆要滿足容許誤差值，本研究容許誤差 $\epsilon = 0.005$ 。

3-3 時間間隔的選取原則

應用數值方法計算必須符合穩定性、一致性、收斂性三個法則，而顯性法對於時間間隔的選取相當重要，依據 Von Neuman 複利葉級數穩定度分析，可求得時間間隔的選取原則，然而此分析方

法僅能分析線性的方程式，以線形的假設來模擬非線性的特性，雖然有誤差，然可當做參考量，以此為基準加以調整。

時間間隔的關係式：

$$\Delta t \leq \frac{1}{\left(\frac{2}{Re\Delta x^2} + \frac{2}{Re\Delta y^2} + \frac{|\bar{u}|}{\Delta x} + \frac{|\bar{v}|}{\Delta y} \right)} \quad (3.14)$$

由(3.14)式知，時間間隔的選取與傳遞速度、雷諾數及網格間距有關。

於本文中，採非均勻網格，在計算區域中所有網格均有一參考量時間間隔 Δt ，為了滿足每一個格點皆能成立，宜選取最小的時間間隔，為下一個時段、時間選取的參考值。

3-3 求解步驟：

- (1)輸入流場參數（上下游邊界長度、雷諾數、結束時間）。
- (2)由輸入物理參數中，計算數值運算的常數。
- (3)輸入初始流場條件。
- (4)以動量差分方程式，獲得下一個時段的預測值 \bar{u} 、 \bar{v} 。
- (5)由邊界條件計算流場邊界值。
- (6)是否滿足連續方程？未符合，則壓力與速度互相修正，以壓力修正是反覆疊代，直到滿足連續方程式，則停止疊代。
- (7)計算阻力係數 (Cd)。
- (8)將新時段的速度與壓力，當作已知值，採用穩定分析時間間隔的選取方法，計算所有的格點選取其中最小值，當作下一個時段的時間間隔。
- (9)重複(4)~(8)，直到時間結束。

由於在障礙物後端，產生卡門漩渦羣(Karman vortex street)，隨時間的發展，漩渦上下交替運動，此運動相當有規則可循，稱之為動態穩定 (Dynamics steady)；在本文中，執行時間的結束可選取大於動態穩定之後。

四、結果與討論

4-1 模擬結果

本研究模擬流場如圖2-1 所表示，上游入口離方形體前緣 5B，下游出口離障礙物之後緣60B，兩側分別為 6B；模擬流況分別為 $Re=100$ 、250、400 三個雷諾數。整個數值之運算在PRIME-9955 進行。

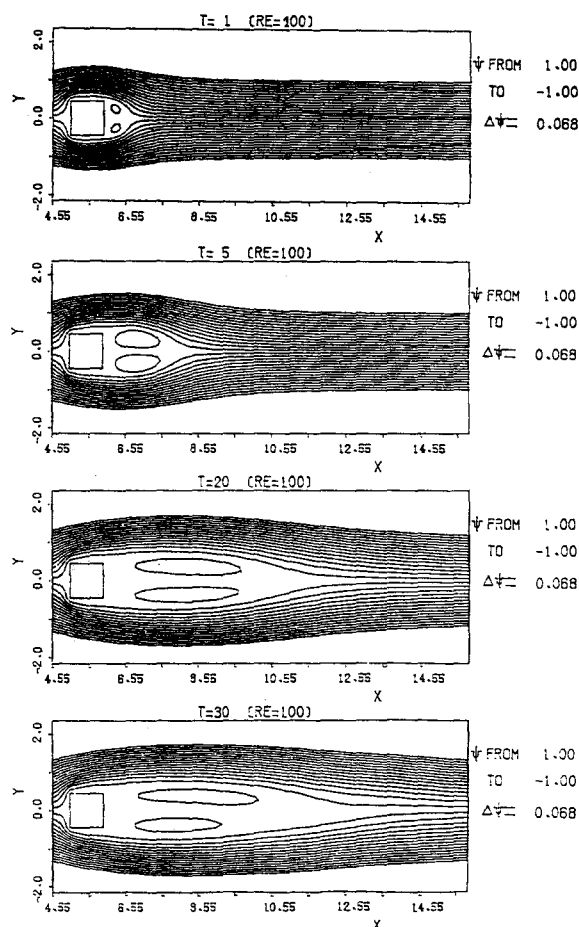


圖4-1 雷諾數100的流線圖

(1) $T=1$ ，(2) $T=5$ ，(3) $T=20$ ，(4) $T=30$ ，

4-1-1 流場模擬結果

數值模擬結果是以流線圖及速度分布圖提供流場物理現象解釋。流場模擬結果以 $Re=100$ 為例，如圖4-1與圖4-2可知流場尾流漩渦的形成與運動；在運動初期於尾流形成區 (formation zone) 產生附着漩渦 (attach eddy)，接着漩渦由對稱的形狀，隨時間的增加漩渦繼續擴大，直到形成不對稱漩渦，最後在方形體後緣上下交替分離，產生規則的卡門漩渦羣流動，此時尾流區流場現象為動態穩定的漩渦分離運動；如圖 4-1流線圖之趨勢可詳細獲知尾流漩渦連續的運動情形，其特徵為漩渦上下產生於尾流形成區，接着分離於方形體之後緣，然後在尾流之穩定區 (stablezone) 形成上下擺動的卡門漩渦羣。 $T=72$ ，於方形體上緣產生漩渦，接着漩渦分離，然後往下游移動；在 $T=74$ ，上緣的漩渦增加其強度佔據整個尾流區，此時方形體下緣的漩渦正在形成中；於 $T=76$ ，漩渦已完全

形成；於 $T=78$ ，下緣的漩渦已往下游移動，且佔據整個流場，同時方形體上緣的漩渦也在形成中；於 $T=80$ 上緣漩渦已完成形成，準備分離；於 $T=82$ 重覆 $T=72$ 運動——於方形體下緣漩渦正在形成中，可知此時流場之運動為有週期的重覆出現。表示漩渦分離的頻率可採用史脫荷數 (Strouhal Number) 分析，其值可由固定的週期 (τ) 特徵長度 (B) 及參考速度 (U_0) 獲得。

$f = 1/\tau$ ，頻率 (Frequency)

$S = \frac{fB}{U_0}$ ，史脫荷數

由表 4-1、4-2 分別列有 $Re=100$ 、 $Re=250$ 、 $Re=400$ 卡門漩渦羣之擺動週期史及載荷數 (Strouhal Number)。漩渦繼續往下游流動因黏滯力效應衰減了漩渦的運動，如圖-1與圖-2中可知。而 $Re=250$ 與 $Re=400$ 流場模擬的結果分別表示在圖4-3、圖4-4、圖4-5、圖4-6。

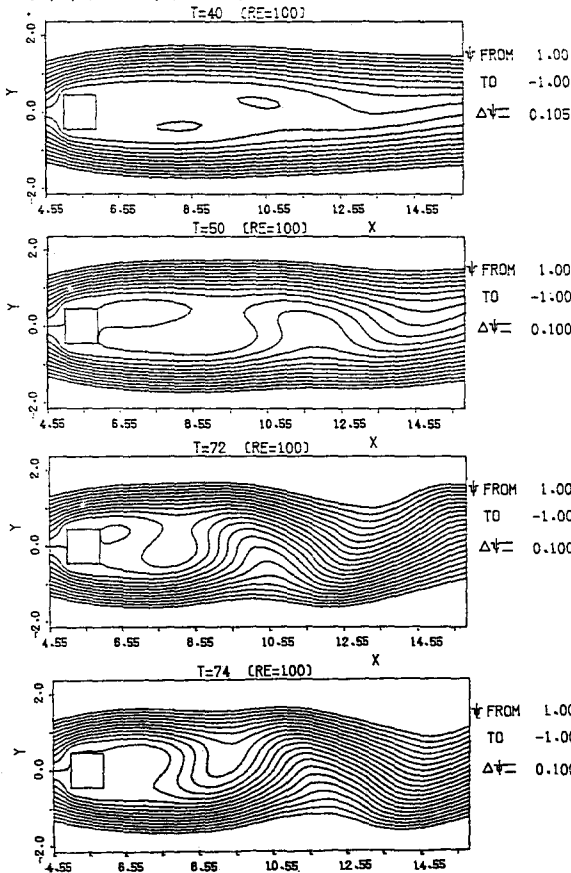


圖4-1 雷諾數100的流線圖

(5) $T=40$ ，(6) $T=50$ ，(7) $T=72$ ，(8) $T=74$ ，

4-1-2 阻力結果

採用2-3節分析方形體阻力係數的方法，配合數值方法所獲得的速度及壓力結果，可以求得方形體的阻力係數，其結果表示於表4-5。如圖4-7可知，阻力係數亦隨時間上下振盪 (Oscillation)，具有週期性的特徵，上下振盪的週期與卡門漩渦羣擺動週期恰巧相差一半 (表4-3)。

4-2 討論

理論上圓柱體在 $Re=40$ 以上，流體流過障礙物產生複雜流場變化，在尾流區漩渦形成與運動，有規則可循，漩渦由對稱的形狀隨時間增加；漩渦長度繼續增大，直到形成不對稱的漩渦，最後出現上下擺動有規則可循的卡門漩渦羣。由 (圖 4-1) 至 (圖 4-6) 的流線圖及流速分布圖說明了本研究數值模擬的結果，在發生穩態漩渦分離的流場，其週期性運動引發之現象，對方形障礙物而言，阻力亦隨時間呈現週期性的特徵。

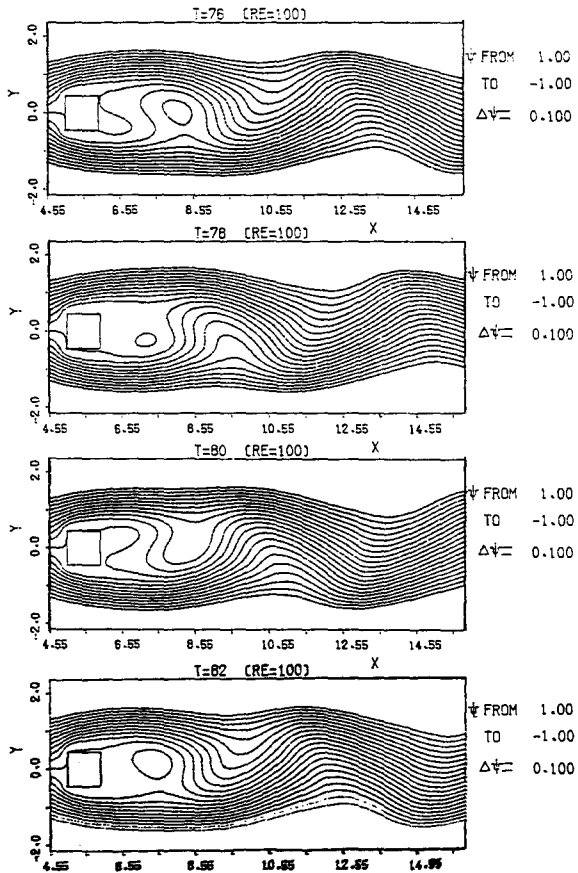


圖4-1 雷諾數100的流線圖

(9) $T=76$ ，(10) $T=78$ ，(11) $T=80$ ，(12) $T=82$ 。

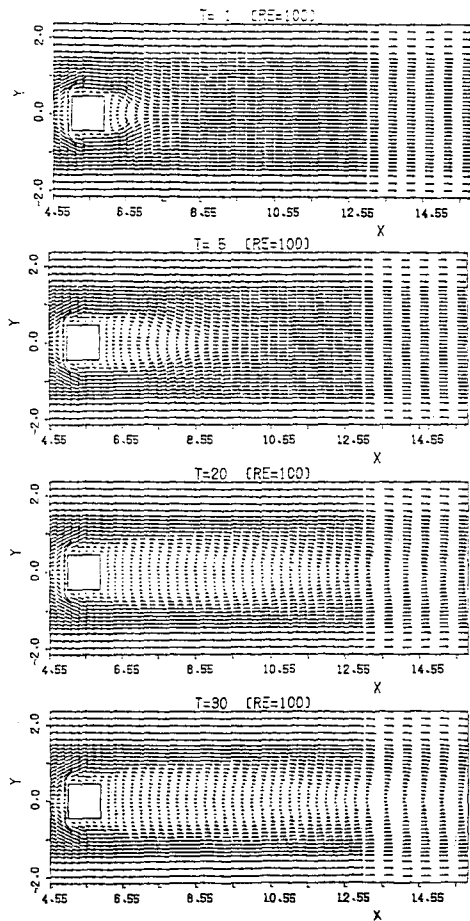


圖4-2 雷諾數100的速度分布圖
(1) T=1, (2) T=5, (3) T=20, (4) T=30,

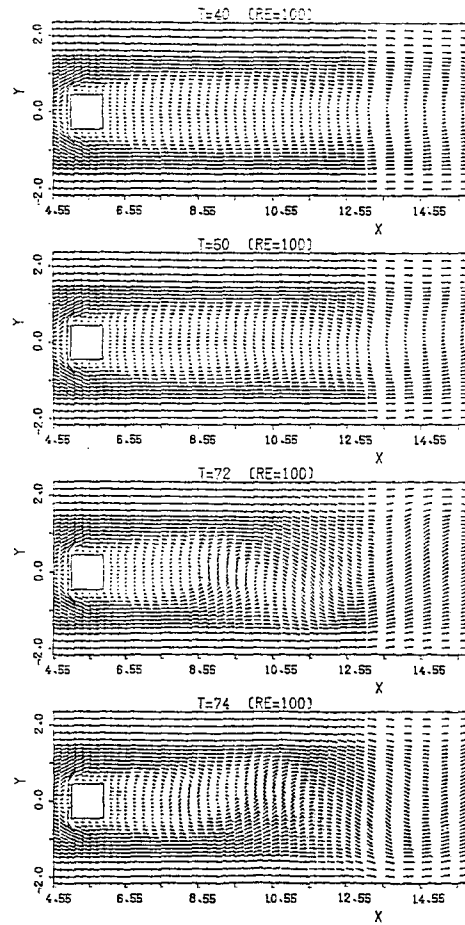


圖4-2 雷諾數100的速度分布圖
(5) T=40, (6) T=50, (7) T=72, (8) T=78,

4-2-1 格網間距選取比較

使用數值方法模擬流場，結果的精確度，除了取決於差分方法及格點數目多寡之外，尚需配合適當的初始條件及邊界條件；在整個數值計算上，格點的間距是重要的數值參數，因時間間距選取必須符合穩定法則，而穩定法則中格點間距也是變數之一。方形體邊界附近及尾流區變化率較高，本文針對這些區域做一比較討論；

1. 方形體邊界附近：在方形體邊界，因不可滑動邊界 (No-slip Condition) 影響，有一層很薄的邊界層，在邊界附近變化率高，所以格點宜選取較稠密，而格點間距選取多少，才是最適當？基本上根據流平板的推論⁽¹⁶⁾，邊界層厚度與雷諾數有關 ($\delta \propto L/\sqrt{Re}$) L 為特徵長度，在此取方形體寬 B 。於本研究中格網間距選取在方塊附近為 $0.1B$ ，以 $Re=100$ 流況為例，平板理論驗證，顯示格

網間距的級次 (Order) 符合此理論。

2. 尾流區域：由於尾流區變化率大，所以格網宜選取較稠密，本研究目的在模擬流場隨時間變化情形，主要可以詳細觀察一組卡門漩渦羣變化所以在尾流區第一組卡門漩渦羣區域之後，格點可慮劃分較疏。本研究嘗試在第一組卡門漩渦羣區域，網格間距選取 $0.5B$ 、 $0.25B$ 及 $0.125B$ ，三者都可以模擬流場變化，不過以 $0.125B$ 最適當。

總之，針對數值流場，最小格網間距為 $0.1B$ ，而最大格網間距為 $1B$ 。

4-2-2 下游邊界長度的討論

下游出口的邊界條件為干擾消失處，然而數值運算只能在有限的區域進行，因此下游邊界可嘗試選取足夠大的值，來模擬無限大的邊界。不適當的下游邊界假設，將影響模擬的結果，若下游長度太短則提早將漩渦消除；理論上，下游的長度愈長，

所模擬的效果愈好。但考慮計算機的容量，針對圓柱體的實驗，約 $100\sim 200D$ (D =圓柱直徑)，干擾可完全消失⁽¹⁶⁾。在本研究中曾嘗試選取 $10B$ 、 $60B$ 及 $100B$ 的下游邊界；結果顯示， $10B$ 早將漩渦消除，效果不良，但 $60B$ 與 $100B$ 都有不錯的結果；由速度剖面顯示， $60B$ 之後變化不大，在考慮計算機容量及運算速度，本研究是以 $60B$ 當做下游邊界值。

4-2-3 漩渦形成區討論

1. 在障礙物後緣出現明顯逆向速度的迴流區，結果顯示，迴流區的逆向速度以 $Re=400$ 最高， $Re=250$ 次之， $Re=100$ 最小，表示逆流區的速度與雷諾數有關。

2. 漩渦隨時間的增加，由對稱的漩渦形狀至不對

稱漩渦之間，漩渦長度會繼續增大。由開始運動到形成不對稱漩渦時間，比較三個雷諾數，由圖 4-7 可知， $Re=100$ 所需要的時間最長；表示雷諾數與不對稱的漩渦形成時間有關。

4-2-4 卡門漩渦羣

因漩渦附近流場相當複雜且變化大，以流線圖來表達模擬的結果並不完全，配合速度分布圖可補充說明流線圖之不足。卡門渦動主要特徵，有週期性可循，接着漩渦繼續往下游傳遞，可以看到明顯衰減；其衰減原因由於流體黏滯力的作用。

由表 4.1 分別列有 $Re=100$ ， $Re=250$ ， $Re=400$ 之卡門漩渦羣擺動週期及史戴荷數的結果與⁽⁷⁾比較，趨勢相似。

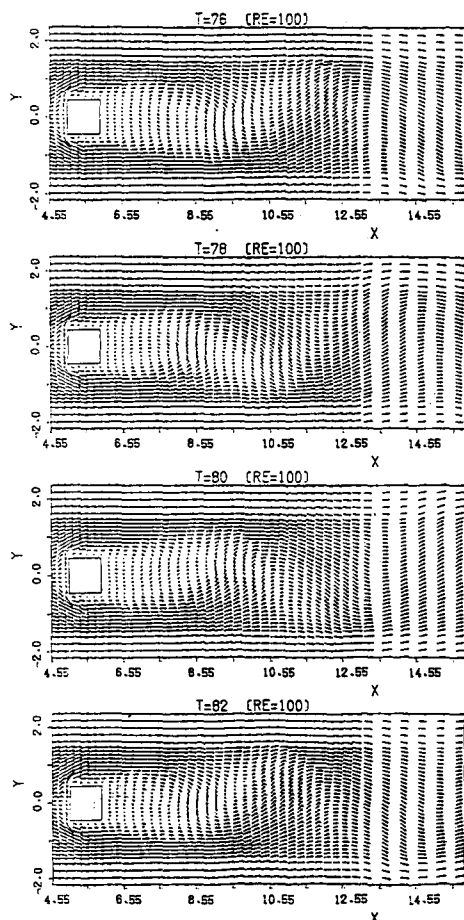


圖4-2雷諾數100的速度分布圖

(9)= T 76, (10) T = 78, (11) T = 80, (12) T = 82,

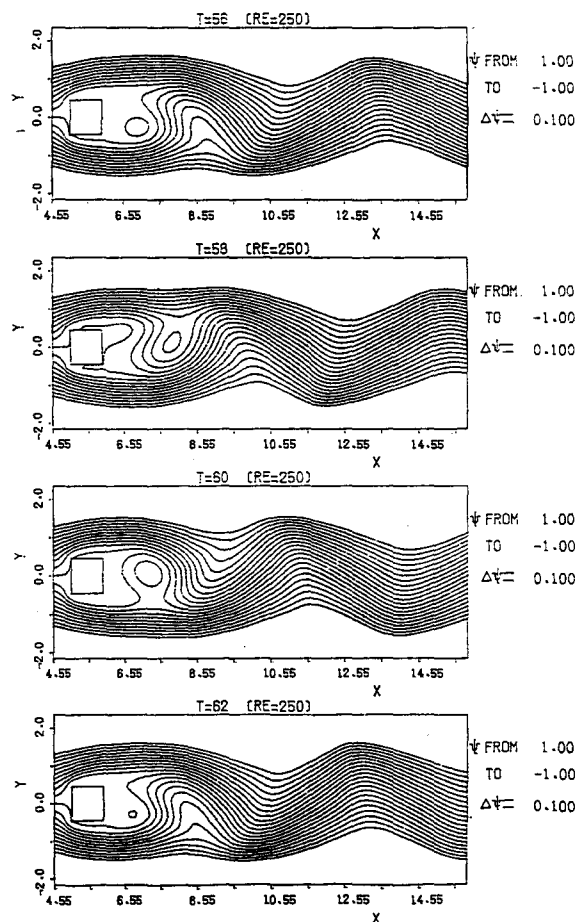


圖4-3 雷諾數250的流線圖

(1) T = 56, (2) T = 58, (3) T = 60, (4) T = 62。

表4-1 卡門漩渦羣擺動週期與雷諾數的比較表

Re	卡門漩渦羣之擺動週期 (無因次)
100	7.2
250	6.2
400	6.3

表4-4 控制體積與阻力係數比較表

Re	100		
T	50	80	100
Cd(MEAN)	1.46	1.62	1.553
MAPE	0.411%	3.621%	2.230%

表4-2 史戴荷數與雷諾數的比較表

Re	史戴荷數(NOW)	史戴荷數 ⁽⁷⁾
100	0.139	0.148
250	0.161	0.160
400	0.160	0.162

Re	250		
T	60	80	100
Cd(MEAN)	1.544	1.579	1.594
MAPE	2.905%	2.844%	3.206%

表4-3 阻力係數振動週期與雷諾數比較表

Re	Cd 的 振 動 週 期 (無因次)
100	3.6
250	3.10
400	3.12

Re	400		
T	60	84	100
Cd(MEAN)	1.692	1.653	1.634
MAPE	3.151%	4.281%	3.140%

4-2-5 阻力分析

由差分方程組，可求得任意時段的速度及壓力，為了計算作用在流場中障礙物的阻力，可以運用控制體積動量方程式（見 2-3節），理論上在相同的時間，障礙物的阻力與選取控制體積無關，根據此法則驗證數值解是否滿足物理現象，符合動量守恆法則。在相同的時間選取不同的控制體積，結果顯示阻力係數不相同，以平均絕對百分誤差 (Mean Absolute Percentage Error)，簡稱MAPE 做為分析結果的方法。

表4-5 平均阻力係數與雷諾數的比較表

Re	Cd (AVE) [NOW]	Cd (AVE) ⁽⁷⁾
100	1.575	1.64
250	1.558	1.77
400	1.612	1.82

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^N \left| \frac{Cd_i - \overline{Cd}}{Cd_i} \right|}{N} \cdot 100\%$$

其中 \overline{Cd} : 真值 ;

Cd_i : 相同時間中選取不同之控制體積的 Cd 值 ;

N : 數據之組數, 為族群 (Population) 個數。

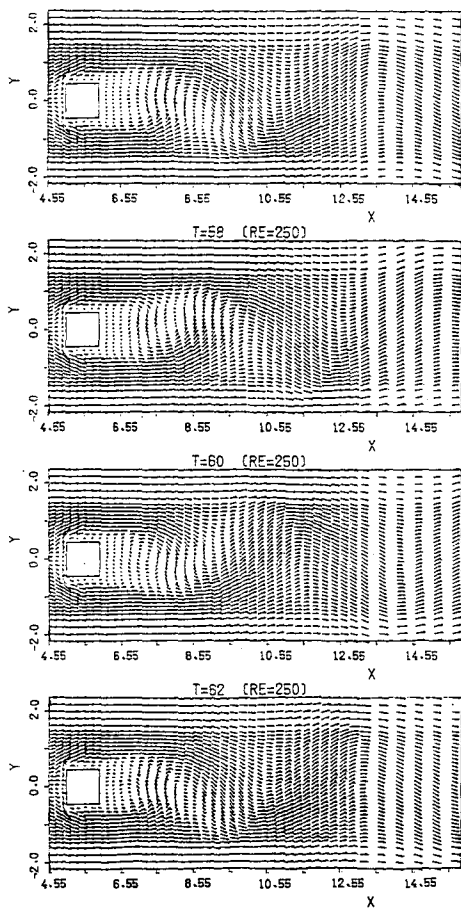


圖4-4 雷諾數250的速度分布圖

(1) $T = 56$, (2) $T = 58$, (3) $T = 60$, (4) $T = 62$ 。

由於沒有真值, 所以在本研究中取數據之平均值, 數據組數選取 8 組, 由表 4-4 可知偏差都在百分之五以下, 並不顯著。分析偏差的來源: 數值模擬之截尾與捨位誤差及控制體積動量方程式數值積分的誤差。捨棄這不顯著的偏差, 可驗證阻力與控制體積形狀的選取無關, 滿足動量的守恆。由於驗證了數值模擬之結果符合動量的守恆, 接下來可以

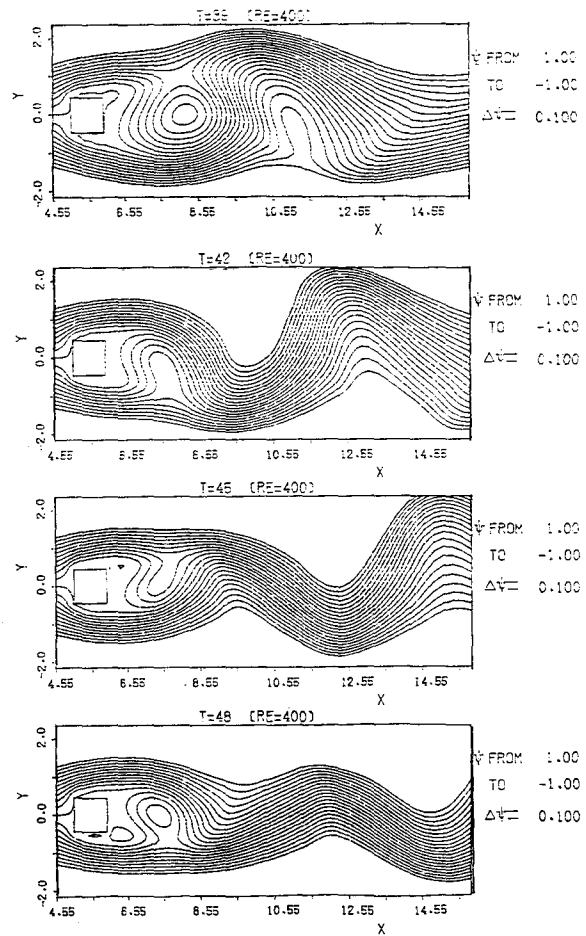


圖4-5 雷諾數400的流線圖

(1) $T = 39$, (2) $T = 42$, (3) $T = 45$, (4) $T = 48$,

分析在不同雷諾數阻力係數與時間的關係。由圖 4-7 可知, Cd 值隨時間上下振盪, 具有規則的特徵, 由表 4-3 上下振動的週期與卡門渦動的週期恰巧相差一半, 可知流場的運動與受力情形有關, 驗證牛頓第二運動定律: 由於有力的作用, 產生動量的改變。本研究中可藉由流場動量的改變來分析流場中障礙物的阻力, 此方法除了獲得障礙物阻力係數, 還可以驗證數值模擬結果之可靠性; 值得採用。由表 4-5 阻力係數由 $Re=100$ 至 $Re=250$ 減少, 而 $Re=400$ 反增加, 與圓柱體的研究有偏差, 由於 $Re=400$ 是落於層流與亂流之間的轉變區 (transition), 此區域流場現象比較複雜且變化大。

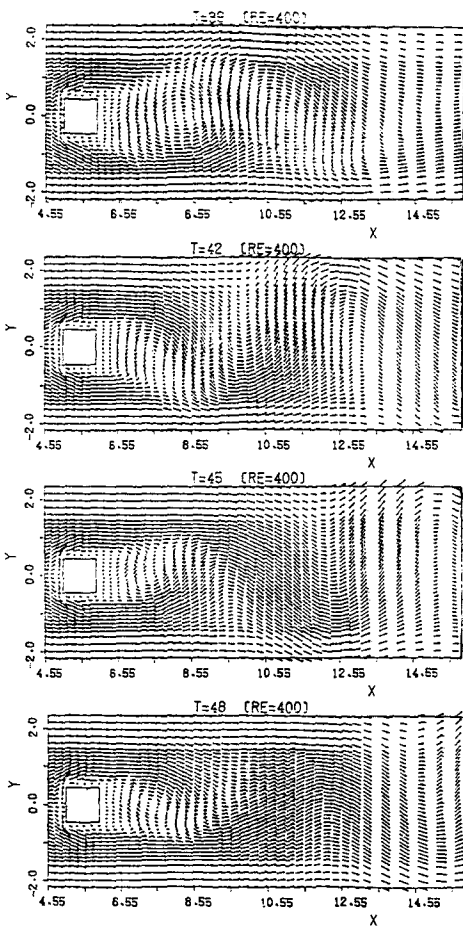


圖4-6 雷諾數400的速度分布圖
(1) $T=39$, (2) $T=42$, (3) $T=45$, (4) $T=48$ 。

五、結論與建議

1. 本研究利用數值模擬分析黏滯流通過方形障礙物之流場運動及受力情形。數值結果除了符合物理現象——滿足質量守恆及動量守恆，尚須加上實驗驗證，方可確數值模擬的可靠性。本文僅提出數值模擬的結果，有關實驗的驗證，有待進一步研究中。
2. 針對流場運動，以流線及速度剖面說明物理現象。漩渦形成程序為由對稱的渦流隨時間的發展長度繼續增大到形成不對稱漩渦，最後上下交替分離，產生卡門漩渦羣運動。
3. 本文嘗試採控制體積動量方程式分析阻力，由於控制體形狀選取與阻力無關，驗證本數值結果符合動量守恆法則。
4. 由於流場週期性的運動，阻力係數對時間的關係亦有週期性的特徵，阻力振動的頻率為卡門漩渦羣上下擺動之兩倍。

5. 在本研究中，流場模擬的對象為方形障礙物，未來發展可嘗試對不同長寬比的矩形障礙物及轉動障礙物的角度，形成攻角 (Attack angle) 探討其運動情形。
6. 在本研究中，流場試體為單一障礙物，未來發展可嘗試對障礙物羣探討其運動情形。
7. 本數值模擬針對二維流場，擴展到三維流場更具實用性。

六、符號說明

- B : 方形體寬
 Cd : 阻力係數
 D : 散度 (Divergence, $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = D$)
 f : $1/\tau$ 頻率 (Frequency)
 P : 壓力
 Re : $\frac{U_0 B}{\nu}$ 雷諾數 (Reynold number)
 S : $\frac{fB}{U_0}$ 史脫荷數 (Strouhal number)
 t : 時間
 to : 參考時間 ($\frac{B}{U_0}$)
 U_0 : 自由流流速，或參考速度
 u : 卡氏座標 x 軸方向的速度
 v : 卡氏座標 Y 軸方向的速度
 \vec{V} : $u \vec{i} + v \vec{j}$ 速度向量
 x : 平行自由流流向變數
 y : 垂直自由流流向變數
 μ : 黏滯係數
 ν : μ/ρ 動黏滯係數
 ρ : 流體密度
 τ : 週期
 φ : 流線函數值
 ΔP : 壓力修正量
 Δt : 時間間距
 ΔX_i : X 方向第 i 個網格間距
 ΔY_j : Y 方向第 j 個網格間距
- 上註腳
 n : 時間步驟
 — : 有因次 (Dimension) 物理量
 ^ : 預測值
 → : 向量值

下註脚

i : 流場X方向第 i 個元素

j : 流場Y方向第 j 個元素

i* : i + 1/2

j* : j + 1/2

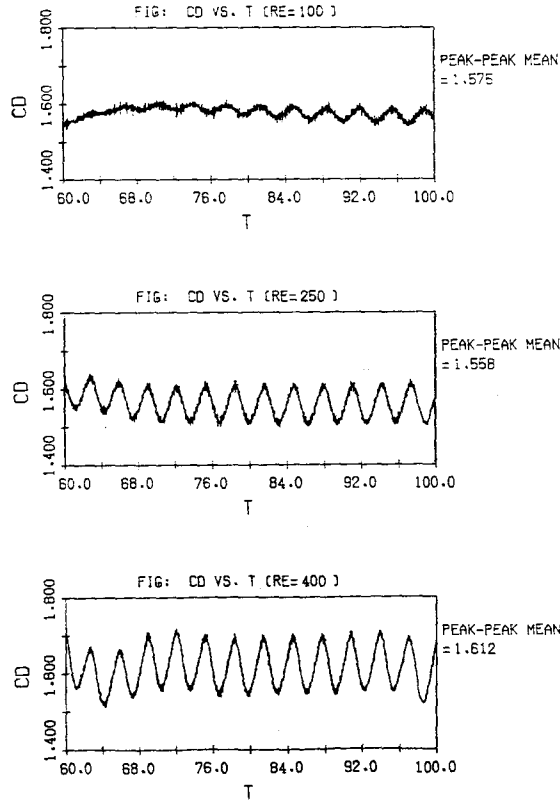


圖4-7 阻力係數隨時間變化圖

(1)RE=100, (2)RE=250, (3)RE=400。

七、參考文獻

1. 曾振遠, "黏性尾流之渦流運動預測模式", 農業工程學報第34卷第3期, 77年9月。
2. Ames, W.F., Numerical Method for Partial Differential Equation, Barnes and Noble, New York (1969).
3. Batchelor, G.K., An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge (1970).
4. Bearman, P.W. and Graham, J.M.R. "Vortex Shedding from Bluff Bodies in Oscillatory Flow," J. Fluid Mech, Vol. 99. pp. 225-245 (1980).

5. Bearman, P.W., "Bluff Body Flows Applicable to Vehicle Aerodynamics," Thans. A.S.M.E., J. Fluid Engny. Vol. 102, pp. 265-274 (1980).
6. Chow Chuen-Yen, An Introduction to Computational Fluid Mechanics (1979).
7. Davis R.W., E.F. Moore, "A Numerical Study of Vortex Shedding From Rectangles", J. Fluid Mech., Vol. 116, pp. 475-506 (1982).
8. Deffenbaugh F.D., Marshall F.J., "Time Development of the Flow about an Impulsively Started Cylinder", AIAA J., Vol. 14, No. 7, pp. 908-913 (1976).
9. Fornberg B., "A Numerical Study of Steady Viscous Flow Past a Circular Cylinder", J. Fluid Mech, Vol. 98, Part 4, pp. 819-855 (1980).
10. Hirt, C.W., Nichols, B.D. and Romero, N.C. SOLA-A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows. Los Alamos Scientific Laboratory Rep. LA-5852(1675).
11. Karman, T. Von, and H. Rubach, "Uber den Medhanismus des Flussigkeits und Luftwiderstandes," Physikalische Zeitschrift, Vol. 13, No. 2, Jan. (English translation Available from the National Aeronautics and Space Administration). pp. 49-59(1912).
12. Lee, B.E. "The Effect of Turbulence on the Surface Pressure Field of a Square Prism", J. Fluid Mech.,
13. Mair, W.A. and Maull, D.J. "Bluff Bodies and Vortex Shedding" J. Fluid Mech., Vol. 45, pp. 209-224(1971).
14. Nichols B.D. and C.W. Hirt, "Improved Free Surface Boundary Condition for Numerical Incompressible-flow Calculation", Journal of Computtaional Physics 8, pp. 434-448 (1971).
15. Payne, R.B., "Calculation of Unsteady Viscous Flow Past a Circular Cylinder",

- Journal of Fluid Mechanics, Vol. 4, May, pp. 81-88 (1958).
16. Panton R.L., Incompressible Flow, John Wiley & Sons, Inc. (1984).
17. Perry A.E., MS., Chong, T.T. Lim, "The Vortex-shedding Process Behind Two-dimensional Bluff Bodies", J. Fluid Mech., Vol. 116, pp. 77-90(1982).
18. Potter David, Computational Physics, Bristol, England (1973).
19. Roache, P. J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, New Maxico (1972).
20. Robert D. Blevins, Flow-Induced Vibrations, New York (1977).
21. Robert R. Hwang, Te-Pu Chiang, Mau-Sse Chiao, "Time-Dependent Incompressible Viscous Flow Past a Circular Cylinder," Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 9, No. 6, pp. 617-631(1986).
22. Simiu, E. and Scanlan, R.H., Wind Effects on Structures, Wiley (1978).
23. Unal M.F., Rockwell D., "On Vortex Formation a Cylinder. Part 1. The Initial Instability", J. Fluid Mech., Vol. 190, pp. 491-512 (1988).

專營土木、水利、建築等工程

富正營造股份有限公司

地址：桃園市中山路425巷3號6樓

專營土木、水利、建築等工程

九華營造工程股份有限公司

地址：台中市綏遠路二段41號5樓之2 電話：(04)2353831

安進機械工業有限公司

負責人：吳小郎 地址：彰化市曉陽路205號 電話：(047)229628

專營土木、水利、建築等工程

新偉營造有限公司

負責人：賴薰南 地址：員林鎮三和里合作街75號 電話：(048)324656