

# 專 論

## 加置於均勻流之波動分析

### Analysis of Wave Motions Imposed on a Uniform Flow

淡江大學水資源與環境工程學系教授兼夜間學院院長

施 清 吉

Ching-Chi Shih

#### 摘 要

探討於一均勻流 (Uniform flow) 分別加置三種不同的波運動時，在何種條件下原來的波動型態 (State) 無法繼續維持，而終將變成另一型態的波動，以及其條件之異與同。所考慮的波運動計有：狹義的正波、均勻進行波與微擾振動流。此外，分析波動為均勻進行波時，其上、下游的均勻深度之比應為若干及其間的起碼距離。

#### ABSTRACT

Three different types of wave motion imposed on a initial uniform flow have been investigated; there are positive wave (its distance is relative short as compared with a flood wave), uniformly progressive wave, and small perturbed oscillatory wave. The conditions of each type to maintain its originally imposed flow state have been analyzed and compared among them. The range of the ratio between the upstream and downstream known depths of a uniformly progressive to be prevailed in the long run without changing to the another flow state has also been studied with emphasis on the regular order of its length.

#### 一、引 言

含自由面的渠流，其內的福祿數 (Froude number) 多多少少可代表渠流本身的強度，若渠流的初時流況為均勻流，理論上，其內的福祿數大於 2，則加置於其上的正波 (Positive wave)，最後終究會形成「湧」 (Surge)。以此觀點而言，本文首先討論加置於均勻流上的波動在何種情況下會轉變成另一種型態的波動，而「何種情況下」又可分成二方面。一方面是均勻流本身的強度要多大，這一點可以初時福祿數為代表。另一方面若均勻流本身的強度未達上述的強度時，外在強度必須要多大，才會使原來型態的波動轉變成另一型態

的波動。例如上述的正波，若初時福祿數小於 2，那水位上升率必須多快，才會使正波轉變成「湧」？其次，波動的型態相當多，其中最為常見且最常被引用的是均勻進行波 (Uniformly progressive wave) 或單上升波 (Monoclinal wave)，在何種情況下會形成這種型態的波動，同時其範圍又多長？若轉變成另一型態的波動時，其長度又變為多大？諸如此類的問題將依次分析討論於本文。

#### 二、理論分析

圖一為流經寬矩形渠道 (Wide open channel) 的某一瞬時水面線，渠底坡度為  $S_0$ ，若初時流況 (Initial flow state) 為均勻流 (Uniform flow)

，其速度與深度分別為  $V_2$  與  $y_2$ 。今一洪水注入渠道，導致部份的流況改變，水位由原來的  $y_2$  上升為  $y_1$ 。假設在這兩不同深度間的水面線以同一形狀及等速  $c$  向下游傳遞。在這情況下額外的流量  $q_r$  [俗稱為氾濫 (Orrerrun)] 以及波速  $c$  均視上、下游的已知深度  $y_1$  與  $y_2$  而定，即

$$q_r = \frac{C_0 \sqrt{S_0 y_1 y_2}}{\sqrt{y_1 + y_2}} \dots \dots \dots (1)$$

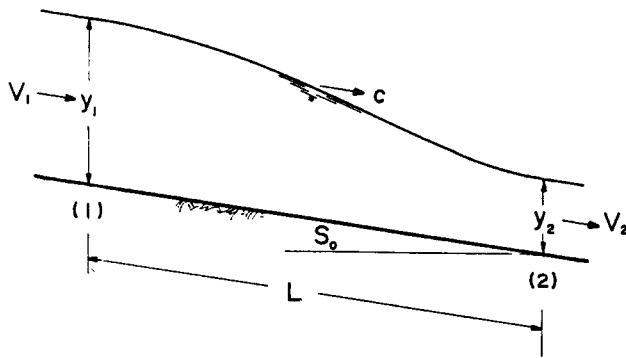
$$c = \frac{C_0 \sqrt{S_0} (y_1 + \sqrt{y_1 y_2} + y_2)}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \dots \dots \dots (2)$$

式中  $C_0$  為 Chezy's 公式中的常數，而 Chezy's 式係用以計算能量線坡度 (Energy line slope)。針對氾濫流量  $q_r$ ，其臨界深度  $y_{cr}$  同樣地可定義為

$$y_{cr} = \left( \frac{q_r^2}{g} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (3)$$

而無因次臨界深度  $y_{cr}$  則為：

$$y_{cr}' = \frac{y_{cr}}{y_2} = \left\{ Fr_2^2 \frac{y_1^2}{y_2^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right)^2 \right\}^{1/3} \dots \dots \dots (4)$$



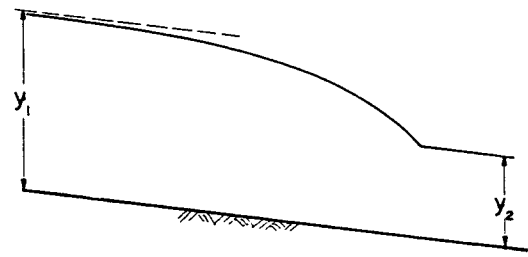
圖一 均勻進行波之示意圖

式中  $Fr_2^2 = \frac{V_2^2}{g y_2}$ ，且  $V_2 = C_0 \sqrt{S_0 y_2}$ 。其次，利用 Galilean 座標轉換技巧以及移動座標  $\sigma$  與固定空間座標  $x$  (流動方向)、時間  $t$  和波速  $c$  間的關係，即  $\sigma = x - ct$ ，Saint Venant 式可簡化為<sup>[1]</sup>

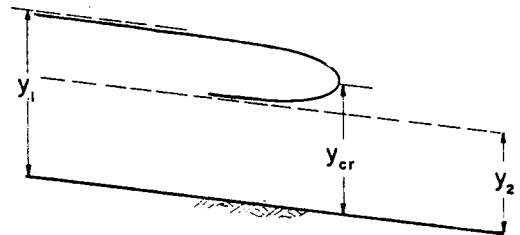
$$\frac{dy}{d\sigma} = -S_0 \frac{(y - y_2)(y_1 - y)(y - Y)}{y^3 - y_{cr}^3} \quad (5)$$

式中  $\frac{Y}{y_2} = \frac{1}{\left( 1 + \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right)^2} \dots \dots \dots (6)$

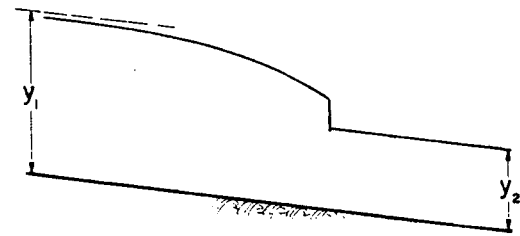
其值恆小於 1，為便於說明，深度  $Y$  暫且稱之為參考深度，水面線的顯著差異決定於氾濫臨界深度  $y_{cr}$  與下游已知深度  $y_2$  間的相互關係。如果氾濫臨界深度  $y_{cr}$  小於已知下游深度  $y_2$ ，則上游深度與下游深度都是以漸近方式趨近於已知的均勻流深度  $y_1$  與  $y_2$ ，但切線斜率均小於 0；若兩者相等，下游水位就不再是以漸近方式趨近於均勻流深度  $y_2$ ，其間的夾角為一定角如圖二 (a) 所示。最後



(a)  $y_2 = y_{cr}$



(b)  $y_1 = y_{cr} > y_2$  (理論)



(c)  $y_1 = y_{cr} > y_2$  (實際)

圖二 均勻進行波之型態改變

假若  $y_{c,r} > y_2$ ，下游水位又恢復為以漸近方式趨近於均勻流深度  $y_2$ ，但切線斜率改為大於 0 而不是小於 0，這就相當於實際上的「湧」了 [參閱圖二(b)、(c)]。因此，氾濫臨界深度等於下游均勻流深度時即可視為形成「湧」的臨界條件；而此時上游均勻流深度  $y_1$ 、下游均勻流深度  $y_2$  及坡度  $S_0$  間的相互關係可由式(4)求得，即：

$$F_{r,2}^2 \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^2 = \left[ 1 + \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right]^2 \dots\dots\dots(7)$$

式(7)是根據波形與波速均保持不變的假設而由 Saint Venant 式求得的，實際上這兩個假設所描述的波現象就相當於一般俗稱的機動波 (Kinematic wave)。

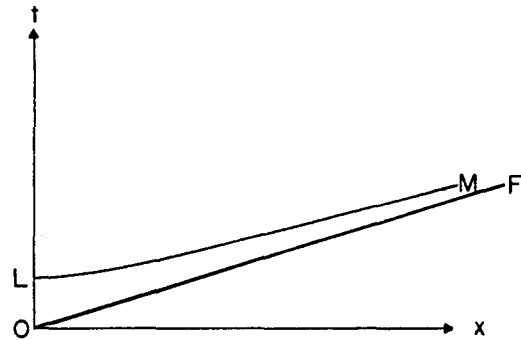
寬矩形渠道內的均勻流，其內的初時深度與初時速度分別為  $y_0$  與  $V_0$  (且初時福祿數  $F_{r,0}$  小於 2)，則初時特徵線 (Characterstics line) 如圖三直線 OF 所示。今因人為或天然因素，致使渠道內某一處的水位急遽上升因而形成正波 (Positive wave)。針對特徵線方程式及沿其線的變化，形成「湧」的臨界條件可由下列兩種方法求得。方法之一是利用線性化技巧以簡化能量線坡度，並於部份的分析中引用簡單波 (Simple wave) 的假設，則吾人即可積分求得非常非常接近直線 OF 的特徵線 LM，後者為近乎直線的曲線，令曲線 LM 與直線 OF 在無窮遠的地方相交，代表正波終究會形成「湧」的臨界條件，則水位上升率必須符合下列條件<sup>(1)</sup>：

$$\frac{\partial y}{\partial t} \geq \frac{gy_0 S_0 (2 - F_{r,0})(1 + F_{r,0})}{3V_0} = \frac{V_0 S_0}{3} \times \frac{(2 - F_{r,0})(1 + F_{r,0})}{F_{r,0}^2} \dots\dots\dots(8)$$

另一嚴謹的類似方法也同樣地考慮一非常接近於初時流況 (但  $F_{r,0} < 2$ ) 為均勻流的正波，利用微擾技巧 (Perturbation Technique)，吾人也可求得正波終究會形成「湧」的條件，其結果正如式(8)所示<sup>(2)</sup>，微擾技巧是直接着眼於 Saint Venant 方程式，方法相當嚴謹，以空間座標  $x$ 、時間座標  $t$ 、初時深度  $y_0$  與初時速度  $V_0$  組成一用以衡量接近均勻流的「程度」的擾動項 (Perturbated term)  $\tau$ ，即

$$\tau = t - \frac{x}{V_0 + \sqrt{gy_0}} \text{ 所尋求之解 (深度與速度)}$$

) 展開為用擾動項組成的多項式。以深度而言第零階近似解即為原來的均勻流，而第一階近似解正代表水位上升率。由於吾人係探討正波終究要形成「湧」，所以水位上升率的導數 (即第二階近似解) 必須大於 0，式(8)的結果是基於這種考慮而求得的。



圖三 特徵線

類似於上段的情況，分析形成「湧」的臨界條件似乎還可基於另一種不同的觀點，即於已知的均勻流上加置一微擾流 (Small perturbed flow)，但此微擾流的水位可上升也可下降，寬矩形渠道內的初時流況仍為均勻流，加置於其上的微擾流均於其相關符號上加一撇“'”且  $y' \ll y_0$ ， $V' \ll V_0$ ， $\tau' \ll \tau_0$  ( $\tau = \tau S_0 y_0$ )，同時微擾流的深度變化與速度變化均假設為指數型 (Exponential form)，如下所示<sup>(3)</sup>：

$$\frac{y'}{y_0} = \hat{y} \exp [i (\hat{\sigma} x - \hat{\beta} t)] \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{V'}{V_0} = \hat{V} \exp [i (\hat{\sigma} x - \hat{\beta} t)] \dots\dots\dots(10)$$

式中  $\hat{\sigma}$  為無因次波數 (Dimensionless wave number) 定義為：

$$\hat{\sigma} = \frac{2\pi}{L} \frac{y_0}{S_0}$$

而  $L$  為微擾流的波長 (Wave length of disturbance)； $\hat{y}$  與  $\hat{V}$  分別為無因次深度振幅 (Dimensionless depth amplitude) 與無因次速度振幅 (Dimensionless velocity

amplitude)；空間座標  $\hat{x}$  與時間座標  $\hat{t}$  予以無因次化後，分別以  $x$  與  $t$  表示，其間的關係分別為  $\hat{x} = \frac{xS_0}{y_0}\hat{t} = t \frac{V_0S_0}{y_0}$ ；無因次複數傳遞因子 (Dimensionless complex propagation factor)  $\hat{\beta}$  包含實數與虛數等兩部份，即  $\hat{\beta} = \hat{\beta}_R + \hat{\beta}_I$ ，實數部份定義為  $\hat{\beta}_R = \left[ \frac{2\pi}{T} \right] \frac{y_0}{S_0V_0}$ ，由此可求得無因次波速 (Dimensionless wave speed)  $\hat{c}$ ，即  $\hat{c} = \frac{\hat{B}_R}{\hat{\sigma}}$ ，而虛數部份  $\hat{\beta}_I$  却用以控制振幅 (深度與速度) 是否隨着時間的增加而遞增，故俗稱為振幅傳遞因子 (Amplitude propagation factor)。將式(9)與(10)代入 Saint Venant 式，吾人可得一組由無因次速度振幅  $\hat{V}$  與無因次深度振幅  $\hat{y}$  所組成的線性聯立方程式，但為均勻型 (Homogeneous)，為求得非零之解，所以變數前的係數所構成的行列式必須等於零，即：

$$F_{r0}^2 \hat{\beta}^2 - 2(\hat{\sigma} F_{r0}^2 - i) \hat{\beta} - [\hat{\sigma}^2(1 - F_{r0}^2) + 3\hat{\sigma}i] = 0 \dots\dots\dots(11)$$

式(11)為無因次複數傳遞因子  $\hat{\beta}$  的二次方程式，其係數由初時福祿數  $F_{r0}$  與無因次波數  $\hat{\sigma}$  所組成，故其解為：

$$\hat{\beta} = \hat{\sigma}(1 - i\zeta) + \hat{\sigma} \left\{ \left[ \frac{1}{F_{r0}^2} - \zeta^2 \right] + i\zeta \right\}^{1/2} \dots\dots\dots(12)$$

式中  $\zeta = \frac{1}{\hat{\sigma} F_{r0}}$  又稱為(kinematic flow number)<sup>(4)</sup>。若令  $A = \frac{1}{F_{r0}^2} - \zeta^2$ ，

$$C = \left\{ \left[ \frac{1}{F_{r0}^2} - \zeta^2 \right] + \zeta^2 \right\}^{1/2}, D = \left[ \frac{C+A}{2} \right]^{1/2}, E = \left[ \frac{C-A}{2} \right]^{1/2} \text{ 則式(12)變為}$$

$$\hat{\beta} = \hat{\sigma}(1 - i\zeta) \pm \hat{\sigma} \left\{ \left[ \frac{C+A}{2} \right]^{1/2} + i \left[ \frac{C-A}{2} \right]^{1/2} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

式(13)的正負號代表無因次複數傳遞因子  $\hat{\beta}$  含有兩個根，這正顯示干擾可同時向上游與下游傳遞，或兩種干擾同時向下游傳遞，為了方便起見，向下游傳遞的動力波稱之為主波 (Primary wave)，相當於式(13)的等號右邊取正號，相關符號均加一右下註腳“1”；另一方面向上游傳遞的動力波則另稱之為

次波 (Secondary wave)，相當於式(13)的等號右邊取負號，此時的右下註腳改為“2”，若同時向下游傳遞，主波的傳遞速度快於次波。其次，由此吾人即可求得經過每一個週期  $T$  後，振幅的對數遞減 (Logarithmic decrement)  $\hat{\delta}$  與波速  $\hat{c}$ ，其結果為：

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_1 &= 2\pi \frac{\zeta - E}{|1 + D|} \\ \hat{c}_1 &= 1 + \left[ \frac{C+A}{2} \right]^{1/2} \\ \hat{\delta}_2 &= -2\pi \frac{\zeta + E}{|1 - D|} \\ \hat{c}_2 &= 1 - \left[ \frac{C+A}{2} \right]^{1/2} \end{aligned} \dots\dots\dots(14a,b,c,d)$$

### 三、結果與討論

如果渠道內的流速相當快，例如福祿數超過 2，或者是流速雖不夠快，但是由洪水注入而導致的水位上升率非常非常急劇，則由洪水波而引起的水位上升終究會形成「湧」，除了上述的兩種情況外，一般的洪水波都是屬於水位緩慢上升的均勻進行波 (Uniform progressive wave) 或單上升波 (Monoclinial wave)，其間的距離往往在好幾十公里以上。所以何時會形成「湧」以及若不形成「湧」時，波的範圍有多大，為本章探討的兩大部份。

(一) 形成「湧」之條件

圖一所示的水深  $y$  是介於上游均勻流深度  $y_1$  與下游均勻流深度  $y_2$  之間，同時  $Y$  恆小於  $y_2$ ，如式(6)所示，因為深度比值  $y_1/y_2$  恆大於 1，所以這三個深度的相互關係為  $y_1 > y > y_2 > Y$ 。此外，深度比值  $y_1/y_2$  還影響汜濫臨界深度  $y_{cr}$ ，參閱式(4)；配合福祿數  $F_{r2}$  的大小，汜濫臨界深度  $y_{cr}$  可座落於上述三個深度的所構成的不同範圍內。首先汜濫臨界深度  $y_{cr}$  可大於也可小於深度  $Y$ ，這一點可從其間的比值看出來，由式(4)與(6)吾人得知：

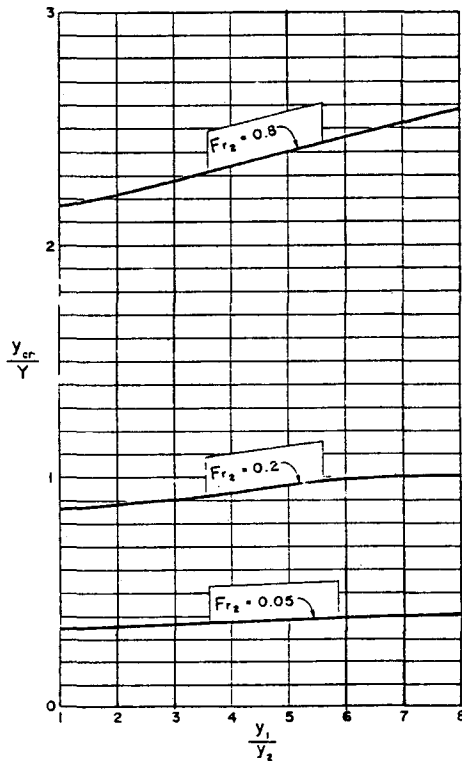
$$\frac{y_{cr}}{Y} = \frac{F_{r2}^{2/3} \left[ 1 + \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right]^{4/3}}{\left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^{1/3}} \dots\dots\dots(15)$$

如式(15)所示，當深度比值  $y_1/y_2$  趨近於 1 與無窮大時，汜濫臨界深度  $y_{cr}$  與參考深度  $Y$  間的比值分別趨近於  $F_{r2}^{2/3} 2^{4/3}$  與  $F_{r2}^{2/3} y_1/y_2$ ，故汜濫臨界深度與參考深度之間的比值隨着深度比值  $y_1/y_2$  的增加而遞升，如圖四所示。除非初時福祿數  $F_{r2}$  的值非常小，一般情況都是汜濫臨界深度  $y_{cr}$  大於參

考深度  $Y$ 。圖四只展示式(15)的典型變化，水平與垂直座標軸分別為  $y_{cr}/Y$  與  $y_1/y_2$ ，而以初時福祿數  $F_{r2}$  為參數。圖上通過  $y_{cr}/Y=1$  的水平線代表  $y_{cr}>Y$  與  $y_{cr}<Y$  的分界線。展示於圖上的曲線均顯示當福祿數  $F_{r2}$  數小時，氾濫臨界深度與參考深度間的比值  $y_{cr}/Y$  幾乎隨着深度比值  $y_1/y_2$  的增加而呈線性遞增，但福祿數漸次增加，其間的關係也逐漸由線性，變為非線性，曲線斜率由緩逐漸變陡，最後隨着深度比值的增加而趨近於一個定值，此值為  $F_{r2}^{2/3}$ 。曲線的位置隨着初時福祿數  $F_{r2}$  的增加而向上移，而且曲線斜率也愈來愈陡。其次，氾濫臨界深度  $y_{cr}$  等於參考深度  $Y$  時，初時福祿數  $F_{r2}$  與深度比值  $y_1/y_2$  間的關係可由式(15)求得，即：

$$\left[ \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right]^2 = F_{r2}^2 \left[ 1 + \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right]^4 \dots\dots(16)$$

由式(16)吾人得知，深度比值的平方根  $\sqrt{y_1/y_2}$  共有四種不同的計算方式，但其值必須大於 1。若採用  $\sqrt{y_1/y_2} = 0.5\{-2+1/F_{r2}\} \pm \sqrt{(2+1/F_{r2})^2-4}$ ，則深度比值的平方根小於 0，不論初時福祿數等於多少。另一方面，若採用

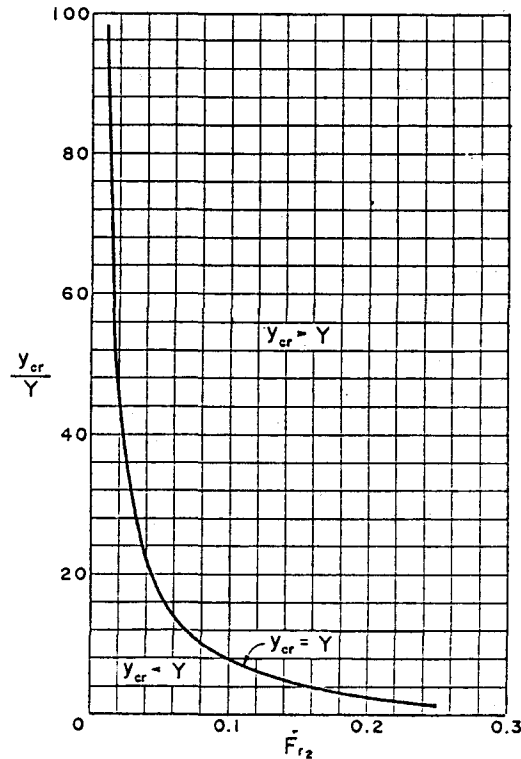


圖四 比值  $y_{cr}/Y$  與深度比  $y_1/y_2$  間之關係

$\sqrt{y_1/y_2} = 0.5\{-2-1/F_{r2}\} + \sqrt{(2-1/F_{r2})^2-4}$ ，初時福祿數必須小於 0.5，所求得的平方根只變為大於 0 但小於 1；所以餘下的計算方式是唯一的合理根，即：

$$\sqrt{y_1/y_2} = 0.5\{-2+1/F_{r2}\} + \sqrt{(2-1/F_{r2})^2-4}$$

其結果展示於圖五。圖五顯示初時福祿數  $F_{r2}$  必須小於 0.25，等於 0.25 時，氾濫臨界深度與參考深度的比值為最小，等於 1；但若初時福祿數趨近於零，則比值就趨近於無窮大。曲線的上部代表氾濫臨界深度  $y_{cr}$  大於參考深度  $Y$ ，而下面適巧相反。圖四與圖五的結果均反映氾濫臨界深度  $y_{cr}$  可大於也可小於參考深度  $Y$ ，其實這是源自於這兩個深度本身的特性與定義。首先以氾濫臨界深度  $y_{cr}$  而言，相對於下游均勻流深度  $y_2$ ，式(4)顯示其值  $y_1/y_2$  隨着深度比值的增加而遞增。這是合理的，因為氾濫是來自於上游均勻流深度  $y_1$  高於下游均勻流深度  $y_2$ ，若其間的差距愈大，深度比值  $y_1/y_2$ 、式(1)所示的氾濫  $q$ ，與式(3)的氾濫臨界深度  $y_{cr}$  也統統跟着變大。而深度比值  $y_1/y_2$  對參考深度  $Y$  的影響適巧呈現與上述所述的效果相反。深度比值  $y_1/y_2$  增的加將導致參考深度  $Y$  值的下降，如式(6)所示。



圖五 比值  $y_{cr}/Y$  與福祿數  $y_{r2}$  間之關係

這種正與反的效果才使氾濫臨界深度與參考深度間之比值  $y_{c,r}/Y$  隨着深度比值  $y_1/y_2$  的增加而遞增，尤其是當初時福祿數  $F_{r,2}$  較大的時候，參閱圖四。另一極端就是氾濫臨界深度  $y_{c,r}$  趨近於上游均勻流深度  $y_1$ 。若這兩個深度相等，則令  $y_{c,r} = y_1$ ，由式(4)，吾人得知此時的深度比值  $y_1/y_2$  須符合下列關係式：

$$\left[ \frac{y_1}{y_2} \right] \left( \frac{y_1}{y_2} - \frac{F_{r,2}^2}{1 + \frac{y_1}{y_2}} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

式(17)為兩個因子之乘積，其中之一根為  $\frac{y_1}{y_2} = 0$ ，

此根不為吾人所求，因  $\frac{y_1}{y_2}$  之值必須大於或等於 1

。所以此時的深度比值  $y_1/y_2$  必須由另一因子求得。若令  $X = \sqrt{y_1/y_2}$ ，解另一因子的根就相當於求一元四次方程式  $X^4 + 2X^3 + X - F_{r,2}^2 = 0$  之根，四個

根分別為： $X = -1/2 + \sqrt{\eta/2} \pm \sqrt{1-\eta/2}$  與  $X = -1/2 - \sqrt{\eta/2} \pm \sqrt{1-\eta/2}$  不論採用那一種型式的根，根號內的值必須大於 0，所以  $\eta$  的值必須介於 0 與 1 之間，其實  $\eta$  為一元二次方程式  $\eta^2 - \eta + 4F_{r,2} = 0$  之任一根，即  $\eta = 1/2(1 + \sqrt{1-16F_{r,2}^2})$  或  $1/2(1 - \sqrt{1-16F_{r,2}^2})$ ，此外，根的值又必須大於 1

，即  $X = \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} > 1$ 。因此在這四種型式的根裏，以

$X = -1/2 + \sqrt{\eta/2} + \sqrt{1-\eta/2}$  的根較有可能；但是就介於 0 與 1 之間的  $\eta$  值而言，上述型式的根均小於 0.207106781。這也就是說，若氾濫臨界深度  $y_{c,r}$  等於上游均勻流深度  $y_1$  時，則此時上游均勻流深度與下游均勻流深度間的比值  $y_1/y_2$  恆小於 1，這就不符合圖一的情況了，所以氾濫臨界深度  $y_{c,r}$  不可能等於上游均勻流深度  $y_1$ ，必須小於上游均勻流深度。

如果氾濫臨界深度  $y_{c,r}$  的值逐漸增加，水面線的變化首先如圖二(a)中所示，而後再變成圖二(b)的情形。易言之，若氾濫臨界深度  $y_{c,r}$  大於下游均勻流深度  $y_2$ ，水面線的實際情形應如圖二(c)所示，這時已很明顯地形成「湧」了。所以氾濫臨界深度等於下游均勻流深度可視為形成「湧」的臨界條件。令  $y_{c,r} = y_2$  或  $y_{c,r} = 1$ ，由式(4)吾人得知此時已知的上游均勻流深度  $y_1$  與下游均勻流深度  $y_2$  須

符合下列關係式：

$$\left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_c = \frac{1 + 2F_{r,2} + \sqrt{1 + 4F_{r,2}}}{2F_{r,2}^2} \quad \dots\dots\dots(18)$$

右下註脚“c”代表形成「湧」的臨界條件。式(18)有一個非常有趣的含意，這就是當初時流況的福祿數等於 2 時 ( $F_{r,2} = 2$ )，則吾人可得  $(y_1/y_2) = 1$ ，易言之，如果初時流況已經是福祿數高達 2 的超臨界流(Supercritical flow)，只須稍稍提高水位就可形成「湧」這一點正和引用線性技巧或微擾技巧所得的結論完全一致，參閱第二章第二段，摩擦力予以考慮時，若福祿數大於或等於 2，任何正波(Positive wave)終究會形成「湧」。另一方面，上述的結論也多多少少顯示了以氾濫臨界深度  $y_{c,r}$  等於下游均勻流深度  $y_2$  做為形成「湧」的臨界條件是正確的。此時，在斷面(2)的水面線坡度可由式(5)求得，即：

$$\frac{dy}{dx} \Big|_c = \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_c = -S_0 \left\{ \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_R - 1 \right\} \times \left\{ 1 - \left[ \frac{Y}{y_2} \right]_c \right\} / 3 \quad \dots\dots\dots(19)$$

而  $\left[ \frac{Y}{y_2} \right]_c$  則可由式(6)求得，即：

$$\left[ \frac{Y}{y_2} \right]_c = \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_c}} \right\}^2} \quad \dots\dots\dots(20)$$

其次，圖一與圖二的分析是基於動波的假設，波形與波速均保持不變；故以觀察者而言， $\frac{dy}{dt} =$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

此時的波速  $c$  可由 (2)

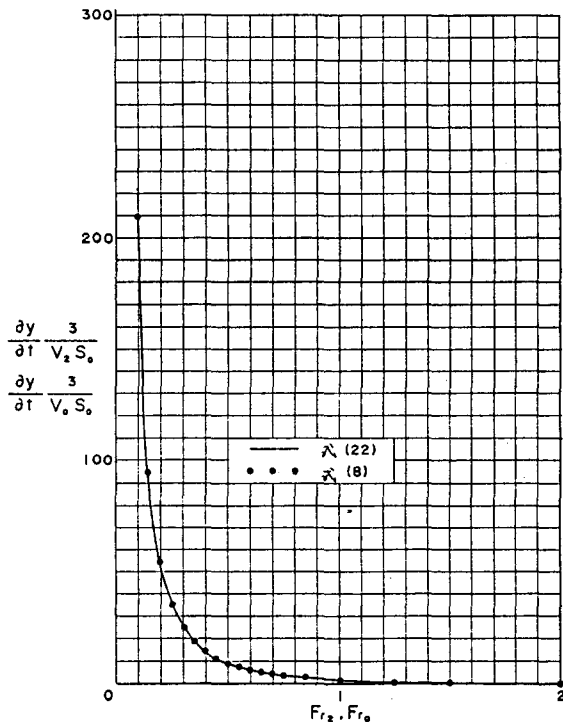
$$c_c = V_2 \frac{\left\{ \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_c + \sqrt{\left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_c + 1} \right\}}{\sqrt{\left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_c + 1}} \quad \dots\dots\dots(21)$$

總之，由式(18)、(19)、(20)與(21)，吾人得知若初時福祿數  $F_{r,2}$  小於 2，深度上升率  $\frac{\partial y}{\partial t}$  必須符合下列條件才會形成「湧」，即

$$\frac{\partial y}{\partial t} \geq \frac{V_0 S_0}{3} \left\{ \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_c + \sqrt{\left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_c + 1} \right\} \times \left\{ \sqrt{\left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_c} - 1 \right\} \left\{ 1 - \left[ \frac{Y}{y_2} \right]_c \right\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

式(22)的斷面(2)為初時流況，因此，(2)的流速  $V_2$  與福祿數  $F_{r2}$  正分別為式(5)的  $V_0$  與  $F_{r0}$ 。其次，由式(18)與(19)吾人得知，除了初始速度  $V_2$  與坡度  $S_0$  外，式(22)的深度上升率完全受制於初時福祿數  $F_{r2}$ ，其間的關係以實線展示於圖六，而實心圓則是根據式(5)計算而得的結果。

圖六顯示若初時福祿數  $F_{r0}$  (或  $F_{r2}$ ) 趨近於 0 時，式(18)與(22)均推測深度上升率  $\frac{\partial y}{\partial t}$  必須趨近於無窮大才會形成「湧」。這種傾向直接而且明顯地反映於式(18)的表達上。但是式(22)却間接地反映出來，當初時福祿數趨近於 0 時，首先式(18)顯示臨界條件  $(y_1/y_2)$  趨近於無窮大。同時式(6)再顯示  $Y/y_2$  趨近於 0，這才導致式(22)的深度上升率趨近於無窮大。此外，圖六也顯示若初時福祿數逐漸增加，式(22)與式(8)所標示的深度上升率就急速下降，若初時福祿數增加為 2 時，深度上升率就減為 0。福祿數  $F_{r0}$  (或  $F_{r2}$ ) 多多少少可用以代表形成正波前初時流況的強度。若初時福祿數大於 2，這正代表渠流的本身強度已經夠大，只要是深度上升的正波都會形成「湧」，用不着再需要符合深度上升率的條件，如式(8)或(22)所示。所以初時福祿數等於 2 時，深度



圖六 深度上升率之比較

上升率就降為零。初時福祿數小於 2 的正波，由於初時強度不足以形成「湧」，若要形成「湧」，必須配合足夠的深度上升率才足以形成「湧」，所以其所需的深度上升率當然與初時強度，也就是初時福祿數成反比。

由於摩擦力的緣故，因而導致並不是所有的正波都會形成「湧」。除非初時福祿數  $F_{r0}$  (或  $F_{r2}$ ) 大於 2 的均勻流，否則正波深度上升率  $\frac{\partial y}{\partial t}$  必須超過某一臨界條件 (式(8)或(22)後始可形成「湧」)。式(8)是根據非常接近均勻流的假設所得的結果，而式(22)的推測係基於波形與波速均保持不變的假設。這兩種假設是截然不同的，式(8)是指剛形成「湧」的刹那，而式(22)是基於兩個已知深度間的水面線以同一形狀與速度向下游傳遞。式(8)的假設與上、下游均勻流之深度差距無關，而式(22)的假設却與時刻無關。式(22)是以實線展示於圖六，而實心圓則為式(8)的推測結果。雖然是根據這兩種不同的假設，但所得的結果幾乎是完全吻合，這確實是非常難得的。

參閱圖三假設所考慮的變量流是非常接近原來的均勻流，易言之，曲線 LM 是近乎直線的曲線。在這種假設下，特徵線 LM 的曲線方程式是可積分求得，其間的函數關係式是以時間  $t$  與參數  $t_0$  為自變數。再配合相關方程式，消去用以代表不同觀察者的參數  $t_0$  即可求得不同時刻的水面線。實際上，水面線方程式往往無法求得，即使能夠積分求得相關的方程式，也是很難消去參數  $t_0$ ，另一方面，利用微擾技巧吾人可求得第一階近似解，而第零階近似解為原來的均勻流。水面線即可由原來的均勻流、第一階近似解以及擾動項組合而成。不論所求得的水面線方程式繪於圖上的型式如何，吾人都無法能有概略性的認識。而今圖六的吻合程度使吾人確信，只要未形成「湧」，則正波的水面線即為一般俗稱的均勻進行波 (Uniformly progressive wave) 或單上升波 (Monodinal wave)，而且其波形與波速均保持不變。

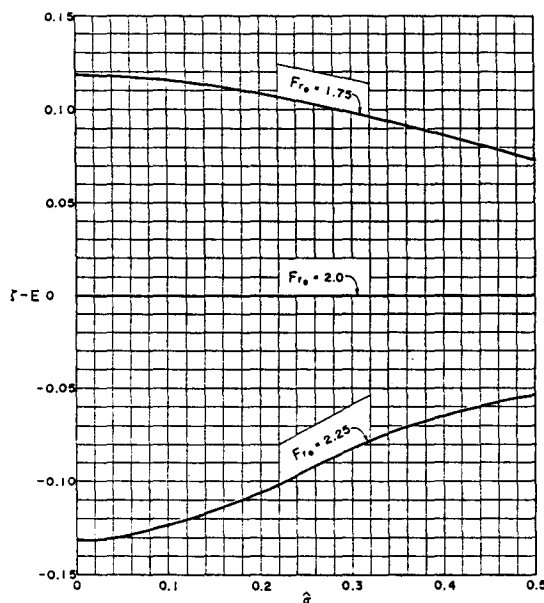
初時福祿數  $F_{r0}$  (或  $F_{r2}$ ) 小於 2 時，「湧」的形成條件如式(8)或(22)所示，前者是基於所考慮的時刻非常非常接近於初時流況，而後者是假設介於兩個已知深度間的水面線及其波速均保持不變。

此外，另一可能提供形成「湧」的條件為考慮於一均勻流上加置一微擾流。若深度變化與速度變化如式(9)與(10)所示。經過每一個週期  $T$  後，主波與

振幅對數遞減分別列於式 (14a) 與 (14c)。次波的振幅一定隨着時間的增加而逐漸變小，因為其對數遞減  $\hat{\delta}_2$  恆小於 0。但主波則不一定，視情況而定。若  $\zeta - E = 0$ ，則主波的振幅也同樣地隨着時間的增加而逐漸消失；若  $\zeta - E = 0$  就保持不變；相反地，若  $\zeta - E < 0$ ，那麼振幅就會逐漸被擴大。如果振幅逐漸擴大後的現象也可視為「湧」，則  $\zeta - E = 0$  也可同樣地可當做形成「湧」的臨界條件。由式(14a)，吾人得知  $\zeta - E = 0$  時，無因次波動數  $\hat{\sigma}$  與初時福祿數  $F_{r0}$  間的關係如下：

$$\zeta - E = \frac{1}{\hat{\sigma} F_{r0}^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\sigma}^4 F_{r0}^4 - 2\hat{\sigma}^2 F_{r0}^2 + 1 + \hat{\sigma}^2 F_{r0}^4]^{1/2} - [\hat{\sigma}^2 F_{r0} - 1] \right\} \dots\dots(23)$$

式(23)顯示等號右邊的值是否大於 0 完全視初時福祿數  $F_{r0}$  的值而定，却與無因次波數完全無關。故如圖七所示，式(23)係以  $F_{r0} = 2$  的水平線（而不是傾斜線）為界將圖分為上下兩半。若初時福祿數  $F_{r0} < 2$  不，論波數  $\hat{\sigma}$  的值等於多少，式(23)的值恆為正，唯有當無因次波數  $\sigma$  趨近於無窮大時，式(23)才會趨近於 0。易言之，若初時福祿數  $F_{r0} < 2$  時，



圖七 函數  $\zeta - E$  與波數  $\hat{\sigma}$  間之關係

無因次波數  $\sigma$  並無一個對應的值能使  $\zeta - E$  的值變為 0。所以初時流況的強度即已不足以使振幅逐時

擴大，則無一適當的波數可改變之。這一點非常不同於前述的兩種情況，它們指出雖然初時流況的強度(初時福祿數小於 2)不足以使正波形成「湧」，但是只要深度上升率  $\partial y / \partial t$  符合式(8)、式(22)所示的臨界條件，正波終會形成「湧」。針對這一不同點，正波之累積後而形成的「湧」與振幅之擴大後所形成的現象是不可相提並論的。前者只牽涉到深度上升；而後者唯僅指振幅而言，但對於如式(9)與(10)所示的微擾流而言，深度可上升也可下降，已不再是純粹的正波，而是屬於振動波 (Oscillatory wave)。

(二) 均勻進行波之範圍

如果初時福祿數  $F_{r0}$  (或  $F_{rs}$ ) 小於 2，而且深度上升率  $\partial y / \partial t$  也小於式 (8) 或(22)所示的臨界條件，則介於兩已知深度間的波谷稱為均勻進行波 (Uniformly progressive wave)，或單上升波 (Monoclinal wave) 其間的距離可由式(5)積分求得：

$$\frac{S_0 \sigma}{y_2} = [y_1 - y_2]^{a_1} \exp(y_1 / y_2) / [y - y_2]^{a_2} / [y - Y] G \dots\dots\dots(24)$$

$$\text{式中 } a_1 = \frac{\left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^3 - \left[ \frac{y_{cr}}{y_2} \right]^3}{\left[ \frac{y_1}{y_2} - 1 \right] \left[ \frac{y_1}{y_2} - \frac{Y}{y_2} \right]}$$

$$a_2 = \frac{1 - \left[ \frac{y_{cr}}{y_2} \right]^3}{\frac{y_1}{y_2} - 1} \left[ 1 - \frac{Y}{y_2} \right] \dots\dots(24a, b, c)$$

$$G = \frac{\left[ \frac{y_{cr}}{y_2} \right]^3 - \left[ \frac{Y}{y_2} \right]^3}{\left[ \frac{y_1}{y_2} - \frac{Y}{y_2} \right] \left[ 1 - \frac{Y}{y_2} \right]}$$

而式中氾濫臨界深度  $y_{cr}$  與參考深度  $Y$  可分別由式(4)與(6)求得。由於水面線是以漸近方式趨近於上、下游的已知深度  $y_1$  與  $y_2$ ，其間的延伸距離將趨近於無窮大。因此，吾人只能着眼於非常接近於均勻流的兩個斷面，故定義斷面(A)與(B)的深度分別為  $y_A = y_1 - \epsilon [y_1 - y_2]$  與  $y_B = y_2 - \epsilon [y_1 - y_2]$ ，而式中  $\epsilon$  為一已知的微小百分比，通常以 0.01 計。則斷面(A)與(B)間的距離  $L$  等於  $\sigma_B - \sigma_A$  而此距離就可由式(23)與(24)求得，其結果為：



$$\frac{S_0 L}{y_2} = \left[ \frac{y_1}{y_2} - 1 \right] [2\epsilon - 1] + [a_1 + a_2] \ln \left[ \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \right] G \ln \left\{ \frac{\frac{y_1}{y_2} - \epsilon \left[ \frac{y_1}{y_2} - 1 \right] - \frac{Y}{y_2}}{1 + \epsilon \left[ \frac{y_1}{y_2} - 1 \right] - \frac{Y}{y_2}} \right\} \quad (25)$$

$$a_1 + a_2 = \frac{\left[ 1 + \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right]^2}{\left[ 2 + \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right] \left[ 1 + 2\sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right] \left[ \frac{y_1}{y_2} - 1 \right]} \times \left\{ 2 \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^2 + \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^{1.5} + \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^{0.5} + 2 - F_{r_2}^2 \frac{\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}}{\left[ 1 + \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \right]^2} \left\{ \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^2 + 2 \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^{0.5} + 2 \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]^{0.5} + 1 \right\} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

式(25)的等號右邊是由三項組成的。

式(25)的表示方式是相當有意義的。等號左邊為無因次長度  $\frac{S_0 L}{y_2}$ ，這代表相對於已知的均勻流，均勻進行波或單上升波的範圍有多大。而代表範圍大小的函數關係式示於等號右邊，變數有三：深度比  $y_1/y_2$ 、初時福祿數  $F_{r_2}$  及趨近百分比  $\epsilon$ ，組成三大項。第一項的變化顯而易見，對深度比與趨近百分比而言，其變化均為線性關係式，但其值小於 0。第三項是兩部份的乘積，一是式 (24c)，二是一個對數函數；這兩部份均受深度比與初時福祿數的影響，但是變化相當單純，為一單調上升函數。第二項包含一變化較為複雜的係數和  $a_1 + a_2$ ，其關係同樣地受制於深度比  $y_1/y_2$  與初時福祿數  $F_{r_2}$ ，如式(26)與圖八所示。圖八的水平與垂直座標軸分別為深度比  $y_1/y_2$  與係數和  $a_1 + a_2$ ，這兩者的關係曲線是以初時福祿數  $F_{r_2}$  為參數。不論初時福祿數等於多少，曲線圖形頗為相似，但隨着初時福祿數的增加，整個曲線往下移。以同一初時福祿數而言，係數和  $a_1 + a_2$  與深度比  $y_1/y_2$  間的關係不再是單調函數，係數和的值隨着深度比的增加先遞減而後遞增，因而呈現局部極小的現象。係數和  $a_1 + a_2$  的值為最小時，對應的深度比可由式(26)的導函數求得，此時的深度比受初時福祿數的影響，參閱圖十三。

圖九至圖十二的實線分佈代表式(25)，四張圖分別對應於四種不同的初時福祿數  $F_{r_2} = 0.3、0.8、1.3、1.8$ ，而圖上的圖形符號代表式(25)的第二項。每一種初時流況（或福祿數），均勻進行波的範圍分別採用三種的趨近百分比予以計算，即  $\epsilon = 0.01、0.05$  與  $0.1$ 。此外，圖上也同時註明在此初時福祿數的情況下，均勻進行波要轉變成「湧」的

臨界深度比  $[y_1/y_2]_c$ ，對應於上述的不同福祿數，由式(8)可求得臨界深度比分別等於 17.129109、3.632336、1.801769 與 1.151785。圖九至圖十二的水平與垂直座標軸分別為深度比  $y_1/y_2$  與無因次均勻進行波範圍  $S_0 L/y_2$ 。垂直座標軸的尺度不因不同的初時福祿數而異，但因正波為均勻進行波時的深度比必須小於臨界深度比，而臨界深度比又隨着初時福祿數的增加而遞減，故展示於同樣大小的紙張上，水平座標軸的最大幅度必須跟着縮小，同時尺度也跟着增大。在此情況下，只有圖九能顯示出曲線的變化全貌，而圖十至圖十二就無法顯示出來，除非是這三張圖展示於更大的紙上。實際上，無論初時福祿數  $F_{r_2}$  的趨近百分比  $\epsilon$  等於多少，均勻進行波的範圍與深度比  $y_1/y_2$  間的關係極為相似，隨着深度比的增加，均勻進行波的範圍首先是遞減而後再轉為遞增，因而形成局部極小的現象。均勻進行波的範圍降為最小時，對應的深度比可由式(25)的導函數求得，此時的深度比除了受初時福祿數  $F_{r_2}$  的影響外，同時也受趨近百分比  $\epsilon$  的影響。參閱式(25)，正波為均勻進行波時，其長度的來源有三方面，列於等號右邊的三項，但絕大部份是來自第二項，所以圖九與圖八的曲線形狀極為相似。

理論上，隨着深度比  $y_1/y_2$  的增加，均勻進行波的長度  $L$  應該逐漸減短，而且一旦深度比超過了如式(8)所示的臨界深度比  $[y_1/y_2]_c$ ，水位上升的正波就不再落於均勻進行波的範圍了，而是屬於另一種截然不同的型態——湧。故以深度比而言，圖九至圖十二的合理範圍應該同時符合下列兩個條件：一是深度比  $y_1/y_2$  大於 1 但小於臨界深度比  $[y_1/y_2]_c$ ，二是均勻進行波的長度必須隨着深度比的上升而呈遞減，但不能呈遞增。第二個條件可以圖十三說明之。圖十三的水平與垂直座標軸分別為初

#### 四、結 論

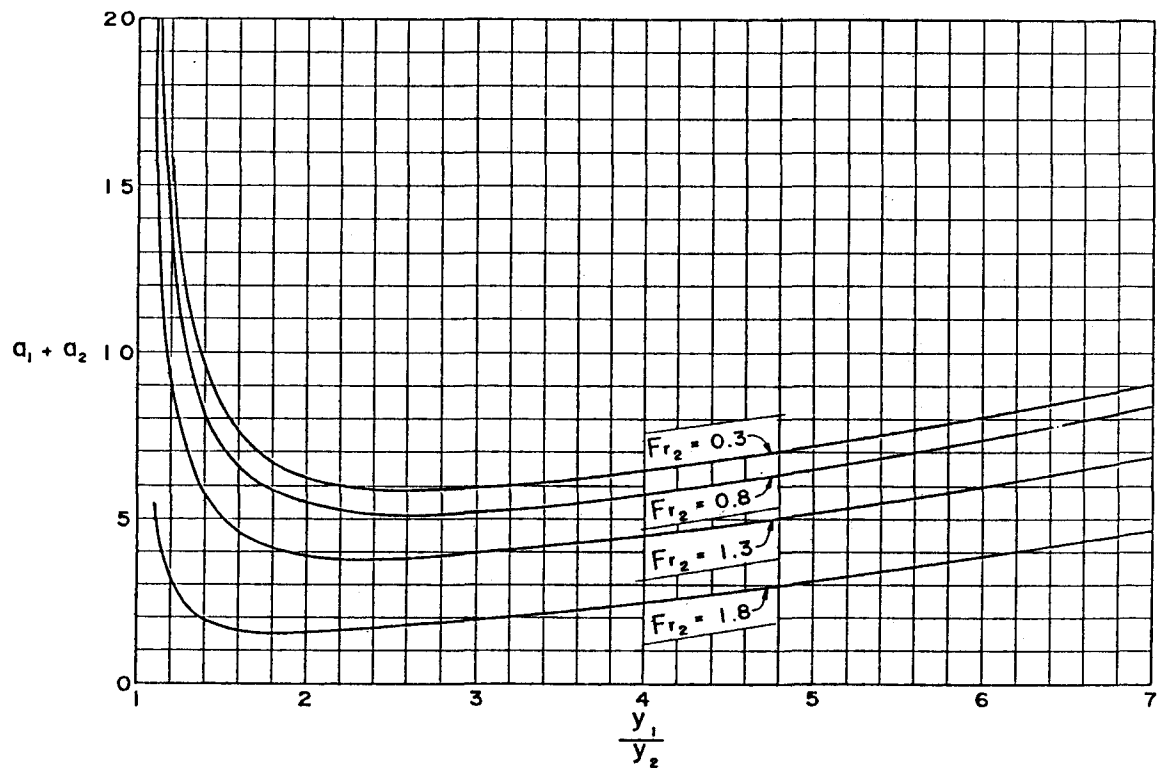
上、下游深度分別為  $y_1$  與  $y_2$  的均勻流，今於其上加置一波形與流速都保持不變的均勻進行波後，則流況是否能仍然維持為同一型態的波動，這可分為兩方面來判斷。首先，若初時福祿數  $F_{r_2}$  大於 2，任何均勻進行波都無法維持下去，最後一定會轉變成另一型態的波動。另一方面，若初時福祿數小於 2，且由上、下游均勻流深度  $y_1$  與  $y_2$  的差距所導致的氾濫臨界深度  $y_{cr}$  已高達下游深度  $y_2$  時，則均勻進行波同樣地無法維持，而終究會轉變成另一型態的波動，其時的臨界深度比  $[y_1/y_2]$ 。是波動保持為均勻進行波的上限，參閱圖十三。

均勻進行波是屬於正波的一種。一般而言，正波通常是指源自於因人為或天然因素而導致水位急劇上升的現象。不論使用線性分析或微擾分析，兩者的結果完全相同，而且其結果與均勻進行波的分析結果非常類似。若初時福祿數大於 2；或初時福祿數小於 2，但水位上升率超過式(22)所示的強度，正波都無法維持為同一型態的波動，最後一定會轉變成另一型態的波動。不論波動是屬於正波或均勻進行波，只要初時福祿數大於 2，兩者都無法維持為同一型態的波動，而一定轉變成另一型態的波動。在正波分析，這種另一型態的波動就是俗稱的「湧」；但在均勻進行波，却未見過任何稱呼，其實它也是「湧」。初時福祿小於 2，正波與均勻進行波各有一個臨界條件可使波動自原來的型態轉變成另一型態，參閱式(8)與(22)。但是由於現象本身並未完全相同，故臨界條件的型式也不一致。正波適宜於採用水位上升率  $\partial y/\partial t$  與初時福祿數  $F_{r_0}$  間的關係。均勻進行波却以深度比  $y_1/y_2$  與初時福祿數  $F_{r_2}$  為對象；經適當的轉換後，同樣地可改為水位上升率與初時福祿數間的關係。這樣的話，初時福祿數小於 2 時，正波與均勻波形成「湧」的臨界條件就可予以比較了，參閱圖六，兩者幾乎完全吻合。

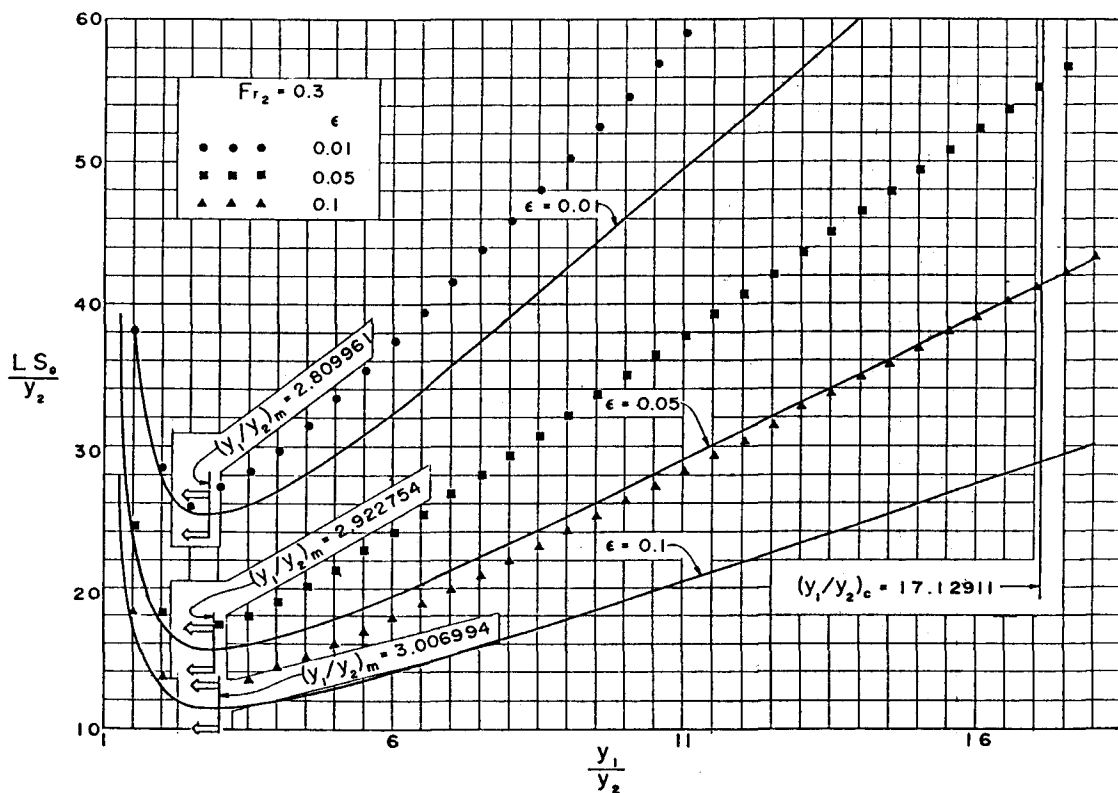
「湧」也是屬於波動的一種，只不過是它代表干擾之累積；易言之，超過某一臨界條件，使原來的波動轉變為另一種型態。若以這個觀點來看，另一種可供比較分析的波動，就是在原來的均勻流上加置一微小的正弦型波動。線性穩定分析的結果導致下列的結論。如果初時福祿數大於 2，任何微小正弦型流動的振幅都會被擴大，這一點很像正波與均勻進行波，若初時福祿數大於 2，原來的波動

時福祿數  $F_{r_2}$  與深度比  $y_1/y_2$ 。粗實線是根據式(18)所求得的分界線  $[y_1/y_2]_c$ ，線的右上部份是屬於「湧」的範圍，而左下部份則是屬於均勻進行波。其次，如上段所述，係數和  $a_1 + a_2$  之值與均勻進行波的長度均呈現局部極小的現象，對應的深度比  $[y_1/y_2]_m$  可由式(25)與(26)的導函數求得，其結果為一條虛線與三條略細實線。這四條實線分別對應於式(26)以及式(25)的趨近百分比  $\epsilon$  等於 0.01、0.05、0.01。實線的上部份為不合理範圍，因均勻進行波的長度是隨着深度比的增加而遞增，實線的下部份才是合理範圍，均勻進行波的長度是隨着深度比的增加而遞減。所以實線（包括粗實線）代表均勻進行波的最大深度比，而對應的無因次長度  $LS_0/y_2$  則展示於圖十四。圖十三的實線與粗實線顯示合理範圍的判斷大約視初時流況是次臨界流或是超臨界流而定。如果初時流況為次臨界流，臨界深度比  $[y_1/y_2]_c$  遠大於產生局部極小的深度比  $[y_1/y_2]_m$ ，所以均勻進行波的合理範圍（參閱圖九至圖十二）應為深度比大於 1 但小於產生局部極小的深度比  $[y_1/y_2]_m$ 。相反地，若初時流況屬於超臨界流，臨界深度比  $[y_1/y_2]_c$  小於產生局部極小的深度比  $[y_1/y_2]_m$ 。故合理範圍改為深度比大於 1 但小於臨界深度比；但是對應的無因次長度  $LS_0/y_2$ （代表均勻進行波的長度）却趨近於一個漸近值，並不隨着初時福祿數  $F_{r_2}$  的增加而趨近於零，參閱圖十四的虛線。這一點很像明渠水力學上的水躍；理論上，它的長度是視為零，其實它是有一段距離。

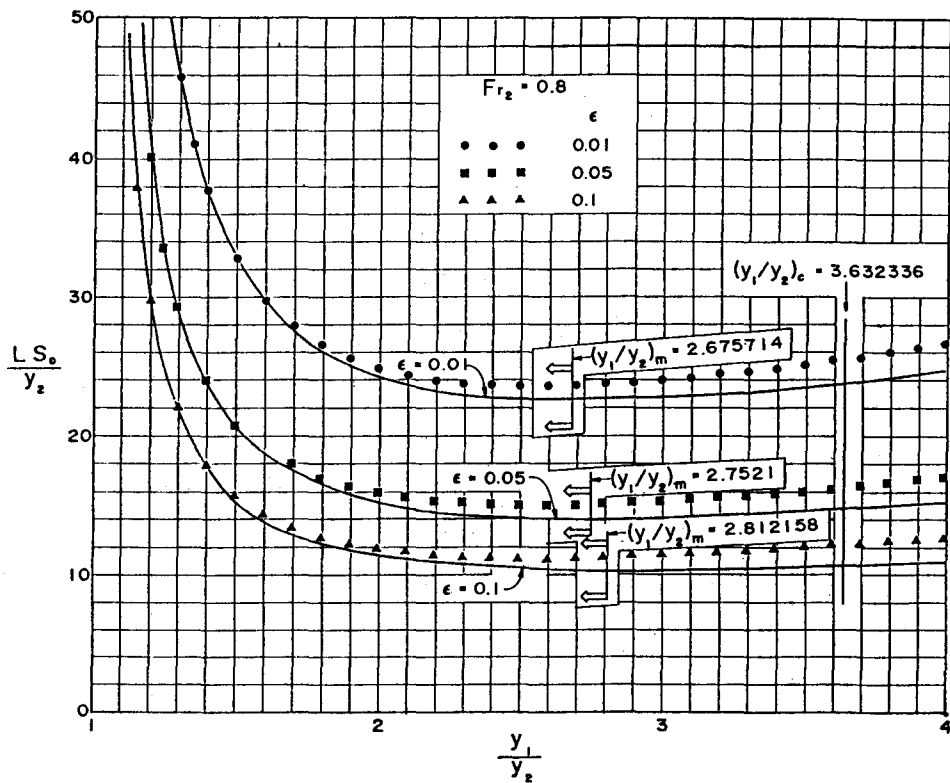
式(25)是包括三大項之和，其中以第二項所佔的比例為最大。為了分析這一現象，因此，對應的第二項同時以不同的圖形符號標示於圖九至圖十二。在上述所定義的合理範圍，圖形符號與實線間的差距並不太明顯，如果差距以百分計，一般而言，大都維持百分之五以下。這些差距也同樣地視初時流況是次臨界流或是超臨界流而有所差異。如果初時流況是次臨界流，差距隨着深度比的增加，只稍稍遞增，直到合理範圍的末端（即  $\frac{y_1}{y_2} = \left[ \frac{y_1}{y_2} \right]_m$ ），此時的差距為最大，大致等於 0.05。另一方面，若流況為超臨界流，圖形符號幾乎與實線吻合。總之，只要深度比在合理範圍內，均勻進行波的長度只須以式(25)的第二項計即已相當準確了。



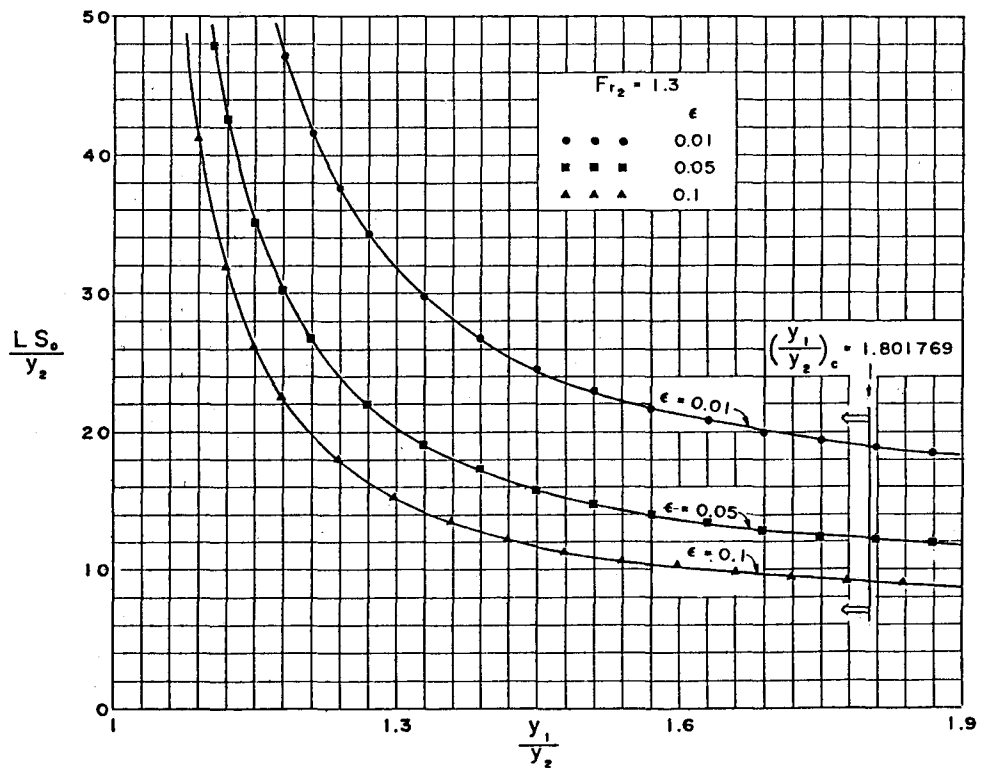
圖八 係數和  $a_1 + a_2$  與深度比  $y_1/y_2$  間之關係



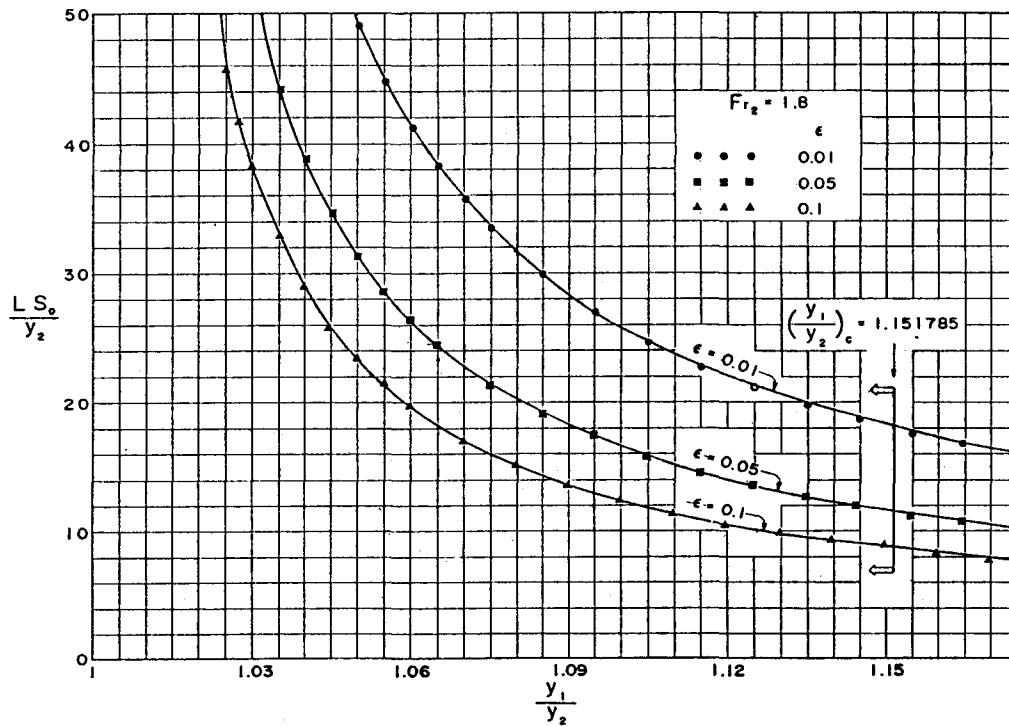
圖九 均勻進行波長度與深度比間之關係



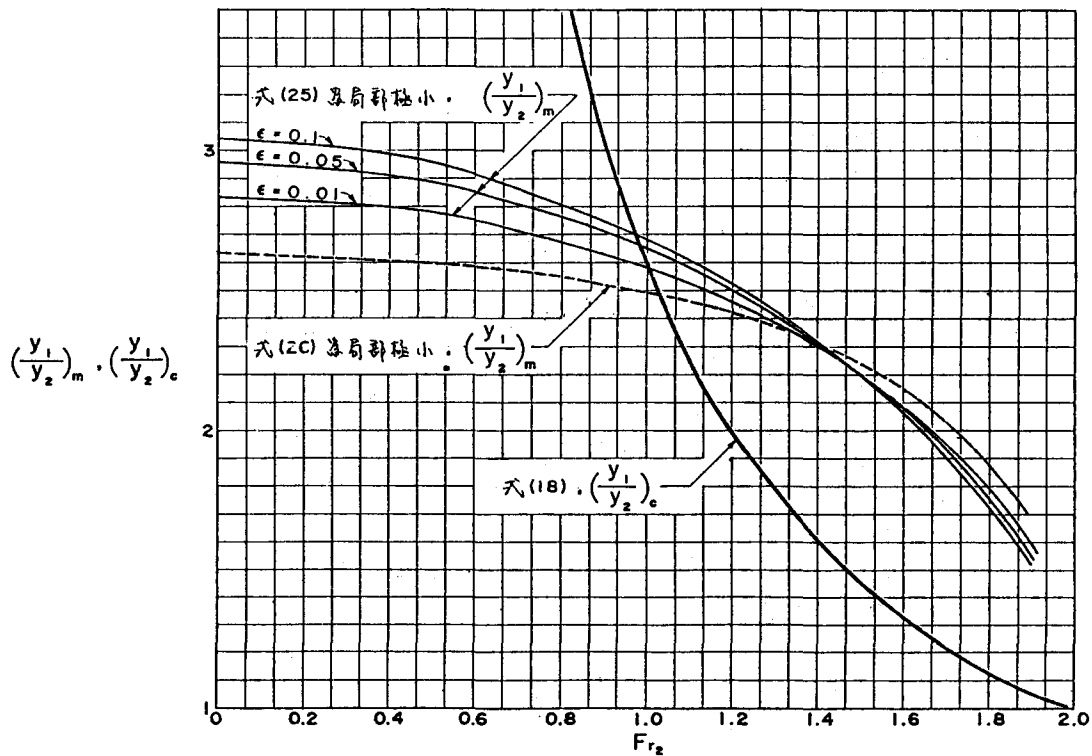
圖十 均勻進行波長度與深度比間之關係



圖十一 均勻進行波長度與深度比之關係



圖十二 均勻進行波長度與深度比間之關係



圖十三  $(y_1 / y_2)_c$  與  $(y_1 / y_2)_m$  之比較

都無法再維持下去而會轉變成另一型態的波動。但是初時福祿數小於2時，就無類似於式(8)或(2)的臨界條件，可改變原來的波動型態。

均勻進行波的無因次長度  $LS_0/y_2$  受初時福祿數  $F_{r2}$  與深度比  $y_1/y_2$  的影響。不論初時福祿數的多寡，無因次長度  $LS_0/y_2$  與深度比  $y_1/y_2$  間的函形圖形都是相似的，參閱圖九至圖十二；隨着深度比的增加，無因次長度  $LS_0/y_2$  首先呈現遞減而後再遞增，形成局部極小的現象，對應的深度比為  $[y_1/y_2]_m$ 。一般而言，如果初時流況為次臨界流，均勻進行波適用於小於  $[y_1/y_2]_m$  的任何深度比。參閱圖十三，而其長度只稍微隨着初時福祿數

的增加而遞減，參閱圖十四。但如果初時流況為超臨界流，均勻進行波的深度比必須小於臨界深度比  $[y_1/y_2]_c$ ，而不是小於  $[y_1/y_2]_m$ ，同時均勻進行波的長度  $LS_0/y_2$  幾乎隨着初時福祿數的增加而趨近於一漸近值，其值受制於趨近百分比  $\epsilon$ ，參閱圖十四。此外，圖十三顯示，當初時福祿數趨近於2時，臨界深度比  $[y_1/y_2]_c$  及形成局部極小的最大深度比  $[y_1/y_2]_m$  都趨近於1，可是圖十四却顯示對應的無因次長度  $LS_0/y_2$  却不趨近於0。易言之，均勻進行波轉變成另一型態的波動時——湧，其長度並不如理論上所想像的是侷限於一個非常非常小而且是趨近於0的範圍裏，實際上還是有一個範圍，只是比較小而已。

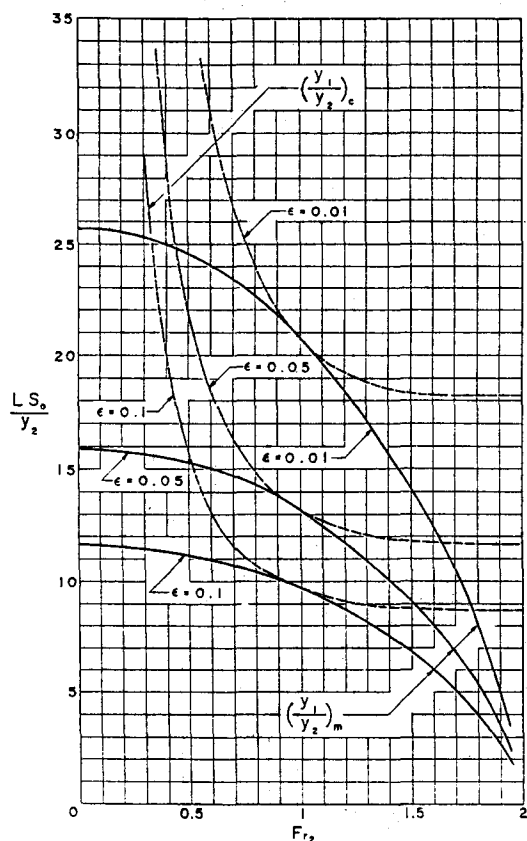
參閱(25)式，均勻進行波的無因次長度  $LS_0/y_2$  實際上是包括三大項之和，其中以第二項〔式(26)〕所佔的比例為最大，大致可高達百分之九十五。所以，只要深度比在合理的範圍內，均勻進行波只須以式(25)的第二項計即已相當準確了。

### 五、誌 謝

本院林瑾華小姐之細心打字，致本論得以順利完成，作者在此謹致深厚謝意。

### 參 考 書 目

1. Henderson, F.M., Open Channel Flow, McMillan Publishing Co., Inc., New York, N.Y., 1966, pp. 370-372.
2. Lighthill, M.J. and Whitham, G.B., "On Kinematic Waves I, Flood Movement in Long Rivers," Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A229, May, 1955, pp. 281-316.
3. Ponce, V.M., and Simons, D. B., "Shallow Wave Propagation in Open Channel Flow," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 103, HY12, Proc. Paper 13392, Dec., 1977, pp. 1461-1476.
4. Woolhiser, D.A., and Liggett, J. A., "Unsteady One-Dimensional Flow over a Plane-The Rising Hydrograph," Water Resources Research, Vol. 3, No. 3, Third Quarter, pp. 753-771, 1967.



圖十四 均勻進行波之合理深度比