# 灌溉土堤滲流之研究

## A Study on the Seepage of Irrigation Embankment

國立臺灣大學農業工程學系講師

譚　義　績

**Yih-Chi Tan**

### 摘　　要

渠道中輸水損失種類很多，但是因爲沒有內面工所以造成大量的流量滲流更是可觀，因爲灌溉渠道中之水位均較水田的灌溉水深爲高，所以由渠道入滲到水田中的水量一般均利用杜卜 (Dupuit) 假設去推算，至於推算結果是否精確？是否會受到滲流面 (Seepage Surface) 影響？因爲滲流面在物理上是個不連續的現象，至於數學上也是算個較難分析的問題，Polubarinova-Kochina (1952) 和 Knight (1981) 曾利用積分方式求得分析解，所得的結果和杜卜假設推論所得結果一樣。

本文綜合水波力學原理的動力邊界及運動邊界配合壓力及達西速度對垂直面積分方式求得與杜卜假設相同的滲流量，文中並闡明其三種計算方法，因爲自由水面邊界條件，其觀念溯源於水波力學概念，其結果有助於對灌溉土堤滲流量精確計算。利用此理論亦可推展到堤岸工程及山坡地水土保持，因爲決堤及山崩主要因素在於壓力上升而引起管湧現象。

### Abstract

The seepage from the irrigation channel through the unlining embankment to the paddy field due to the higher water level of the channel. Usually, the quantity of the seepage flow is estimated by means of Dupuit assumption. Are the results of the estimations accurate? Does the seepage surface affect the flow rate of seepage quantity? The seepage is not only a discontinuous phenomenon in physics, but also a difficult analysis in mathematics. Polubarinova-Kochina(1952) and Knight(1981) proved that the quantity of seepage flow is not related the seepage surface and the conclusion of the results are same as the Dupuit assumption approach.

The purpose of this study aimed on the seepage quantity computation which was based on free surface boundary conditions of wave mechanics; namely: dynamic boundary condition and kinematic boundary condition. In addition, the result is calculated by means of integral of the pressure and Darcy's velocity distribution on the vertical profile embankment. Consequently, this concept can be applied not only protection of river dike but also stability of hill slope.

## 前　　言

本省目前灌溉用水佔了所有用水中大部分，但是在灌溉時往往輸水損失的估計，均係憑藉經驗公式或是老師傅長時期累積經驗來推算。由於本省春耕時期，而梅雨季節尚未來的時候，全省各地若無水庫支援，則普遍有水荒的現象，渠道中有許多部份由於經費關係，所以沒有做內面工，所以浪費許多寶貴的水資源。

渠道輸水損失可分爲三類：(一)由於渠道水表面受到蒸發現象，(二)經由底部深層滲漏到地下水源，(三)則是經由渠道側面滲透到水田中，本文係主要針對第三類損失做精確理論分析。

一般流量計算均依質量不滅原理，及達西速度，而本文乃利用壓力對垂直斷面積分和杜卜假設三種綜合分析，其所得流量計算結果顯示三種方法可得到相同的滲流量，Harr (1962) 曾闡明計算滲流量方式，Liggett (1977) 曾利用數值方式去計算水位遽降後滲流面變化情形。將來亦希望能推廣至堤岸工程或山坡地水土保持計算滲流量，以防止決堤或山崩現象發生。

## 一、利用壓力積分方式

從地下水支配方程式 (Governing Equation)來看應爲（請參考圖1）

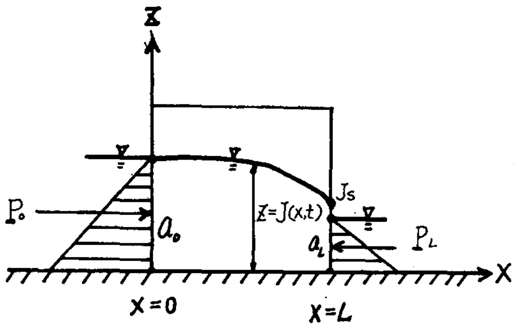


圖 1　土堤滲流之關係圖

$$S_0\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(K_{xx}\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial Z}(K_{zz}\frac{\partial h}{\partial Z}) \quad (1)$$

其中 h 爲地下水的靜壓水頭 (Pizometric head)

$K_{xx}, K_{zz}$ 分別爲在水平及垂直方向的水力傳導係數(Hydraulic Conductivity)

X, Z 爲直角座標系統，t 爲時間，$S_0$爲比貯存係數，而

$$h=\frac{p}{\gamma}+Z \quad \cdots\cdots(2)$$

其中：p 爲壓力，而 $\gamma$ 爲水的單位重。

如果在等向性時 (isotropic)，則 $K_{xx}=K_{zz}=K$，則(1)式爲

$$S_0\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial Z}(K\frac{\partial h}{\partial Z}) \quad \cdots\cdots(3)$$

假設在穩度流狀態下，則 $\frac{\partial h}{\partial t}=0$，因此

$$\frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial Z}(K\frac{\partial h}{\partial Z})=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

倘若在飽和狀態下，則K＝常數，將其移出方程式，則爲——拉布拉斯方程式 (Laplace Equation)，所以

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial Z^2}=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

參考圖一，可以請邊界條件列舉如下：

(A) 紐曼邊界條件(Neumann Boundary Condition)

$$\frac{\partial h}{\partial Z}=0 \quad \text{在} Z=0 \text{時} \quad \cdots\cdots(6)$$

(B) 狄瑞區邊界條件 (Dirichlet Boundary Condition)

$h=a_0$　當 X＝O時……(7—1)

$h=a_L$　當 X＝L時……(7—2)

至於自由水面邊界條件可分爲 (C), (D) 兩種情況

(C) 動力邊界條件 (Dynamic Boundary Condition)

由(2)式因爲在自由水面的關係，而其相對大氣壓 p＝0，而滲透面邊界條件 (Seepage Face Boundary Condition) 可歸納與 (C) 項，所以

$h=Z$　在 $Z=J(x,t)$ 時……(8)

(D) 運動邊界條件 (Kinematic Boundary Condition)

因爲水分子倘若沿着自由水面運動，倘若水分子不離開自由水面（除了水波力學中的碎波外），則由(8)式令

$F(x,z,t)=J(x,t)-Z=0$ ……(9)

而 F(x, z, t) 的全微分必然爲零，因此

$$\frac{DF}{Dt}=0 \quad \cdots\cdots(10-1)$$

但是

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+V_x\frac{\partial F}{\partial X}+V_z\frac{\partial F}{\partial Z} \quad \cdots\cdots(10-2)$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial t}+V_x\frac{\partial F}{\partial_x}+V_z\frac{\partial F}{\partial Z}=0 \quad \cdots\cdots(10-3)$$

而由達西定律 (Darcy's law)

$$V_x=-K\frac{\partial h}{\partial X} \quad \cdots\cdots(11-1)$$

$$V_z=-K\frac{\partial h}{\partial Z} \quad \cdots\cdots(11-2)$$

由(10—3)，配合(9)及(11—1)，(11—2)可得

$$\frac{\partial(J(x,t)-Z)}{\partial t}+\left(-K\frac{\partial h}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial(J(x,t)-Z)}{\partial X}\right)+\left(-K\frac{\partial h}{\partial Z}\right)\left(\frac{\partial(J(x,t)-Z)}{\partial Z}\right)=0 \cdots(12-1)$$

代簡可得

$$\frac{\partial J}{\partial t}=K\left(\frac{\partial h}{\partial X}\frac{\partial J}{\partial X}-\frac{\partial h}{\partial Z}\right)$$

在Z=J(x, t) 時 $\cdots\cdots(12-2)$

$$\frac{I}{K}\frac{\partial J}{\partial t}=\left(\frac{\partial h}{\partial X}\frac{\partial J}{\partial X}-\frac{\partial h}{\partial Z}\right)$$

在Z=J(x, t) 時 $\cdots\cdots(12-3)$

由(2)式，從壓力的觀點來看

$$\frac{p}{\gamma}(x,z,t)=h(x,z,t)-Z \quad \cdots\cdots(13)$$

因爲Z=0時 $p/\gamma=h$，Z=J(x,t) 時，由(8)式，h(x,z,t)=Z，則 p=0 而任一垂直面的總壓力，可以寫成下列的積分型態

$$P(x,t)=\int_0^{J(x,t)}\frac{p}{r}(x,z,t)dZ=\int_0^{J(x,t)}(h(x,z,t)-Z)dZ \cdots\cdots(14)$$

但利用尼布萊茲法則 (Leibnitz rule)及(8) 式

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial X}\int_0^{J(x,t)}(h(x,z,t)-Z)dZ=\int_0^{J(x,t)}\frac{\partial h(x,z,t)}{\partial X}dZ+\frac{\partial J(x,t)}{\partial X}(h-Z)\Big|_{Z=J(x,t)} \cdots\cdots(15)$$

由(8)式代入(15)式可得

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial X}=\int_0^{J(x,t)}\frac{\partial h}{\partial X}dZ \cdots\cdots(16)$$

將(16)式兩邊同乘(−K)，而因爲K爲常數，所以

$$Q=-K\frac{\partial P(x,t)}{\partial X} \cdots\cdots(17-1)$$

因此 (17—1) 式以壓力梯度表示流量方法，且

$$Q=\int_0^{J(x,t)}-K\frac{\partial h}{\partial X}dZ=\int_0^{J(x,t)}V_x\,dZ \cdots\cdots(17-2)$$

所以可以得知(17-2)式係利用壓力積分所得之正確解 (Exact Solution)，完全符合連續性方程式 (Continuity Equation)

若將(16)式再微分一次並配合尼布萊茲法則，則可得

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial X^2}=\frac{\partial}{\partial X}\int_0^{J(x,t)}\frac{\partial h}{\partial X}dZ=\int_0^{J(x,t)}\frac{\partial^2 h}{\partial X^2}dZ+\frac{\partial J}{\partial X}\frac{\partial h}{\partial X}-\frac{\partial O}{\partial X}\frac{\partial h}{\partial X} \cdots\cdots(18)$$

由(5)式，可得$\frac{\partial^2 h}{\partial X^2}=-\frac{\partial h}{\partial Z^2}$代入(18)式中，則

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial X^2}=\int_0^{J(x,t)}-\left(\frac{\partial^2 h}{\partial Z^2}\right)dZ+\frac{\partial J}{\partial X}\frac{\partial h}{\partial X}=\left(\frac{\partial h}{\partial X}\frac{\partial J}{\partial X}-\frac{\partial h}{\partial Z}\right)$$

在Z=J(x,t) 時 $\cdots\cdots(19)$

由(6)式及(12—3)式代入(19)式右邊可得

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}=\frac{1}{K}\frac{\partial J}{\partial t} \cdots\cdots(20)$$

在穩定流的狀態下，則$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}=0$，其解應爲

$$P(x)=AX+B \cdots\cdots(21)$$

由邊界條件 (7—1) 式及(7—2)式，代入(14)式中積分後

$$P(o)=\frac{1}{2}a_o^2 \cdots\cdots(22-1)$$

$$P(L)=\frac{1}{2}a_L^2 \cdots\cdots(22-2)$$

因此

$$P(x)=\frac{X}{2L}(a_L^2-a_o^2)+\frac{I}{Z}a_o^2 \cdots\cdots(23)$$

將(23)式代入(17—1)式中，可求單位流量爲

$$Q=-K\frac{\partial P}{\partial X}$$

$$=+\frac{K}{2L}(a_0^2-a_L^2) \quad \cdots\cdots(24)$$

## 二、利用杜卜假設方式

傳統上利用杜卜(Dupuit)假設，以一維方式來研究，則支配方程式爲 Boussinesq 方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial X}(Kh\frac{\partial h}{\partial X}) \quad \cdots\cdots(25)$$

如果在飽和狀態及穩定狀態，則

$$\frac{d^2h^2}{dX^2}=0 \quad \cdots\cdots(26)$$

其解的型態應爲

$$h^2=CX+D \quad \cdots\cdots(27)$$

而

$$\frac{dh^2}{dX}=C \quad \cdots\cdots(28)$$

因爲單位流量

$$Q=\frac{A}{b}\cdot V$$

$$=h\cdot(-K\frac{dh}{dX})$$

$$=-\frac{K}{2}\frac{dh^2}{dX} \quad \cdots\cdots(29)$$

比較(28)及(29)式可得

$$C=-\frac{2Q}{K} \quad \cdots\cdots(30)$$

而其邊界條件，(7—1)式代入(27)式可得

$$h^2=-\frac{2Q}{K}X+a_0^2 \quad \cdots\cdots(31)$$

代入(7—2)式至(31)式可得

$$a_L^2=-\frac{ZQ}{K}L+a_0^2 \quad \cdots\cdots(32)$$

所以

$$Q=\frac{K}{2L}(a_0^2-a_L^2) \quad \cdots\cdots(33)$$

其結果相同於(24)式

## 三、利用速度積分方式

其邊界條件可分爲

(a) 動力邊界條件

$$h(X,Z\doteq J)=J \quad \cdots\cdots(34)$$

(b) 狄瑞區邊界條件

$$h(O,Z)=a_0 \quad \cdots\cdots(35—1)$$

$$h(L,O\leq Z\leq a_L)=a_L \quad \cdots\cdots(35—2)$$

(c) 滲透面邊界條件

$$h(L,a_L\leq Z\leq J_s)=Z \quad \cdots\cdots(36)$$

所以利用速度在垂直斷面積分，配合尼布萊茲法則，可得

$$Q=\int_0^J V_x d_z$$

$$=-K\int_0^J\frac{\partial h}{\partial X}dZ$$

$$=-K\frac{\partial}{\partial X}\int_0^J h\,dZ+KJ\frac{\partial J}{\partial X} \quad \cdots\cdots(37)$$

將(37)式積分後

$$QX=-K\int_0^J hdZ+K\frac{J^2}{2}+C_1 \quad \cdots\cdots(38)$$

代入邊界條件(35—1)，可得$C_1=K\frac{a_0^2}{2}$

再將(35—2)及(36)式代入，可得

$$QL=-K\int_0^{a_L}a_LdZ-K\int_{a_L}^{J_s}ZdZ+\frac{K}{2}(J_s^2+a_0^2)$$

$$=-Ka_L^2-\frac{K}{2}(J_s^2-a_L^2)+\frac{K}{2}(J_s^2+a_0^2)$$

所以

$$Q=\frac{K}{2L}(a_0^2-a_L^2) \quad \cdots\cdots(39)$$

比較結果可見(24)，(33)，(39)均一樣並不受到滲透面($J_s$)之影響。

## 結論與建議

(一)渠道滲流損失對寶貴灌漑水資源中佔相當重要地位，目前主要幹線多有加舖內面工以減少流量損失，由於灌漑水路系統相當長，希望在支渠、分渠亦能普遍加舖內工，以節省寶貴水資源。

(二)計算流量時，傳統上均依能量公式中位能及速度來推算。本文亦强調利用壓力亦可以求得流量，而所依據的觀念引用水波力學的概念，不僅符合水力學的觀點，亦符合了自由水面的邊界條件。

(三)由於水流在土壤中流動是極爲緩慢，所以並不十分受人重視，但是一但發生管湧 (piping) 現象時，會破壞土堤，而造成決堤現象，尤其在颱風多雨季節，有時水位太高時，壓力增强，就是有內面工亦會發生決堤現象，但是若無內面工，其決堤時間較早，是由於壓力太高所導致管湧現象。

(四)本文主要目的在了解滲流現象對灌漑渠道所造成的輸水損失，希望將來能配合水工設計比較有無內面工對堤岸保護做實質探討，並可分析決堤因

素，對水患所產生的危害有較明確的分析，有利於防洪之研究。

(四)本文亦有助於山坡地水土保持之研究，本省山區往往因爲在持續降雨使得自由水面上升，使得壓力升高，造成山崩，危害頗巨，所以邊坡保護區，如高速公路或山區道路多加注意其地下水位變化，並加以疏導，以免造成山崩而導致人員傷亡。

## 參 考 資 料


1.王如意，易任，應用水文學，國立編譯館，P. 260—P.261，民國七十一年。

2.施嘉昌，曹以松，徐玉標，甘俊二，灌溉排水原理，第三版，國立編譯館，P.198—P.209，民國七十三年。

3.Harr, M. E., *Groundwater and Seepage*, McGraw-hill, P.50—P.56, 1962.

4.Todd, D. K., *Groundwater Hydrology*, Second edition, P.114—P.115, 1980.

5.Polubarinova-Kochina., *Theory of Ground-Water Movement,* 1952, English Translation by De Weist, Princeton University Press, P.281—P.282, 1962.

6.Dupuit, J., *Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux,* Second edition, Paris, 1863.

7.Bear, J., Dynamics of Fluids in Porous Media, P. 260—P. 262 Elsevier, New, York, 1972.

8. Knight, J. H., Steady Periodic Flow Through a Rectangular Dam, Water Resources Research, Vol. 17, No. 4, P. 1222-1224, 1981.

9.Liggett, J. A., Location of Free Surface in Porous Media, Journal of Hydraulic Division, ASCE, 103 (HY4), P.353—P.365, 1977.