

迴水影響下渠道中淺水波傳播之線性解析

Linear Approximation of Shallow Water Wave Propagation in Open Channels with Backwater Effect

國立臺灣大學農業工程學研究所副教授

許 銘 熙

Ming-hsi Hsu

摘 要

本文基於微小振幅擾動之假設，推導一線性零慣性解析模式，以分析渠道中水流之傳播現象。文中利用拉普拉斯轉換、馬林逆轉換理論以及複數積分之殘值定理等數學方法，以求解渠道中水深之變化情況。在上、下游端，以單峰餘弦水深歷線與三角水深歷線為例，輸入線性解析模式中求得解析解，並且與線性隱式中央差分法數值解作比較。除外，利用普里斯曼非線性零慣性數值模式，以比較及探討解析解過程中線性假設之限制及適用性。

ABSTRACT

Based on the assumption of small amplitude disturbance, a linear analytical zero-inertia model was developed to analyse the wave propagation in open channels. In the analytical model, Laplace transformation, Mellin inverse theorem and complex integration by method of residuals were employed. The single sinusoidal hydrographs and triangular hydrographs are imposed at upstream and downstream ends so as to analyse the wave propagation using the analytical model. In addition, numerical solutions of the linear implicit central difference scheme were simulated and compared with the analytical solutions. Preissmann nonlinear zero-inertia model was then applied to compare and investigate availability and restriction of the analytical model due to the assumption of small disturbance.

一、前 言

一般渠道中淺水波之傳播現象，可依動力波模式準確模擬。動力波模式中，其運動方程式共包括慣性力項、壓力梯度項、重力項以及阻力項等。自然河川之緩變量流如洪水波傳播等，其慣性力項通常遠比其他作用力項為小，若忽略其影響，常可在不失精度下節省許多之計算時間，最具有實用價值^(3,7)。

Akan 及 Yen⁽¹⁾曾利用有限差分法建立零慣性數值模式，以求解渠道中水流之運動情況。Ponce⁽⁹⁾

等人亦曾以理論分析來探討零慣性模式及運動波模式之適用性。顏⁽¹⁶⁾等曾建立淡水河流域洪水演算模式，並比較零慣性模式與動力波模式之模擬結果，發現零慣性模式為一經濟可行之洪水演算模式，適合於臺灣河川之洪水演算。

Hayami⁽⁶⁾ 首先將零慣性模式簡化成對流擴散型式之方程式，並求得上游歷線控制之積分型式解析解。Dooge^(4,5) 再將Hayami 之方程式予以線性化，先求得單位脈衝函數之反應歷線，再配合摺合積分求得解析解。Keefe⁽⁸⁾ 將入流歷線分割成垂直條狀，再配合 Hayami 之解析解從事洪水演算。Tingsanchali⁽¹⁰⁾等利用 Keefe 之演算方法進一步應用於泰國東北部湄公河流域之洪水模擬。王^(12,13)曾從事渠道中變量流解析法之研究，並且得到一序列積分型式之解析解。許與何⁽¹⁴⁾ 再利用拉普拉斯轉換方法及殘值定理，在下游為均勻流況之條件下，解得一級數型式之完全解析解。

本文則考慮下游有迴水影響條件下，依微小擾動波之假設，將零慣性模式線性化，再配合適當之邊界條件及起始條件，解得渠道中微小擾動波之傳播情況。

二、零慣性模式及線性化

2.1 非線性零慣性模式

寬淺渠道中，水流之流況極為複雜，運動機構中通常包括慣性力、壓力、重力以及阻力等作用力項。其中若忽略慣性項之影響，單位渠寬之連續方程式與運動方程式可寫成^(8,7)：

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = S_0 - S_f \dots\dots\dots(2)$$

- 式中，t：時間座標；
- x：沿水流方向之距離座標；
- y：水深；
- u：沿 x 方向之平均流速；
- S₀：渠底渠床坡度；
- S_f：摩擦坡度；若以蔡斯 (chezy) 公式表示，則

$$S_f = \frac{u^2}{c^2 y} \dots\dots\dots(3)$$

c 為蔡斯係數。方程式(1)、(2)分別表示渠道中變量流之連續與運動方程式，係一組非線性之偏微分方程式，式中共包括了兩個因變數 (dependent variables)，至目前為止尚無法求得解析解。一般常利用數值方法求解，如有限差分法、特性曲線法或有限元素法等，其中尤以普里斯曼隱式差分法最為常用 (Preissmann implicit scheme)。此方法目前已廣泛地使用在河川水流之模擬工作上。

2.2 零慣性模式之線性化

將(3)式代入(2)式中，解得 u，再代入(1)式中，可得到：

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{3}{2} u \frac{\partial y}{\partial x} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots\dots\dots(4)$$

式中， $K = \frac{y u}{2 (S_0 - \frac{\partial y}{\partial x})}$

今假設渠道中之起始水深為 y₀，即 y(x, 0) = y₀。並且，上游端有一微小擾動波：

$$y(0, t) = y_0 + h_0 + H_1(t) \dots\dots\dots(5)$$

式中， $(h_0 + y_0)$ 稱為參考水深，為入流擾動波對延時取平均之水深； $H_a(t)$ 為上游水深對參考水深之差異量，即：

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(0, t) dt = y_0 + h_0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

式中， T 為上游入流擾動波之延時。同理，在渠道下游邊界處之擾動波亦可寫成：

$$y(L, t) = y_0 + h_0 + H_d(t) \quad \dots\dots\dots(7)$$

式中， L 為河道之長度。因(4)式為一非線性方程式，其解析解應可用一級數來表示：

$$y(x, t) = (y_0 + h_0) \left\{ 1 + \frac{\phi_1}{(y_0 + h_0)} + \frac{\phi_2}{(y_0 + h_0)^2} + \dots \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

假設 y 為一微小擾動波，即 $\phi_1 \ll (y_0 + h_0)$ ，因此可忽略級數中之高階項，今僅選用前兩項為其近似解，即：

$$y = y_0 + h_0 + \phi_1 \quad \dots\dots\dots(9)$$

將(9)式代入(4)式中，可得到：

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \omega \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式中，} \quad \omega &= \frac{3}{2} c \sqrt{(y_0 + h_0) \cdot S_0} \\ \mu &= \frac{\omega (y_0 + h_0)}{3 S_0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

再將(10)式代入(9)式中，可得：

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \omega \frac{\partial y}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(12)$$

(12)式為一對流擴散型式之線性方程式，本文之目的即配合設定之邊界條件，如(5)，(7)兩式，以求解渠道中之水深 y 隨時間及空間之變化情形。

三、基本型歷線之解析

3.1 上、下游端為餘弦函數型之水深

假設渠道之起始水深為 y_0 ，而上、下游端各有一週期性連續之餘弦函數型水深，其振幅分別為 $y_u/2$ 與 $y_d/2$ ，如圖 1 所示，其函數可分別表示為：

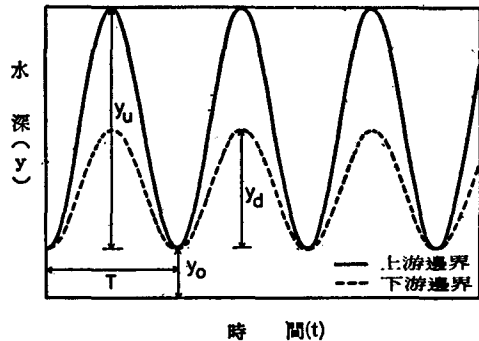


圖 1 餘弦函數之邊界條件

$$\left. \begin{aligned} y(0, t) &= y_0 + \frac{y_u}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right), t \geq 0 \\ y(L, t) &= y_0 + \frac{y_d}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right), t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

式中， L 為渠道之長度， T 為餘弦波之週期。今再將控制方程式及其邊界條件予以無因次化，即(12)式及(13)式可寫成如下：

$$\frac{\partial y^*}{\partial \tau} + V \frac{\partial y^*}{\partial \ell} = D \frac{\partial^2 y^*}{\partial \ell^2} \quad \dots\dots\dots(14)$$

其上、下游端之邊界條件分別寫成：

$$\left. \begin{aligned} y^*(0, \tau) &= \frac{y_a^*}{2} [1 - \cos 2\pi\tau] \\ y^*(1, \tau) &= \frac{y_d^*}{2} [1 - \cos 2\pi\tau] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式中， $y^* = (y - y_0)/(y_0 + h_0)$ ；

$$\ell = x/L;$$

$$V = \omega T/L;$$

$$\tau = t/T;$$

$$D = \mu T/L^2;$$

$$y_a^* = y_a/(y_0 + h_0);$$

$$y_d^* = y_d/(y_0 + h_0)。$$

起始條件則可寫成 $y^*(\ell, 0) = 0$ 。為求得(14)式之解，本文中利用拉普拉斯轉換理論，將(15)式取拉普拉斯轉換後可得到：

$$SU + VU' = DU'' \dots\dots\dots (16)$$

式中 $U = L[y^*] = \int_0^\infty e^{-s\tau} \cdot y^* d\tau$ ， U' 及 U'' 分別表示 U 對 x 之一次及二次微分。同理，邊界條件(15)式亦可取拉普拉斯轉換而得到：

$$\left. \begin{aligned} U(0) &= \frac{y_a^*}{2S} - \frac{y_a^* \cdot S}{2(S^2 + 4\pi^2)} \\ U(1) &= \frac{y_d^*}{2S} - \frac{y_d^* \cdot S}{2(S^2 + 4\pi^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(16)式為一個二階常微分方程式，其解可利用(17)式之兩個邊界條件求得如下：

$$\begin{aligned} U(s, \ell) &= \frac{y_a^* \left[\frac{1}{S} - \frac{S}{S^2 + 4\pi^2} \right] \sinh[b \cdot (1 - \ell)]}{2 \sinh(b)} \cdot e^{\frac{V\ell}{2D}} \\ &+ \frac{y_d^* \left[\frac{1}{S} - \frac{S}{S^2 + 4\pi^2} \right] \cdot \sinh(b \cdot \ell)}{2 \sinh(b)} \cdot e^{\frac{V(\ell-1)}{2D}} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

式中， $b = \frac{\sqrt{V^2 + 4DS}}{2D}$ 。

今須再引用拉普拉斯逆轉換運算，方可求得水深 y 。因(18)式之函數甚為複雜，其逆轉換無法以一般之數學表中查出，本文則採用馬林逆轉換定理 (Mellin inverse theorem)⁽¹¹⁾，將水深表示成複數平面上之積分，然後再利用複數之殘值定理(residual theorem)^(8,11)，將複數積分寫成積分區內各極點(poles)殘值和之函數關係，其詳細之推導如附錄(-)所示，最後可解得水深 y 隨時間及空間之變化如下：

$$y = y_0 + G(\ell, \tau; y_a, y_d) \dots\dots\dots (19)$$

式中， $G(\ell, \tau; y_a, y_d) =$

$$\begin{aligned}
& 2\pi^2 \cdot y_u \cdot e^{-\frac{V\ell}{2D}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sinh[(1-\ell) \cdot |V|/2D]}{4\pi^2 \sinh[|V|/2D]} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2Dn\pi \sin[(1-\ell)n\pi]}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) \cdot [(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2 + 4\pi^2]} \\ & \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) \cdot \tau} \\ & - \frac{(EH_u + FK_u) \cos(2\pi\tau) - (EK_u - FH_u) \sin(2\pi\tau)}{4\pi^2(E^2 + F^2)} \end{aligned} \right\} \\
& + 2\pi^2 \cdot y_d \cdot e^{-\frac{V(\ell-1)}{2D}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sinh[\ell \cdot |V|/2D]}{4\pi^2 \sinh[|V|/2D]} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2Dn\pi \sin[\ell n\pi]}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) \cdot [(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2 + 4\pi^2]} \\ & \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) \cdot \tau} \\ & - \frac{(EH_d + FK_d) \cos(2\pi\tau) - (EK_d - FH_d) \sin(2\pi\tau)}{4\pi^2(E^2 + F^2)} \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\tag{20}$$

式中，

$$\ell = x/L; \tau = t/T; V = \omega \cdot T/L; D = \mu T/L^2;$$

$$E = \cos\left(\frac{B}{2D}\right) \sinh\left(\frac{A}{2D}\right);$$

$$F = \sin\left(\frac{B}{2D}\right) \cdot \cosh\left(\frac{A}{2D}\right);$$

$$H_u = \cos\left(\frac{1-\ell}{2D} B\right) \sinh\left(\frac{1-\ell}{2D} A\right);$$

$$K_u = \sin\left(\frac{1-\ell}{2D} B\right) \cosh\left(\frac{1-\ell}{2D} A\right);$$

$$H_d = \cos\left(\frac{B}{2D} \ell\right) \sinh\left(\frac{A}{2D} \ell\right);$$

$$K_d = \sin\left(\frac{B}{2D} \ell\right) \cdot \cosh\left(\frac{A}{2D} \ell\right);$$

$$A = \frac{4\sqrt{2} \pi D}{\sqrt{-V^2 + \sqrt{V^4 + 64\pi^2 D^2}}};$$

$$B = \frac{\sqrt{-V^2 + \sqrt{V^4 + 64\pi^2 D^2}}}{\sqrt{2}}.$$

(13)式中若下游邊界之振幅 $y_d = 0$ ，即表示下游端為固定水深 y_0 ，此情況下(20)式之解相當於上游端為餘弦波型，而下游端為固定水深 y_0 之解析解。同理，當 $y_u = 0$ 時，表示上游端為固定水深，下游端為餘弦波型之波傳解析。

3.2 上、下游端為直線函數型之水深

假設渠道之起始水深為 y_0 ，上、下游端各有一直線函數之水深，其斜率分別為 b_1/T 以及 b_2/T ，分別如圖 2 所示，其方程式可表示為：

$$\left. \begin{aligned} y(0, t) &= y_0 + b_1 \frac{t}{T}, t \geq 0 \\ y(L, t) &= y_0 + b_2 \frac{t}{T}, t \geq 0 \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

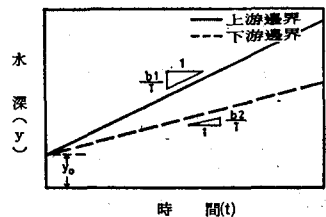


圖 2 直線函數型之邊界條件

式中， T 為上游端入流波之延時，係為一定值，將在 4.3 節中再予定

義。如前節所述，利用拉普拉斯轉換法，可解得在邊界條件(21)式情況下，(12)式之解為：

$$y = y_0 + H(\ell, \tau; b_1, b_2) \tag{22}$$

式中， $H(\ell, \tau; b_1, b_2) =$

$$\begin{aligned}
& b_1 \cdot e^{\frac{V\ell}{2D}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \tau \cdot \frac{\sinh[(1-\ell) \cdot |V|/2D] + (1-\ell) \cdot \cosh[(1-\ell) \cdot |V|/2D]}{\sinh[|V|/2D]} \\ & - \frac{1}{|V|} \cdot \frac{\sinh[(1-\ell) \cdot |V|/2D] \cdot \cosh[|V|/2D]}{\{\sinh[|V|/2D]\}^2} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2Dn\pi \cdot \sin[n\pi(1-\ell)]}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2} \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) \cdot \tau} \end{aligned} \right\} \\
& + b_2 \cdot e^{\frac{V(\ell-1)}{2D}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \tau \cdot \frac{\sinh[\ell \cdot |V|/2D] + \ell \cdot \cosh[\ell \cdot |V|/2D]}{\sinh[|V|/2D]} \\ & - \frac{1}{|V|} \cdot \frac{\sinh[\ell \cdot |V|/2D] \cdot \cosh[|V|/2D]}{\{\sinh[|V|/2D]\}^2} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2Dn\pi \cdot \sin[n\pi\ell]}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2} \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) \cdot \tau} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)
\end{aligned}$$

(22)式之詳細推導過程詳如附錄(二)所示。(21)式中若 $b_2 = 0$ ，則表示下游端為固定水深 y_0 。此情況下(23)式之解相當於上游端為一斜線上升歷線，下游端為固定水深 y_0 情況下之解析解。同理，(23)式中 $b_1 = 0$ ，則表示上游端為一固定水深 y_0 ，下游為一斜線歷線情況下之波傳解析解。

四、組合歷線之解析

(12)式為一線性方程式，在求解過程中，疊加原理可助於此方程式之求解。因此某上游及下游邊界條件若可由前述之基本型水深歷線線性組合而成，則這些組合邊界條件之解析解，即可由疊加原理寫成前述基本型歷線解之相疊加。本文中僅以下列三種邊界條件為例，說明其求解之過程。

4.1 上游為單峯餘弦波，下游為固定水深（第一型波）

如圖3. a所示，假設上游為一延時 T ，振幅 $y_u/2$ 之單峯餘弦入流波，下游為固定水深 y_0 ，其邊界條件可寫如，

$$\begin{aligned}
& \text{上游端：} \\
& \left. \begin{aligned} & y(0, t) = y_0 + \frac{y_u}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right], \quad 0 \leq t \leq T \\ & y(0, t) = y_0, \quad T < t < \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24) \\
& \text{下游端：} \\
& y(L, t) = y_0
\end{aligned}$$

上述邊界條件引起之波傳情況，本文中簡稱第一型波。由圖3所示，依線性理論，在邊界處，此波型可寫成如圖3. b及圖3. c兩種分波圖形之相疊加。圖3. b中，上游端為一振幅 $y_u/2$ ，週期 T 之連續性餘弦波，下游為固定水深 y_0 ，其解可依(19)式寫如：

$$y_b = y_0 + G(\ell, \tau; y_u, 0) \dots\dots\dots(25)$$

同理，在圖3. c中，上游端為一振幅 $y_u/2$ ，週期 T ，連續性之負值餘弦波，但比圖3. b之波型函數稽延一週期 T 。此時之水深為負值，僅代表數學處理上之各分波值，並無實質之意義；在圖3. c中，

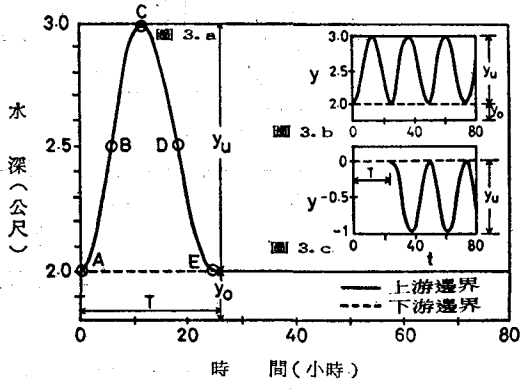


圖3 第一型波之邊界條件

其起始水深 y_0 為零，因此其解亦可依(19)式可寫如：

$$y_e = G(\ell, \tau - 1; -y_u, 0) \dots\dots\dots(26)$$

依照線性理論，第一型波之解可寫成(25)式及(26)式兩組解之疊加：

$$y = y_0 + G(\ell, \tau; y_u, 0) + G(\ell, \tau - 1; -y_u, 0) \dots\dots\dots(27)$$

式中G函數如(20)式所示。

4.2 上、下游為不同振幅之單峯餘弦波（第二型波）

如圖4. a 所示，假設上游端有一延時 T ，振幅 $y_u/2$ 之單峯餘弦波；下游端亦有一單峯餘弦波，其振幅為 $y_d/2$ ，波型較上游波稽延一時間段 t_0 ，其波型可表示為，

上游端：

$$\left. \begin{aligned} y(0, t) &= y_0 + \frac{y_u}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right], & 0 \leq t < T \\ y(0, t) &= y_0, & T \leq t < \infty \end{aligned} \right\}$$

下游端：

$$\left. \begin{aligned} y(L, t) &= y_0, & 0 \leq t < t_0 \\ y(L, t) &= y_0 + \frac{y_d}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi(t-t_0)}{T}\right) \right], & t_0 \leq t < t_r \\ y(L, t) &= y_0, & t_r \leq t < \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

式中 $t_r = t_0 + T$ 。本文稱此邊界條件之波傳情況為第二型波。如圖4 所示，可將圖 4. a 之波型分解成圖 4. b、圖4. c、圖4. d 及圖4. e 等四種分波型之疊加，而此四種分波型均為連續週期性餘弦函數，其解析解可分別由3.1節中(19)式得到。故此型波亦可由圖4. b 至圖 4. e 之四種分波之解析解相疊加而得。

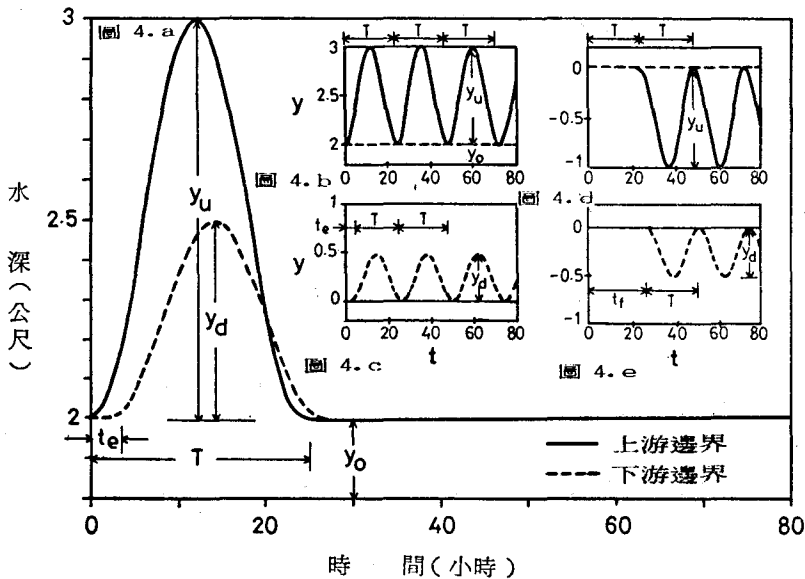


圖4 第二型波之邊界條件

$$y = y_0 + G(\ell, \tau; y_u, 0) + G(\ell, \tau - t_0'; 0, y_d) + G(\ell, \tau - 1; -y_u, 0) + G(\ell, \tau - t_r'; 0, -y_d) \dots\dots\dots(29)$$

式中 $t_o' = t_o/T$; $t_r' = t_r/T$; 函數 G 如(20)式所示。由此可看出，若上、下游端之邊界水深歷線具有時間稽延情況，亦可利用線性疊加方法予以求解。

4.3 上、下游端為不同振幅之三角歷線 (第三型波)

如圖5. a 所示，上、下游端各有一延時為 T 之三角歷線，其最高水深分別為 y_1 及 y_2 ，下游端歷線較上游端歷線稽延了 t_a 時間，其波型如下所示，

上游端

$$y(0, t) = y_0 + b_1 \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t < t_b$$

$$y(0, t) = y_1 - b_2 \frac{(t - t_b)}{T}, \quad t_b \leq t < T$$

$$y(0, t) = y_0, \quad T \leq t < \infty$$

下游端

$$y(L, t) = y_0, \quad 0 \leq t < t_a$$

$$y(L, t) = y_0 + b_3 \frac{(t - t_a)}{T}, \quad t_a \leq t < t_c$$

$$y(L, t) = y_2 - b_4 \frac{(t - t_c)}{T}, \quad t_c \leq t < t_d$$

$$y(L, t) = y_0, \quad t_d \leq t < \infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{上游端} \\ y(0, t) = y_0 + b_1 \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t < t_b \\ y(0, t) = y_1 - b_2 \frac{(t - t_b)}{T}, \quad t_b \leq t < T \\ y(0, t) = y_0, \quad T \leq t < \infty \\ \text{下游端} \\ y(L, t) = y_0, \quad 0 \leq t < t_a \\ y(L, t) = y_0 + b_3 \frac{(t - t_a)}{T}, \quad t_a \leq t < t_c \\ y(L, t) = y_2 - b_4 \frac{(t - t_c)}{T}, \quad t_c \leq t < t_d \\ y(L, t) = y_0, \quad t_d \leq t < \infty \end{array} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

式中 b_1/T , $-b_2/T$, b_3/T , $-b_4/T$ 分別表示，在圖5. a 中水深歷線之斜率， t_a , t_b , t_c 及 t_d 均表示其斜率改變之時刻。

(30)式之邊界條件所引起之波傳情況本文中稱第三型波。如圖5 所示，此波型亦可分解成圖 5. b、圖 5. c 至圖5. g 等六個波型之疊加。圖中所示，圖5. c、圖5. d、圖5. e、圖5. f 及圖5. g 之波型分別在時間 t_a , t_b , t_c , T 及 t_d 才開始加入，若小於此時刻，其水深為零。因圖5. b 至圖 5. g 等六種波型均為直線函數型，其解析解均可應用直線函數型水深之求解方法，如3.2 節之(22)式求得。故本型波之解析解可由圖 5. b 至圖 5. g 等六個直線波型之相疊加而求得，其解可寫如下：

$$y = y_0 + H(\ell, \tau; b_1, 0) + H(\ell, \tau - t_a'; 0, b_3) + H(\ell, \tau - t_b'; -b_2 - b_1, 0) + H(\ell, \tau - t_c'; 0, -b_4 - b_3) + H(\ell, \tau - 1; b_2, 0) + H(\ell, \tau - t_d'; 0, b_4) \dots\dots (31)$$

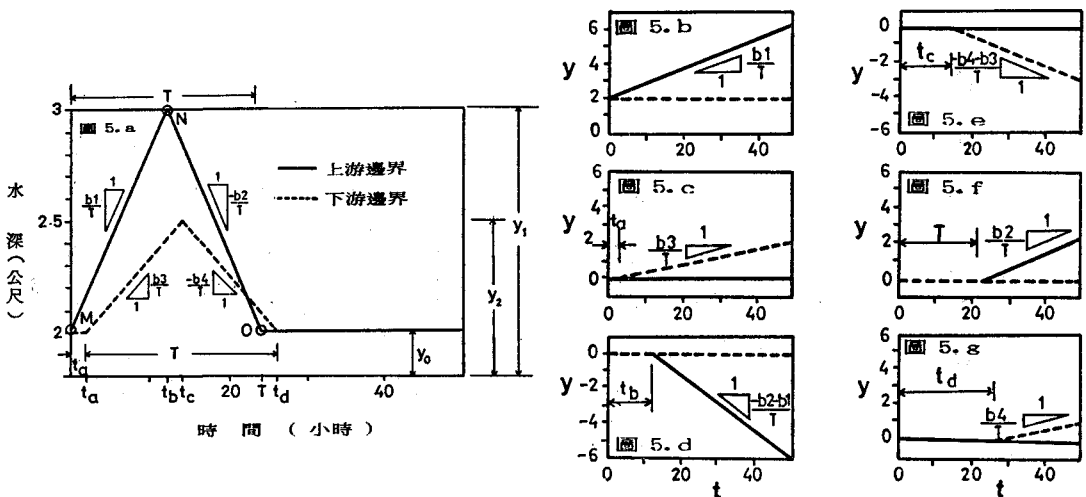


圖 5 第三型波之邊界條件

$$\begin{aligned} \text{式中, } t_a' &= t_a/T; & t_b' &= t_b/T; \\ t_c' &= t_c/T; & t_d' &= t_d/T. \end{aligned}$$

除上述三種組合波型外，其他之邊界條件，如急昇波、梯形波等，亦可應用線性理論寫成直線函數之波型組合，如文獻(14)所述，本文中不再列舉。

五、研究範例

今假想一寬淺之矩形渠道，長度 $L=40$ 公里，寬度為 200 公尺，渠底之坡降為萬分之一，蔡斯係數為 $58\text{m}^{1/2}/\text{sec}$ ，起始水深 $y_0=2$ 公尺，上、下游兩端之邊界條件分別以前章所述之三種波型輸入，以求得其波傳之情況。為了顯示迴水作用之影響，本文中特選擇水理性質差異較大之上、下游邊界條件，以別於一般單純之傳遞波。茲將輸入三種波型之尺度及其解析結果分述如下：

5.1 第一型波

如圖 3. a 所示，上游端有一單峯餘弦波，延時為 24 小時，振幅 $y_u/2=0.5$ 公尺；下游端為固定水深 $y_0=2$ 公尺。將上述數值代入(27)式中，即可求得解析解。計算結果示如圖 6。圖 6 所示為渠道中央點 ($x=20\text{Km}$) 及接近下游端 ($x=36\text{Km}$) 之水深歷線。圖中可看出，在 $x=20\text{Km}$ 處，波峯已呈現衰減現象，最高水深由上游端之 3 公尺減為 2.83 公尺；而在 $x=36\text{Km}$ 處，由於距下游邊界僅 4Km，受下游邊界之影響較大，最高水深僅為 2.33 公尺，與下游邊界值 2.0 公尺較為接近。

5.2 第二型波

如圖 4. a 所示，上、下游端各為不同振幅之單峯餘弦波，分別是 $y_u=1.0$ 公尺， $y_d=0.5$ 公尺，其延時均為 $T=24$ 小時，上游端之稽延時間 $t_0=2$ 小時。再將上述各資料代入(27)式中即可得到解析解。圖 7 為其計算之結果，圖中所示為 $x=20\text{Km}$ 及 $x=36\text{Km}$ 處之水深歷線。

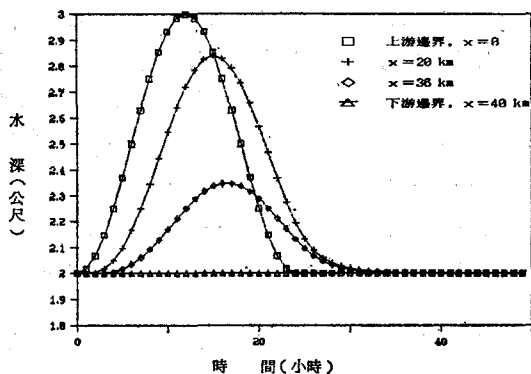


圖 6 第一型波之解析解

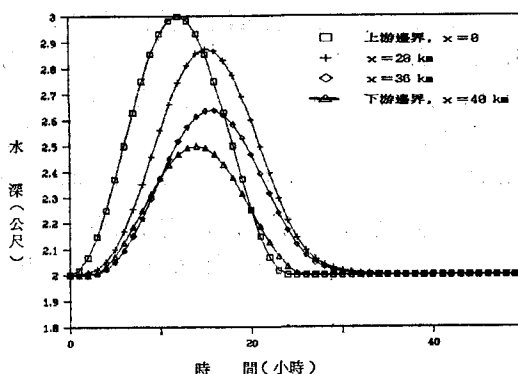


圖 7 第二型波之解析解

5.3 第三型波

如圖 5. a 所示，上、下游端各為不同水深之對稱三角歷線，上游之最高水深為 $y_1=3$ 公尺，下游之最高水深為 $y_2=2.5$ 公尺，其延時 T 均為 24 小時，上、下游歷線之斜率分別為 $b_1=2$ ， $b_2=2$ 以及 $b_3=1$ ， $b_4=1$ 。且下游端之稽延時間為 $t_a=2$ 小時，因此可推算歷線斜率改變之時間 t_b ， t_c 及 t_d 分別是 12 小時、14 小時及 26 小時。若上述各資料之數值已知，代入(27)式中，即可求得解析解。其計算結果如圖 8 所示，圖中所示 $x=20\text{Km}$ 及 $x=36\text{Km}$ 處之水深歷線。圖中亦可看出 $x=36\text{Km}$ 處之水深受下游水位影響較為顯著。

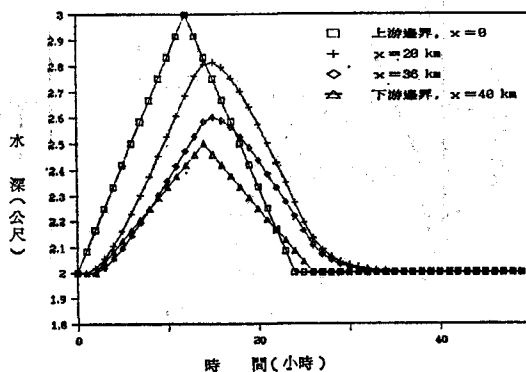


圖 8 第三型波之解析解

六、結果之討論

6.1 解析解與數值解之比較

為了檢視本文解析解之結果，文中再引用有限差分法，配合各型波之邊界條件，求得數值解，以作為比較。其差分型式如下所示：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{y^j{}^{n+1} - y^j{}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{(y^{j+1}{}^{n+1} - y^{j-1}{}^{n+1}) + (y^{j+1}{}^n - y^{j-1}{}^n)}{4\Delta x} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{(y^{j+1}{}^{n+1} - 2y^j{}^{n+1} + y^{j-1}{}^{n+1}) + (y^{j+1}{}^n - 2y^j{}^n + y^{j-1}{}^n)}{2(\Delta x)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

上式中， n 及 j 分別代表時間與空間之註標， Δx 及 Δt 分別表示空間與時間之間距。(32)式中，對空間微分項採用中央差分法，本文稱為隱式中央差分法，將(32)式代入(12)式中，配合邊界條件即可求得數值解。若將(32)式右邊項之差分式以泰勒級數展開，再代入(12)式中，可解得差分法之截尾誤差(truncation error)如下⁽¹⁴⁾：

$$Err = \left[\frac{(\Delta t)^2}{6} + \frac{(\Delta x)^2}{6\omega^2} \right] \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \text{高次項} \dots\dots\dots(33)$$

由(33)式可看出，中央差分法數值解之誤差大小與水深歷線之三次微分值成正比，而與二次微分值無關，因此具有二階精度。對於一單峯餘弦函數而言，如圖3. a所示，兩反曲點(inflexion), B點($t = \frac{T}{4}$)及D點($t = \frac{3T}{4}$)之截尾誤差最大($|\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}| = \frac{4\pi^3 \cdot y_a}{T^3}$)；而頂點C($t = \frac{T}{2}$)之截尾誤差

為零；另A、E兩點為函數轉折點，其導數(derivative)並不連續，因此，依截尾誤差分析知中央差分法數值解在A、B、D、E四點附近，會有較大之誤差出現，而頂點C附近之誤差應為最小。另外，對於單峯之三角歷線而言，如圖5. a所示，在歷線轉折點M、N、O處，因其導數不連續，數值方法可能引起較大之誤差。

圖9為第一型波在 $x = 36\text{K}$ 處，解析解與數值解之比較，圖中可看出二者極為符合，圖中之尺度並無法分辨兩者之偏差。為了進一步比較兩種解之差異，茲將相對誤差定義為：

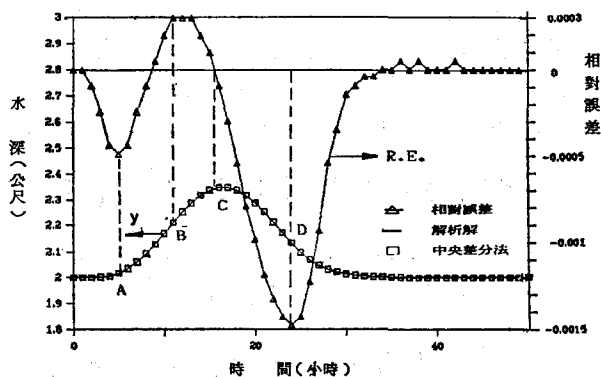


圖9 第一型波解析解與中央差分法數值解之比較

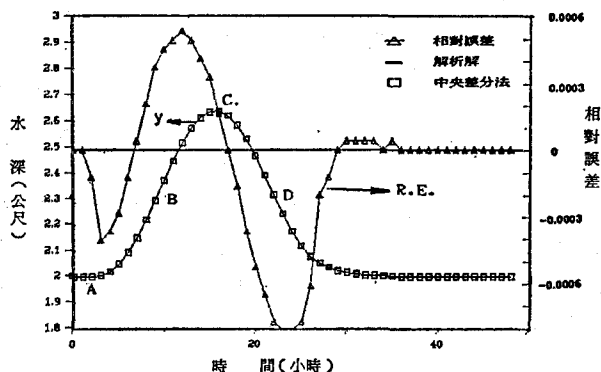


圖10 第二型波解析解與中央差分法數值解之比較

$$R.E = \frac{\text{線性解析解} - \text{中央差分法數值解}}{y_0 + h_0} \dots\dots\dots(34)$$

圖9中亦顯示兩種解相對誤差之大小，其最大相對誤差之級序約為 10^{-3} ，且發生較大相對誤差之位置約在歷線上反曲點B與D附近，以及歷線之轉折點A附近，而在頂點C附近相對誤差接近零，此均與截尾誤差之理論分析結果相一致。由於可推斷此誤差發生之主因，係由數值解之截尾誤差所引起的。

圖10為第二型波在 $x = 36\text{Km}$ 處解析解與數值解之比較，圖中亦顯示兩者極為接近；再由圖中相對誤差之大小可看出，反曲點B、D，以及轉折點A附近之相對誤差較大，而頂點C之誤差最小。圖11為第三型波

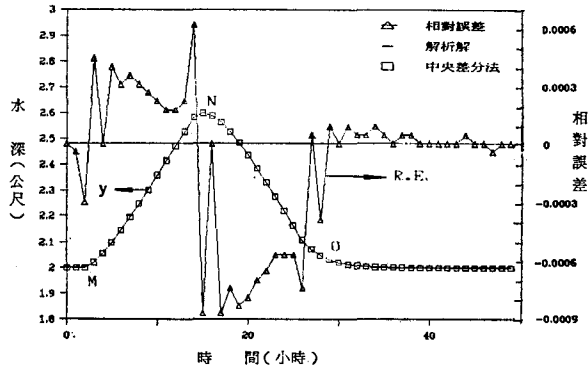


圖11 第三型波解析解與中央差分法數值解之比較

在 $x = 36\text{Km}$ 處解析解與數值解之比較，兩者之解極為接近，由相對誤差大小可看出，在折點M、N、O附近誤差變異最大，其中以折點N之相對誤差最大，此亦與截尾誤差之理論分析結果相一致，故誤差主要係由數值方法之截尾誤差所引起的。由上述誤差分析結果，可間接顯示本文解析解之正確性。

6.2 線性化模式之檢討

本文之解析解主要依據微小擾動波之假設，將控制方程式予以線性化，如(12)式所示，然後再配合邊界條件來求得解析解。但若渠道中邊界之擾動波振幅若予加大，則微小擾動波之假設與事實情況不盡符合，此時(8)式中二階或高階項可能愈趨重要。因本文解析解僅考慮(8)式中一階精度之展開，對於較大振幅之問題，其適用性及精度，在本節中將做進一步之檢討。

為瞭解邊界水深振幅加大後對解析解精度之影響，本文再引用普里斯曼隱式差分法 (Preissmann implicit method)，直接聯立求解(1)、(2)兩式，然後再與線性解析解相比較。普里斯曼差分型式如下：

$$\left. \begin{aligned} f(x, t) &= -\frac{\theta}{2} (f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2\Delta t} \left[(f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n) + (f_j^{n+1} - f_j^n) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

(35)式中 f 代表(1)、(2)兩式中之 y 或 u ； θ 表示前進時間段之權重因子，本文中採用 $\theta = 0.6$ ⁽²⁾。依(35)式直接以數值方法聯立求解(1)、(2)兩式，本文中稱爲零慣性模式，爲一非線性之數值模式。

爲了比較線性解析解與非線性普里斯曼零慣性模式之差異，再定義相對差值 $R.D$ 爲：

$$R.D = \frac{\text{線性解析解} - \text{普里斯曼零慣性模式數值解}}{y_0 + h_0} \dots\dots\dots(36)$$

由上式可看出影響相對差值之因素包括解析解中微小擾動波之假設，以及數值解中差分離散化之誤差。對於線性解析而言，由(8)式可看出，若選用之參考水深 ($y_0 + h_0$) 愈接近於所求之解 y ，則(8)式中高階項之影響愈小，愈能符合線性化之假設，否則若兩者差距愈大，線性解之誤差可能加大；另一方面，關於普里斯曼零慣性模式之離散誤差，由理論分析可發現，其數值方法可滿足一致性及無條件穩定性，本文中選用之權重 $\theta = 0.6$ ，可兼顧減少數值衰減及降低數值延散之效，爲一實用之隱式差分法⁽²⁾。

圖12爲第一型波在 $x = 20\text{Km}$ 處線性解析與零慣性模式結果之比較 [$h_0/(h_0 + y_0) = 0.20$]，圖中可

看出兩者之水深歷線相接近，但由其相對差值線中可看出，線性解析解與零慣性模式計算結果之最大相對差值約為 1.6×10^{-2} ，比6.1節中與中央差分法之相對誤差 1.5×10^{-3} 為大，此因前者之誤差包括線性波假設以及數值誤差，而後者僅有數值誤差所致。由圖12中亦可發現，當水深 y 接近於參考水深 $y_0 + h_0$ 附近時(2.50m)，(圖上水深歷線之A、B點)，其相對差值較小，此與前述線性分析結果相一致。

圖13為不同振幅參數 $h_0/(h_0 + y_0)$ 與相對差值之關係，在第一型波中， $h_0 = y_a/2$ 為入流波之振幅，當 $h_0/(h_0 + y_0)$ 愈大，即表示振幅愈大；當 $h_0/(h_0 + y_0)$ 趨近於1，表示振幅為無窮大。圖13中顯示，當 $h_0/(h_0 + y_0) = 0.2$ 時，其最大之相對差值約為 2×10^{-2} ；當 $h_0/(h_0 + y_0) = 0.43$ 時，其最大之相對差值為 7×10^{-2} ；當 $h_0/(h_0 + y_0) = 0.56$ 時，其最大之相對差值為0.15，圖中顯示若增加邊界條件之歷線振幅，將使相對差值加大，此主要由於此時微小擾動波之假設與實際情況不盡相符所致。若將最大相對差值與邊界之歷線振幅參數之關係繪如圖14，圖中可看出，相對差值隨振幅之增加而加大，而在 $x = 36 \text{ Km}$ 處，因已接近下游邊界處($L = 40 \text{ Km}$)，受下游邊界之影響較大，故相對差值較 $x = 20 \text{ Km}$ 處者大。因此利用圖14可估算在不同振幅之入流歷線下，線性解析解因線性假設可能導致之誤差。

圖15及圖16分別為第二型波以及第三型波線性解析解與普里斯曼零慣性模式之比較。圖中亦可看出，在 $x = 20 \text{ Km}$ 處之結果較為接近，尤其是水深 y 在 $y_0 + h_0$ 附近(2.50 m)，線性解析解與零慣性模式之結果最為接近。而當 $x = 36 \text{ Km}$ 處，由於受下游迴水影響，兩者之差值較 $x = 20 \text{ Km}$ 處為大。

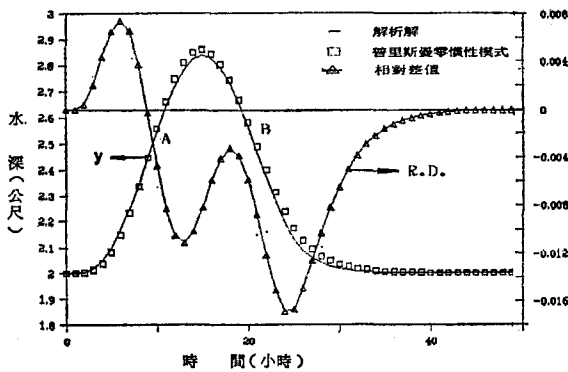


圖12 第一型波解析解與普里斯曼零慣性波模式結果之比較

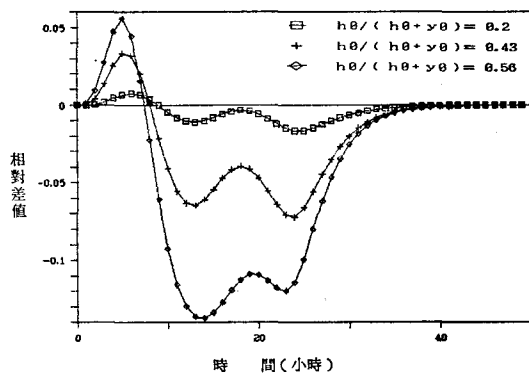


圖13 不同振幅參數之相對差值比較 (K = 20km)

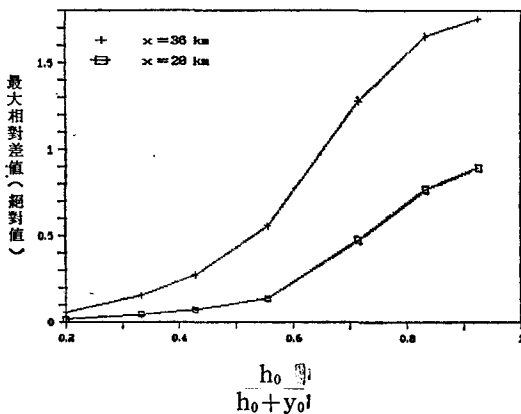


圖14 振幅大小與最大相對差值之關係

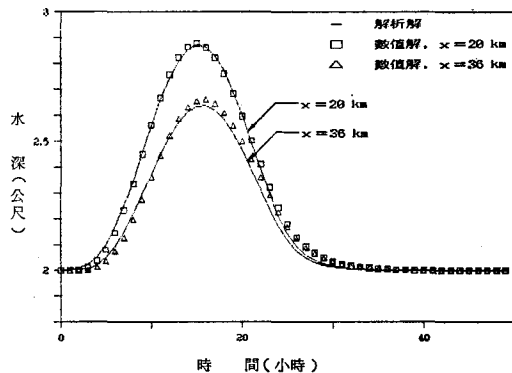


圖15 第二型波解析解與普里斯曼零慣性模式結果之比較

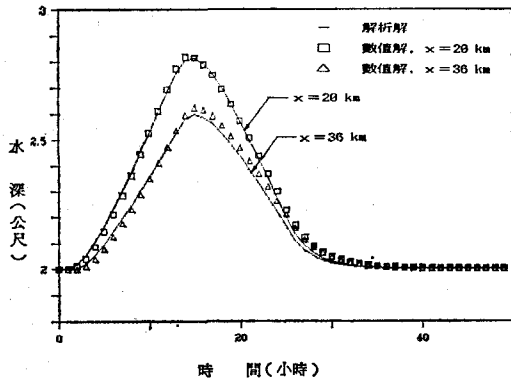


圖16 第三型波解析解與普里斯曼零慣性模式結果之比較

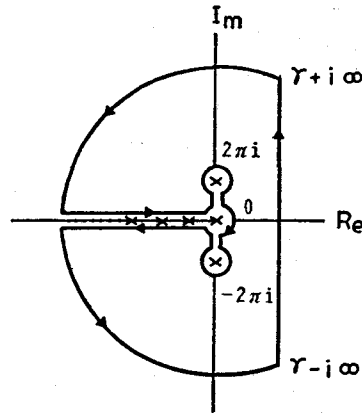


圖17 拉普拉斯逆轉換積分路線

七、結 論

1. 本文依據渠道中微小擾動波理論，以線性化之零慣性模式為基礎，利用拉普拉斯轉換以及線性疊加方法求解渠道中有迴水影響下之水流傳播情況。
2. 由本文之線性解析解與隱式中央差分法數值解之比較分析可知，二種解甚為接近；再由相對誤差分析可看出，其誤差原因主要係由於中央差分法離散化過程中之截尾誤差造成的，顯示本文中解析解求解過程之正確性。
3. 基於微小擾動波之假設，本解析解僅能適用於振幅較小之波動傳遞。由線性解析解與非線性普里斯曼零慣性模式數值解之比較分析，亦發現若邊界端之振幅波加大，則兩種解之差值亦加大；反之，若振幅小，兩者之差值亦小，此亦與微小擾動波之理論較為接近。

八、致 謝

本文研究期間蒙臺大農工所主任王如意教授之鼓勵與協助，另臺大農工所研究生何勝文協助電子計算機之操作及繪圖工作，使本文能順利完成，謹此致謝。

九、參 考 文 獻

1. Akan, A.O. and B.C. Yen, "A Nonlinear Diffusion-Wave Model for Unsteady Open-Channel Flow.", Proceedings of the 17th Congress, Baden-Baden, Germany, Vol. 12, Aug. 1977.
2. Cunge J.A., *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman Publishing Limited, 1980.
3. Carslaw J., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Oxford University Press., 1959, pp. 297-326.
4. Dooge, J.C.I. and B.M. Harley, "Linear Routing in Uniform Open Channels.", International Hydrology Symposium, Fort Collins, Sept., 1967.
5. Dooge, J.C.I., *Linear Theory of Hydrologic Systems*, U.S. Dept. of Agriculture, Tech. Bulletin No. 1468, Oct. 1973.
6. Hayami, S., "On the Propagation of Flood Wave." Kyoto University Disaster Prevention Research Institute, Bulletin No. 1, Kyoto, Japan, 1951.
7. Henderson, F.M., *Open Channel Flow*, Macmillan Publishing Co., 1966.

8. Keefer, T.M. and R.S. McQuivey. "Multiple Linearization Flow Routing Model," J. of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 100, No. HY7, July, 1974. pp. 1031-1046.
9. Ponce, V.M., R.M. Li nad D.B. Simons, "Applicability of Kinematic and Diffusion Model", J. of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 104, No. HY3, March, 1978, pp. 353-360.
10. Tingsanchali T. and S.K. Manandhar, "Analytical Diffusion Model for Flood Routing." J. of Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 111 No. 3, March, 1985, pp. 435-454.
11. Weinberger, H.F., *Partial Difference Equation and Transform Methods*, Blaisdell Publishing Company, 1965.
12. 王士紘、顏本綺，「渠道變量流線性解析法之研究」，臺灣水利季刊第三十五卷第一期，76年3月。
13. 王士紘、吳豐帥，「有迴水影響時渠道變量流線性解析法之研究」，第四屆水利工程研討會論文集，國立中興大學，77年5月。
14. 許銘熙、何勝文，「渠道中淺水波之線性解析」，中國農業工程學報第卅四卷第四期，民國77年12月。
15. 許銘熙、謝弘哲，「三次雲形配置法在對流——擴散問題之應用」，臺灣水利季刊第三十四卷第三期，民國75年10月。
16. 顏清連、許銘熙、段鏞，「淡水河系洪水演算模式(二)重疏洪道完成後淡水河系洪水演算模式」，行政院國科會防災科技研究報告，民國73年10月。

十、附 錄

附錄(一) (18)式之拉普斯逆轉換附錄

利用馬林逆轉換定理，計算(18)式之拉普斯逆轉換，以求得 y^* ：

$$y^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s\ell} U(\lambda, \ell) d\lambda \dots\dots\dots (A-1)$$

式中， $U(\lambda, \ell)$ 如(18)式所示，將(18)式代入 (A-1) 中，可計算 y^* 值如下：

$$y^* = P + Q \dots\dots\dots (A-2)$$

式中，

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi i} \cdot e^{\frac{V\ell}{2D}} \cdot y_a^* \cdot 2\pi^2 \cdot \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s\ell} \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda^2+4\pi^2)} \cdot \frac{\sinh[(1-\ell)\cdot b']}{\sinh(b')} d\lambda \\ Q &= \frac{1}{2\pi i} \cdot e^{\frac{V(\ell-1)}{2D}} \cdot y_a^* \cdot 2\pi^2 \cdot \int_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty} e^{s\ell} \cdot \frac{1}{\lambda(\lambda^2+4\pi^2)} \cdot \frac{\sinh(\ell\cdot b')}{\sinh(b')} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots (A-3)$$

其中，

$$b' = \frac{\sqrt{V^2+4D\lambda}}{2D}$$

式中， λ 為虛擬變數 (Dummy Variable)， γ 是一個足夠大的實數，使得所有極點均落在 $(\gamma+i\infty, \gamma-i\infty)$ 這條 γ 線之左邊，如圖17所示。

再由殘值定理， P 、 Q 可表示如下式：

$$P = \frac{1}{2\pi i} \cdot e^{\frac{V\ell}{2D}} \cdot y_a^* \cdot 2\pi^2 \cdot 2\pi i \cdot (\sum \text{Res}) \dots\dots\dots (A-4)$$

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \cdot e^{\frac{V(\ell-1)}{2D}} \cdot y_a^* \cdot 2\pi^2 \cdot 2\pi i \cdot (\sum \text{Res}) \dots\dots\dots (A-5)$$

Res 表示 (A-3)式積分式之殘值，其中極點則包括以下①、②、③三部份，如圖17所示：

$$\textcircled{1} \lambda = 0$$

$$\textcircled{2} \lambda = -Dn^2\pi^2 - V^2/4D, \quad n=1, 2, \dots, \infty$$

$$\textcircled{3} \lambda = \pm 2\pi i$$

其中P之三部份殘值爲：

$$\textcircled{1} \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{\sinh[(1-\ell) \cdot |V|/2D]}{4\pi^2 \sinh(|V|/2D)} \dots \dots \dots (\text{A-6})$$

$$\textcircled{2} \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow -Dn^2\pi^2 - V^2/4D} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2Dn\pi \sin[(1-\ell)n\pi]}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) \cdot [(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2 + 4\pi^2]} \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)\tau} \dots \dots \dots (\text{A-7})$$

$$\textcircled{3} \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow \pm 2\pi i} = \frac{(EH_V + FK_V)\cos(2\pi\tau) - (EK_V - FH_V)\sin(2\pi\tau)}{-4\pi^2(E^2 + F^2)} \dots \dots \dots (\text{A-8})$$

$$\text{式中, } A = \frac{4\sqrt{2}\pi \cdot D}{\sqrt{-V^2 + \sqrt{V^4 + 64\pi^2 D^2}}};$$

$$B = \frac{\sqrt{-V^2 + \sqrt{V^4 + 64\pi^2 D^2}}}{\sqrt{2}};$$

$$H_V = \cos\left(\frac{1-\ell}{2D}\right) \cdot \left[e^{\frac{1-\ell}{2D}A} - e^{-\frac{1-\ell}{2D}A} \right];$$

$$K_V = \sin\left(\frac{1-\ell}{2D}B\right) \cdot \left[e^{\frac{1-\ell}{2D}A} + e^{-\frac{1-\ell}{2D}A} \right];$$

$$E = \cos\left(\frac{B}{2D}\right) \cdot \left(e^{\frac{A}{2D}} - e^{-\frac{A}{2D}} \right);$$

$$F = \sin\left(\frac{B}{2D}\right) \cdot \left(e^{\frac{A}{2D}} + e^{-\frac{A}{2D}} \right)。$$

另外，Q之三部份殘值包括：

$$\textcircled{1} \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{\sinh(\ell \cdot |V|/2D)}{4\pi^2 \sinh(|V|/2D)} \dots \dots \dots (\text{A-9})$$

$$\textcircled{2} \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow -Dn^2\pi^2 - V^2/4D} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2Dn\pi \cdot \sin(\ell n\pi)}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) [(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2 + 4\pi^2]} \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)\tau} \dots \dots \dots (\text{A-10})$$

$$\textcircled{3} \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow \pm 2\pi i} = \frac{(EH_D + FK_D)\cos(2\pi\tau) - (EK_D - FH_D)\sin(2\pi\tau)}{-4\pi^2(E^2 + F^2)} \dots \dots \dots (\text{A-11})$$

$$\text{式中, } H_D = \cos\left(\frac{B\ell}{2D}\right) \cdot \left(e^{\frac{\ell A}{2D}} - e^{-\frac{\ell A}{2D}} \right);$$

$$K_D = \sin\left(\frac{B\ell}{2D}\right) \cdot \left(e^{\frac{\ell A}{2D}} + e^{-\frac{\ell A}{2D}} \right)。$$

將 (A-6) 至 (A-11) 代入 (A-4) 及 (A-5) 中即可得到：

$$y^* = 2\pi^2 y_u^* \cdot e^{\frac{V\ell}{2D}} \cdot M + 2\pi^2 y_d^* \cdot e^{\frac{V(\ell-1)}{2D}} \cdot N \dots \dots \dots (A-12)$$

式中，

$$M = \frac{\sinh[(1-\ell) \cdot |V|/2D]}{4\pi^2 \sinh(|V|/2D)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2Dn\pi \sin [(1-\ell)n\pi]}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) \cdot [(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2 + 4\pi^2]} \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)\tau} - \frac{(EH_u + FK_u) \cos(2\pi\tau) - (EK_u - FH_u) \sin(2\pi\tau)}{4\pi^2(E^2 + F^2)} ;$$

$$N = \frac{\sinh(\ell \cdot |V|/2D)}{4\pi^2 \sinh(|V|/2D)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2Dn\pi \cdot \sin(\ell n\pi)}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D) \cdot [(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2 + 4\pi^2]} \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)\tau} - \frac{(EH_d + FK_d) \cos(2\pi\tau) - (EK_d - FH_d) \sin(2\pi\tau)}{4\pi^2(E^2 + F^2)} .$$

若將無因次之水深 y^* 轉為因次化之水深 y ，則 (A-12) 可改寫成：

$$y = y_0 + G(\ell, \tau; y_u, y_d) \dots \dots \dots (A-13)$$

$G(\ell, \tau; y_u, y_d)$ 如(20)式之定義。

(二)直線函數型邊界條件之線性解析

將(12)式及(21)式予以無因次化。即令：

$$y^* = (y - y_0)/(y_0 + h_0) ;$$

$$\ell = x/L ;$$

$$\tau = t/T ;$$

$$V = \omega \cdot T/L ;$$

$$D = \mu \cdot T/L^2 ;$$

$$b_1^* = b_1/(y_0 + h_0) ;$$

$$b_2^* = b_2/(y_0 + h_0) .$$

則(12)式及(21)式可寫成如下：

$$\frac{\partial y^*}{\partial \tau} + V \frac{\partial y^*}{\partial \ell} = D \frac{\partial^2 y^*}{\partial \ell^2} \dots \dots \dots (A-14)$$

其上、下游邊界分別寫成：

$$\left. \begin{aligned} y^*(0, \tau) &= b_1^* \tau \\ y^*(1, \tau) &= b_2^* \tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A-15)$$

將 (A-14) 及 (A-15) 對時間取拉普拉斯轉換可得到：

$$SU + VU' = DU'' \dots \dots \dots (A-16)$$

式中 $U = L[y^*] = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} y^* d\tau$ ， U' 及 U'' 分別表示 U 對 x 之一次及二次微分。同理，邊界條件亦取拉普拉斯轉換，可寫成：

$$\left. \begin{aligned} U(0) &= \frac{b_1^*}{S^2} \\ U(1) &= \frac{b_2^*}{S^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A-17)$$

(A-16)式為一個二階常微分方程式，可利用(A-17)式之兩個邊界條件解得：

$$U = \frac{b_1^*}{S^2} e^{\frac{V\ell}{2D}} \cdot \frac{\sinh[(1-\ell) \cdot b]}{\sinh(b)} + \frac{b_2^*}{S^2} e^{-\frac{V(\ell-1)}{2D}} \cdot \frac{\sinh(\ell \cdot b)}{\sinh(b)} \dots \dots \dots (A-18)$$

式中， $b = \frac{\sqrt{V^2 + 4DS}}{2D}$

如同附錄(-)，利用拉普拉斯反轉換定理及殘值定理可解得 y^* 如下式：

$$y^* = b_1^* e^{\frac{V\ell}{2D}} \cdot O + b_2^* e^{-\frac{V(\ell-1)}{2D}} \cdot R \dots \dots \dots (A-19)$$

式中， $O = \tau \cdot \frac{\sinh[(1-\ell) \cdot |V|/2D]}{\sinh(|V|/2D)} + \frac{1-\ell}{|V|} \cdot \frac{\cosh[(1-\ell) \cdot |V|/2D]}{\sinh(|V|/2D)}$
 $-\frac{1}{|V|} \cdot \frac{\sinh[(1-\ell) \cdot |V|/2D] \cdot \cosh(|V|/2D)}{[\sinh(|V|/2D)]^2}$
 $+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2Dn\pi \cdot \sin[n\pi(1-\ell)]}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2} \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)\tau}$
 $R = \tau \cdot \frac{\sinh(\ell \cdot |V|/2D)}{\sinh(|V|/2D)} + \frac{\ell}{|V|} \cdot \frac{\cosh(\ell \cdot |V|/2D)}{\sinh(|V|/2D)}$
 $-\frac{1}{|V|} \cdot \frac{\sinh(\ell \cdot |V|/2D) \cdot \cosh(|V|/2D)}{[\sinh(|V|/2D)]^2}$
 $+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2Dn\pi \cdot \sin(n\pi\ell)}{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)^2} \cdot e^{(-Dn^2\pi^2 - V^2/4D)\tau}$

若將無因次之水深 y^* 轉為因次化之水深 y ，將(A-19)式可改寫成：

$$y = y_0 + H(\ell, \tau; b_1, b_2) \dots \dots \dots (A-20)$$

$H(\ell, \tau; b_1, b_2)$ 如(23)式之定義。

附錄(三) 符 號 說 明

- | | |
|------------------------------|-------------------------|
| b = 參數，詳見(18)式； | h_0 = 平均水深之參數，詳見(6)式； |
| b' = 參數，詳見(A-3)式； | K = 流況參數，詳見(4)式； |
| b_1 = 斜率之參數，詳見(30)式； | K_U = 參數，詳見(A-8)式； |
| b_2 = 斜率之參數，詳見(30)式； | K_D = 參數，詳見(A-11)式； |
| b_3 = 斜率之參數，詳見(30)式； | L = 渠道長度； |
| b_4 = 斜率之參數，詳見(30)式； | ℓ = 無因次之水流方向距離座標； |
| c = 蔡斯係數； | $R.D$ = 相對差值，詳見(36)式； |
| D = 無因次之延散係數； | $R.E$ = 相對誤差，詳見(34)式； |
| f = y 、 u 等變數，詳見(35)式； | S_0 = 渠底底床坡度； |
| G = 解析解之函數，詳見(20)式； | S_r = 摩擦坡度； |
| H = 解析解之函數，詳見(23)式； | T = 歷線之延時； |
| H_u = 上游水深對參考水深之差異量； | t = 時間座標； |
| H_d = 下游水深對參考水深之差異量； | t_a = 時間之參數，詳見(30)式； |
| H_U = 參數，詳見(A-8)式； | t_b = 時間之參數，詳見(30)式； |
| H_D = 參數，詳見(A-11)式； | t_c = 時間之參數，詳見(30)式； |

t_d = 時間之參數，詳見(8)式；
 t_o = 時間之參數，詳見(28)式；
 t_r = 時間之參數，詳見(28)式；
 u = x 方向之平均流速；
 V = 無因次之波速；
 x = 沿水流方向之距離座標；
 y = 水深；
 y_o = 起始水深；
 y_u ; 上游邊界水深振幅之半；

y_d = 下游邊界水深振幅之半；
 y^* = 無因次之水深；
 y_u^* = 無因次化之上游振幅參數；
 y_d^* = 無因次化之下游振幅參數；
 ϕ_1 = 對平均水深之差異量，詳見(9)式；
 ω = 波速，詳見(11)式；
 μ = 延散係數，詳見(11)式；
 θ = 普里斯曼之權重因子；
 τ = 無因次之時間座標。

專營土木、水利、建築等工程

台鼎營造有限公司

地址：苗栗縣頭份鎮上興里13鄰5-1號
電話：(036)821246

專營土木、水利、建築等工程

建斌營造有限公司

地址：彰化縣福興鄉三和村南興街24號

專營土木、水利、建築等工程

源大營造有限公司

地址：彰化縣二水鄉偕和村員集路34號
電話：(048)793939

專營土木、水利、建築等工程

全興工程有限公司

地址：彰化縣二水鄉光化村文化路98號
電話：(048)793223 • 793939