

渠道中淺水波之線性解析

Linear Approximation of Shallow Water

Wave Propagation in Open Channels

國立臺灣大學農業工程學研究所副教授

國立臺灣大學農業工程學研究所研究生

許 銘 熙

何 勝 文

Ming-hsi Hsu

Sheng-wen Ho

摘 要

若忽略運動方程式中之加速度項，以及考慮微小擾動波情況，可利用線性零慣性模式來描述渠道中水流之流況。本文即以線性零慣性模式為基礎，再應用拉普拉斯轉換、拉普拉斯逆轉換定理與複變函數積分之殘值定理等數學方法，求解渠道中微小擾動波之傳播。文中分別選用單獨餘弦波、三角形波、梯形波以及單一急升波等四種水位歷線作為上游端之邊界條件，以解析渠道中之流況。文中並與中央隱式差分法之數值解做比較。除外，並利用普里斯曼非線性之零慣性模式，以比較及探討本文中線性化模式之精度及適用性。

ABSTRACT

The analytical solution of the zero-inertia model based on the assumptions of neglecting the acceleration terms in the momentum equation and considering the small disturbance wave at boundary was deduced. In this study, Laplace transformation, Laplace inverse theorem, and complex integration by the method of residues were applied for solving the model. Four types of inflow stage hydrographs were respectively imposed at upstream end in order to analyse the wave propagation in downstream channel. They are single sinusoidal wave, triangular wave, trapezoid wave, and rapidly monoclinal rising wave. Implicit central difference method of finite difference scheme was simulated for comparison. Besides, Pressimann implicit scheme for nonlinear zero-inertia wave model was applied to investigate the accuracy and availability for the analytical solution of the linearized model.

一、前 言

渠道中緩變量流之流況可利用一維性之聖凡納 (Saint Venant) 方程式來描述，即一般所謂之動力波模式。很多研究曾指出，在自然河川之洪水演算問題中，慣性項之影響通常很小^(1,2,10)，為了簡化計算

步驟及節省計算時間，可將慣性項予以忽略，即是零慣性模式，此模式亦可準確分析渠道中水流之運動(3)。

對於零慣性模式之研究，Deymie 和 Masse 在寬淺渠道中，利用微小擾動法之觀念將零慣性模式推導成線性化型式之方程式(4)。Hayami 在 1951 年再化簡成對流擴散型式之方程式，解得積分形式的解析解(5)。Keefe 和 McQuivey 將入流歷線分割成很多直條狀的歷線，利用摺合積分方法配合 Hayami 之解析解從事洪水演算(6)。Tingsanchali 和 Manandhar 依前述演算方法應用於泰國東北部湄公河流域，得到很好的模擬結果(7)。在國內王士紘教授亦曾從事渠道及管流中線性波解析之研究，得到一序列積分型式之解析解(11,12)。

本文中依據零慣性模式，輸入適當的邊界條件和起始條件，得到級數型的完全解析解。文中並與隱式中央差分法所得的數值解做一比較，以檢視解析解之正確性。最後再與普里斯曼差分法解得零慣性模式之數值解比較，以探討線性化假設之合理性。

二、零慣性模式與微小擾動波理論

2.1 零慣性模式

在寬淺矩形渠道中，若忽略慣性項之影響(1,2,10)，且無側流流入，則一維性之緩變量流單位渠寬之連續方程式及運動方程式可表示為：

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = S_0 - S_f \dots\dots\dots(2)$$

式中，t：時間座標；

x：沿水流方向的距離座標；

v：x 方向之平均流速；

y：水深；

S₀：渠底坡度；

S_f：摩擦坡度，若以蔡斯 (Chezy) 公式表示，則

$$S_f = \frac{v^2}{C^2 y} ; \dots\dots\dots(3)$$

以及，C：蔡斯係數。

(1)、(2)兩式包括兩個應變數：水深 (y) 及平均流速 (v)，為一非線性之偏微分方程式，尚無法求得解析解。但若給予適當之邊界及起始條件，可利用數值方法求解其數值解，如普里斯曼線性隱式法為常用以求解此問題之數值模式。

2.2 微小擾動波理論

將(1)式代入(2)式，可推導成對流擴散型式之方程式(5)：

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{3}{2} v \frac{\partial y}{\partial x} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{式中， } K = \frac{y v}{2 (S_0 - \frac{\partial y}{\partial x})} \dots\dots\dots(5)$$

假設渠道中原來為均一水深 y₀，即 y(x, 0) = y₀，上游邊界處有一微小擾動波

$$y(0, t) = y_0 + h_0 + F(t) \dots\dots\dots(6)$$

式中，y₀ + h₀ 是入流波之平均水深 (對入流延時之平均)，F(t) 是對平均水深的變化量，則：

$$\int_0^T F(t)dt = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

(7)式中，T是上游入流波之延時。若渠道很長，長度為L，下游端可視為均勻流況，即

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{y(L,t)} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

因(4)式為一非線性方程式，其解析解可用一個級數來表示⁽⁵⁾：

$$y(x,t) = (y_0 + h_0) \left\{ 1 + \frac{\phi_1}{(y_0 + h_0)} + \frac{\phi_2}{(y_0 + h_0)^2} + \dots \right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

因y為一微小擾動波，今僅取(9)式中之前兩項為其近似解，即：

$$y = y_0 + h_0 + \phi_1, \quad (\text{其中}, \phi_1 \ll y_0 + y_0) \quad \dots\dots\dots(10)$$

由(4)式中可得

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \omega \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(11)$$

式中， $\omega = \frac{3}{2} C \sqrt{(y_0 + h_0) \cdot S_0} \quad \dots\dots\dots(12)$

$$\mu = \frac{\omega(y_0 + h_0)}{3 S_0} \quad \dots\dots\dots(13)$$

將(10)式代入(11)式，可得：

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \omega \frac{\partial y}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(14)$$

(14)式為一對流與擴散型式之方程式，係一線性方程式，利用(6)、(8)之邊界條件，Hayami曾得到以下的解析解⁽⁵⁾：

$$y = h_0 + e^{\frac{\omega x}{2\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \left(\frac{\omega^2}{2\mu} \right)^2 + \xi_n^2 \right\} \mu \sin(\xi_n x) \cdot \int_0^t \left\{ F(\lambda) + h_0 \right\} \cdot \exp \left\{ - \left[\xi_n^2 + \left(\frac{\omega}{2\mu} \right)^2 \right] \mu (t - \lambda) \right\} d\lambda \quad \dots\dots\dots(15)$$

式中， $A_n = \frac{2\xi_n}{x \cdot \left\{ \left(\frac{\omega}{2\mu} \right)^2 + \xi_n^2 \right\} + \frac{\omega}{2\mu}} \quad \dots\dots\dots(16)$

ξ_n 是(17)式的根，即

$$\tan(\xi_n x) = - \frac{2\mu\xi_n}{\omega} \quad \dots\dots\dots(17)$$

過去很多研究均依據(15)式之解析解再利用數值方法的積分得到各種入流波 F(t) 之解^(6,7)，本文則在上游傳入幾種常見之入流波形，再利用殘值定理 (Residual Method) 予以積分，得到完整型式之解析解。

三、幾種常用入流歷線之解析

3.1 基本型入流歷線之解析：

(14)式為一線性方程式，疊加原理可應用於此方程式求解問題之分析。換言之，若將一般常用入流歷線

寫成幾種基本型入流波之組合，則這些常用入流壓線之解亦可利用疊加原理寫成上述幾種基本入流波形解之組合。本文上游之入流壓線採用餘弦函數和直線函數兩個基本型，其解析解如下所述：

(1) 餘弦函數：

如圖 1 (b)，上游入流波為週期 T，振幅 $Y_w/2$ 之餘弦波，則其方程式可表示成

$$y(0, t) = y_0 + \frac{Y_w}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right] \dots\dots\dots (18)$$

配合 (8)、(18) 之邊界條件，可得到其解析解如下：

$$Y(\ell, \tau) = 2\pi^2 \cdot Y_w \cdot e^{-\frac{V}{2D}\ell} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{V \cdot \sinh[(1-\ell) \cdot |V|/2D] + |V| \cdot \cosh[(1-\ell) \cdot |V|/2D]}{4\pi^2 \cdot [V \cdot \sinh(|V|/2D) + |V| \cosh(|V|/2D)]} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2D\alpha_n \cdot \{V \cdot \sin[(1-\ell)\alpha_n] + 2D\alpha_n \cos[(1-\ell)\alpha_n]\} \cdot \text{Exp}[-(D\alpha_n^2 - V^2/4D) \cdot \tau]}{[(-D\alpha_n^2 - V^2/4D)^2 + 4\pi^2 \cdot (-D\alpha_n^2 - V/4D)] \cdot (V + 2D + \frac{4D^2\alpha_n^2}{V}) \cos \alpha_n} \\ \frac{(EH - FG) \cos(2\pi\tau) + (EG + FH) \sin(2\pi\tau)}{2\pi^2(E^2 + F^2)} \end{array} \right\} \dots\dots (19)$$

上式中

$$Y = y - y_0;$$

$$\ell = x/L;$$

$$V = \omega \cdot T/L;$$

$$D = \mu \cdot T/L^2;$$

$$\tau = t/T;$$

$$E = 2V \cos\left(\frac{B}{2D}\right) \cdot \sinh\left(\frac{A}{2D}\right) + 2A \cos\left(\frac{B}{2D}\right) \cosh\left(\frac{A}{2D}\right) - 2B \sin\left(\frac{B}{2D}\right) \sinh\left(\frac{A}{2D}\right);$$

$$F = 2V \sin\left(\frac{B}{2D}\right) \cosh\left(\frac{A}{2D}\right) + 2B \cos\left(\frac{B}{2D}\right) \cosh\left(\frac{A}{2D}\right) + 2A \sin\left(\frac{B}{2D}\right) \sinh\left(\frac{A}{2D}\right);$$

$$G = -\sin\left(\frac{1-\ell}{2D} B\right) \cdot [V \cosh\left(\frac{1-\ell}{2D} A\right) + A \sinh\left(\frac{1-\ell}{2D} A\right)] - B \cos\left(\frac{1-\ell}{2D} B\right) \cosh\left(\frac{1-\ell}{2D} A\right);$$

$$H = \cos\left(\frac{1-\ell}{2D} B\right) \cdot [V \sinh\left(\frac{1-\ell}{2D} A\right) + A \cosh\left(\frac{1-\ell}{2D} A\right)] - B \sin\left(\frac{1-\ell}{2D} B\right) \cdot \sinh\left(\frac{1-\ell}{2D} A\right);$$

$$A = \frac{4\sqrt{2}\pi D}{\sqrt{-V^2 + \sqrt{V^4 + 64\pi^2 D^2}}};$$

$$B = \frac{\sqrt{-V^2 + \sqrt{V^4 + 64\pi^2 D^2}}}{\sqrt{2}};$$

α_n 為 $\alpha_n \cot \alpha_n + V/2D = 0$ 之正實數根。

求解過程中係將(14)式及其邊界條件(8)和(18)式無因次化，並取拉普拉斯轉換 (Laplace Transformation)，再利用拉普拉斯反轉換定理及殘值定理得(19)式之解。詳細推導過程參閱附錄(-)。

(2) 直線函數：

如圖 2、3、4 分別為常見之三角形入流波，梯形入流波與急升入流波型，入流波之延時均為 T。上述這些入流波形均可寫成直線函數波形之線性組合，如圖 2、3、4 所示。此基本直線型之入流波可以如下型式表示之：

$$y(0, t) = y_0 + b \frac{t}{T} \dots\dots\dots (20)$$

式中 $\frac{b}{T}$ 為直線的斜率。配合(8)、(20)之條件，可得到解析解如下：

$$Y(\ell, \tau) = b \cdot e^{\frac{V}{2D} \ell} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \tau \cdot \frac{V \cdot \sinh[|V| \cdot (1-\ell)/2D] + |V| \cosh[|V| \cdot (1-\ell)/2D]}{V \cdot \sinh[|V|/2D] + |V| \cosh[|V|/2D]} \\ & - \frac{\{V \cdot \sinh[|V| \cdot (1-\ell)/2D] + |V| \cosh[|V| \cdot (1-\ell)/2D]\} \cdot \{V \cdot \sinh[|V|/2D] + |V| \cosh[|V|/2D]\}}{\{V \cdot \sinh[|V|/2D] + |V| \cosh[|V|/2D]\} \cdot \{V \cdot \sinh[|V|/2D] + |V| \cosh[|V|/2D]\}} \\ & + \frac{\{ \frac{V+2D}{|V|} \cosh[|V|/2D] + \sinh[|V|/2D] \}}{[|V|/2D]^2} \\ & + \frac{V(1-\ell) + 2D}{|V|} \frac{\cosh[|V| \cdot (1-\ell)/2D] + (1-\ell) \sinh[|V| \cdot (1-\ell)/2D]}{V \cdot \sinh[|V|/2D] + |V| \cosh[|V|/2D]} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2D\alpha_n \cdot \{V \cdot \sin[(1-\ell)\alpha_n] + 2D\alpha_n \cos[(1-\ell)\alpha_n]\} \cdot \text{Exp}[-(D\alpha_n^2 + V^2/4D)t]}{(-D\alpha_n^2 + V^2/4D)^2 \cdot \{(V+2D) \cdot \cos\alpha_n + D\alpha_n^2 - V^2/4D\}} \\ & \cdot \frac{2D\alpha_n \sin\alpha_n}{2D\alpha_n \sin\alpha_n} \end{aligned} \right\} \quad \dots(21)$$

(21)式之詳細推導過程參閱附錄(一)。

3.2 幾種單峯入流波之解析解

利用前節解出之基本型，依線性疊加法可組合出下述四種常見單峯之入流波，而其解即可由基本型之解相疊加得到。

(1)單峯餘弦波形的水位歷線：

如圖1. a 所示，為一單峯之餘弦入流波形，若延時為 T ，最高水深為 $y_0 + Y_w$ ，其波形可寫成如則下型式：

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= y_0 + \frac{Y_w}{2} (1 - \cos \frac{2\pi t}{T}), & 0 < t \leq T \\ y(x, t) &= y_0, & \infty > t > T \end{aligned} \right\} \dots(22)$$

(22)式之入流歷線本文中簡稱為第一型波，此一入流波亦可寫成以下兩個餘弦波之線性疊加：

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= y_0 + \frac{Y_w}{2} (1 - \cos \frac{2\pi t}{T}), & \infty > t > 0 \\ y(x, t) &= -\frac{Y_w}{2} [1 - \cos \frac{2\pi}{T} (t - T)], & \infty > t > T \end{aligned} \right\} \dots(23)$$

如圖1 所示，圖1. a 之入流波為圖1. b 之餘弦波減去圖1. c (圖1. c 之圖形為圖1. b 之圖形往後平移 T 時間) 之結果。以圖1. b 與圖1. c 為邊界條件之解可分別依(19)式求得，依據重疊原理以圖1. a 為邊界條件之解可由前述兩種圖形之解相減而得到。

(2)三角形之水位歷線：

如圖2. a 所示為一三角形之水深歷線，延時為 T ，最高水深為 y_1 ， αT 為入流波斜率改變的時間，則其水深歷線可表示為：

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{\alpha T}, & t \leq \alpha T \\ y(x, t) &= y_1 - \frac{y_1 - y_0}{(1 - \alpha)T} \cdot (t - \alpha T), & \alpha T < t \leq T \\ y(x, t) &= y_0, & T < t \end{aligned} \right\} \dots(24)$$

24式之入流波本文中簡稱為第二型波。此波形可寫成以下三個直線函數波形之疊加：

$$\left. \begin{aligned}
 y(x,t) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{\alpha T} t, & \infty > t \geq 0 \\
 y(x,t) &= -\frac{y_1 - y_0}{\alpha(1-\alpha)T} \cdot (t - \alpha T), & \infty > t > \alpha T \\
 y(x,t) &= y_0, & \infty > t > T
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

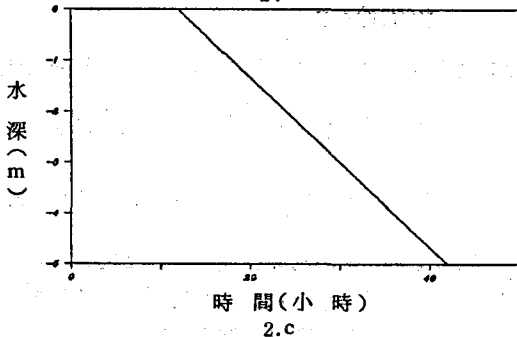
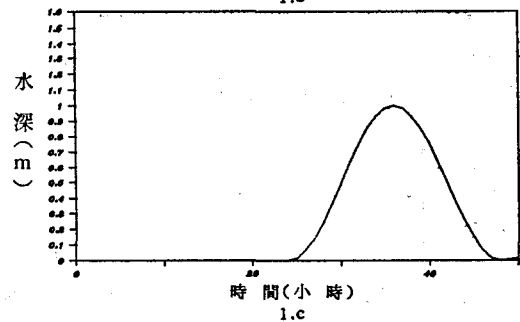
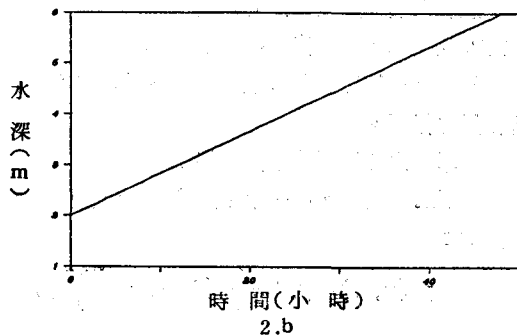
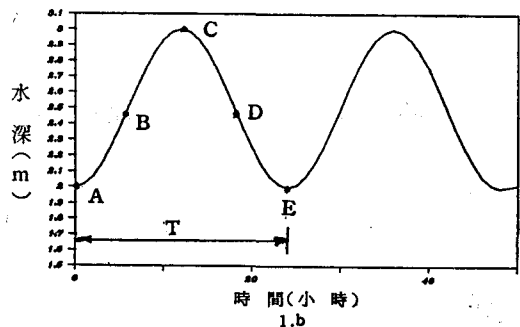
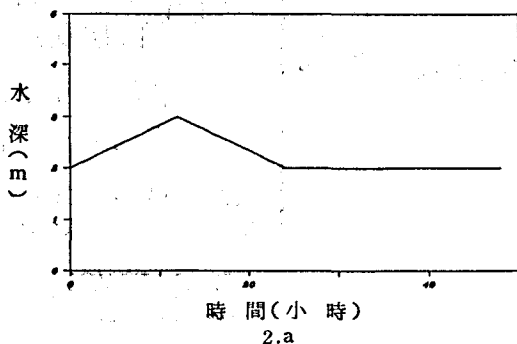
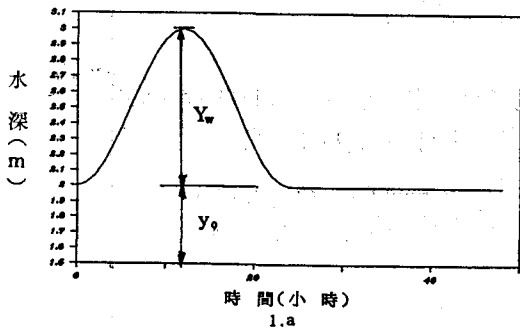


圖 1 第一型入流波及其疊加圖形

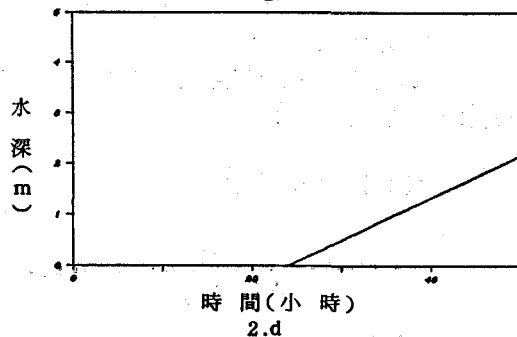


圖 2 第二型入流波及其疊加圖形 →

圖2. a之三角形歷線為圖2. b、2. c及2. d三條直線之疊加，因此，圖2. a入流歷線之解可用圖2. b、2. c及2. d三種直線函數波形之解（如第(2)式）相疊加。

(3) 梯形的水位歷線：

如圖3所示為一梯形之水深歷線，延時為T，最高水深為 y_1 ， $\alpha_1 T$ 為第一個斜率改變的時間， $\alpha_2 T$ 為第二個斜率改變的時間，則其水深歷線可表示如下：

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{\alpha_1 T} t, & 0 \leq t \leq \alpha_1 T \\ y(x, t) &= y_1, & \alpha_1 T < t \leq \alpha_2 T \\ y(x, t) &= y_1 - \frac{y_1 - y_0}{(1 - \alpha_2) T} (t - \alpha_2 T), & \alpha_2 T < t \leq T \\ y(x, t) &= y_0 & \infty > t > T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

(26)式之入流波本文中簡稱為第三型波。此波形可寫成以下四個直線函數波形之疊加：

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{\alpha_1 T} t, & \infty > t \geq 0 \\ y(x, t) &= -\frac{y_1 - y_0}{\alpha_1 T} (t - \alpha_1 T), & \infty > t \geq \alpha_1 T \\ y(x, t) &= -\frac{y_1 - y_0}{(1 - \alpha_2) T} (t - \alpha_2 T), & \infty > t \geq \alpha_2 T \\ y(x, t) &= \frac{y_1 - y_0}{(1 - \alpha_2) T} (t - T), & \infty > t \geq T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

圖3之歷線為(27)式四條直線之疊加，因此，圖3之入流歷線之解可用這四種直線函數波形之解相疊加。

(4) 急升波形之水位歷線：

若是渠道中水位突然升高很快，即為一急升波形之水位歷線，如圖4所示，其水深歷線可表示如下：

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= y_0, & 0 \leq t \leq \alpha_1 T \\ y(x, t) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{(\alpha_2 - \alpha_1) T} (t - \alpha_1 T), & \alpha_2 T \geq t \geq \alpha_1 T \\ y(x, t) &= y_1, & \infty > t \geq \alpha_2 T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

(28)式之入流波本文中簡稱為第四型波，此波形可寫成以下四個直線函數波形之疊加：

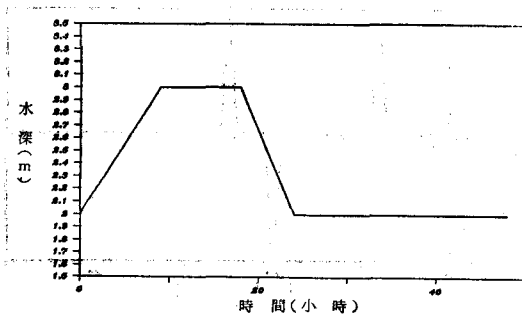


圖3 第三型入流波

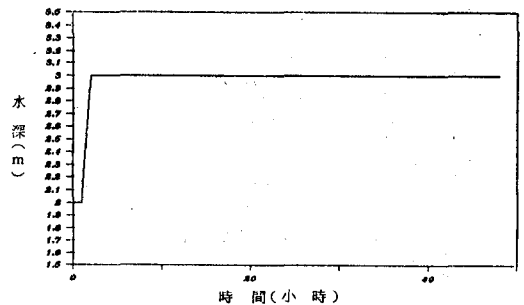


圖4 第四型入流波

$$\left. \begin{aligned}
 y(x, t) &= y_0, & \infty > t \geq 0 \\
 y(x, t) &= \frac{y_1 - y_0}{(\alpha_2 - \alpha_1)T} (t - \alpha_1 T), & \infty > t \geq \alpha_1 T \\
 y(x, t) &= -\frac{(y_1 - y_0)}{(\alpha_2 - \alpha_1)T} (t - \alpha_2 T), & \infty > t \geq \alpha_2 T
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

圖 4 之歷線為(29)式三條直線之疊加，圖 4 之入流歷線之解可用這三種直線函數波形之解相疊加。

四、解析解與數值解之比較

今假設有一條寬淺之矩形渠道，長為40公里，寬為200公尺，渠底坡度為1/2,000，蔡斯係數為85m^{1/2}/Sec，起始為均勻水深 y₀ = 2 公尺，下游為均勻流況 ($\frac{\partial y}{\partial x} = 0$)，上游分別以上節的四種單峯入流波輸入。

為了檢視本文之解析解，本文再利用隱式中央差分法⁽¹³⁾求得(14)式之數值解以作為比較，差分法之型式如附錄(三)所示。

再應用泰勒級數將中央差分法展開，可以求得(14)式之捨入誤差 (Truncation Error) 如下：

$$\text{Error} = \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{6} + \frac{(\Delta x)^2}{6\omega^2} \right\} \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \text{高次項} \dots\dots\dots (30)$$

(30)式之推導如附錄(四)所示。今將四種入流波形之解析解與數值解比較如下：

(1)第一型入流波：

如圖 1. a 所示，假設(2)式中 T = 24 小時，Y_w = 1 m，h₀ = 0.5 m，所得解析解與數值解在 20Km 處之水深歷線如圖 5 所示，圖中可看出二種解甚為接近，顯示本文之解析解之正確性。為了進一步比較兩者之誤差，將相對誤差表示為：

$$\text{相對誤差} = \frac{\text{解析解} - \text{數值解}}{y_0 + h_0} \dots\dots\dots (31)$$

兩者之相對誤差如圖 6 所示，由圖 6 可看出相對誤差之級序約為 10⁻⁵ 左右，且發生較大誤差之時刻約在 1 小時、8 小時、20 小時及 25 小時四點，約為圖 5 中 20Km 處歷線之 A、B、D、E 四點附近。圖 5 中，A、E 為最低點，B、D 為反曲點，C 為最高點。再由(30)式中知數值解之捨入誤差可寫成如下表所示：

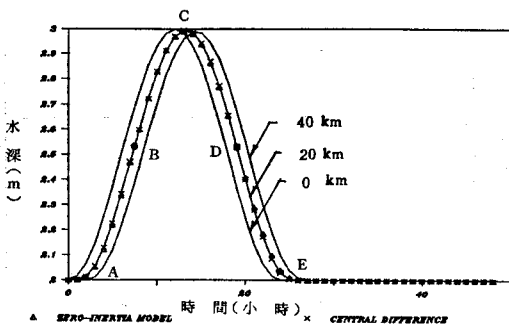


圖 5 第一型入流波三種方法之模擬結果

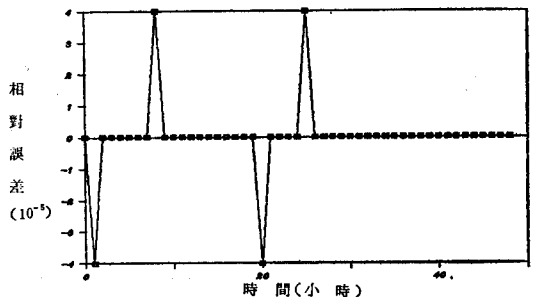


圖 6 第一型入流波解析解及中央差分法之相對誤差圖

點	$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}$	捨入誤差 (忽略高次微分項)
A、E	0	0
B	$-\frac{4Y_w\pi^3}{T^3}$	$-\left\{\frac{(\Delta t)^2}{6} + \frac{(\Delta x)^2}{6\omega^2}\right\} \cdot \frac{4Y_w\pi^3}{T^3}$
C	0	0
D	$\frac{4Y_w\pi^3}{T^3}$	$\left\{\frac{(\Delta t)^2}{6} + \frac{(\Delta x)^2}{6\omega^2}\right\} \frac{4Y_w\pi^3}{T^3}$

由表中及圖 6 比較可看出，B、D 兩反曲點捨入誤差較大，而 A、E 點為函數轉折點，其導數 (Derivative) 並不連續，因此有較大之數值誤差存在，而最高點 C 並無捨入誤差。因此 A、B、D、E 點之誤差係由數值誤差所致，此亦證明本文解析解之正確性。

(2) 第二型入流波

如圖 2. a 所示，假設(24)式中， $T=24$ 小時， $y_1=3\text{m}$ ， $\alpha=0.5$ ，所得解析解與數值解在 20Km 處之水深歷線如圖 7 所示，圖中可看出二種解甚為接近。兩者之相對誤差如圖 8 所示，由圖 8 可看出相對誤差之級序約為 10^{-4} 左右，發生較大誤差之時刻約在 1 小時、12 小時及 25 小時，約為圖 7 中 20Km 處歷線之函數轉折點附近，可知其誤差係由數值誤差所致。

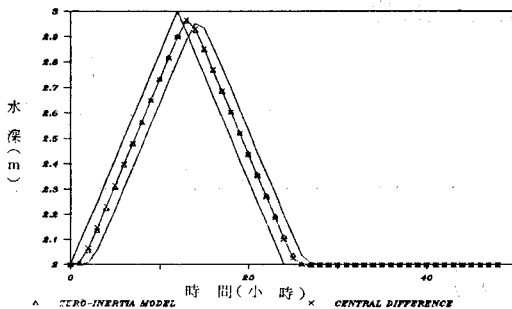


圖 7 第二型入流波三種方法之模擬結果

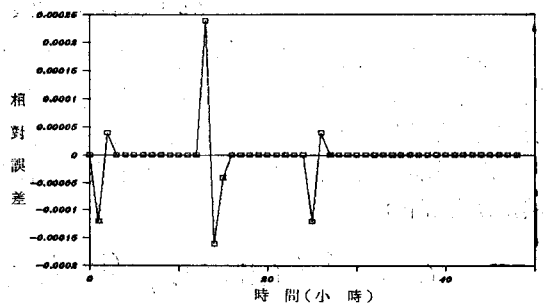


圖 8 第二型入流波解析解及中央差分法之相對誤差圖

(3) 第三型入流波：

如圖 3 所示，假設(26)式中， $T=24$ 小時， $h_0=2.6\text{m}$ ， $y_1=3\text{m}$ ， $\alpha_1=0.375$ ， $\alpha_2=0.75$ ，所得解析解與數值解在 20 km 處之水深歷線如圖 9 所示，圖中可看出二種解亦甚為接近。兩者之相對誤差如圖 10 所示，由圖 10 中可看出其相對誤差之級序約在 10^{-4} 以下，發生較大誤差之時刻約在 1 小時，9 小時、19 小時及 25 小時，約為圖 9 中 20 km 處歷線之函數轉折點附近，可知其誤差是由數值誤差所致。

(4) 第四型入流波：

如圖 4 所示，假設(28)式中 $T=24$ 小時， $h_0=2.5\text{m}$ ， $y_1=3\text{m}$ ， $\alpha_1=0.0417$ ， $\alpha_2=0.083$ ，所得解析解與數值解在 20 km 處之水深歷線如圖 11 所示，二種解亦甚為接近。兩者之相對誤差如圖 12 所示，由圖 12 中可看出其相對誤差之級序約在 10^{-8} 以下，發生較大誤差之時刻約在 1 小時及 2 小時，約為圖 11 中 20km 處歷線之函數轉折點附近，因其斜率變化最大，故誤差最大。

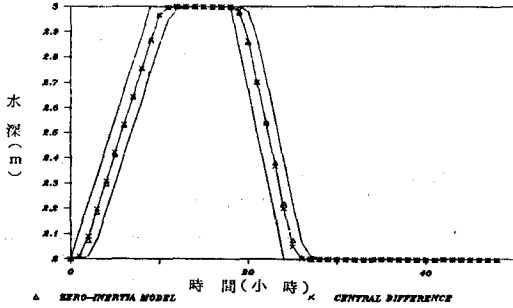


圖9 第三型入流波三種方法之模擬結果

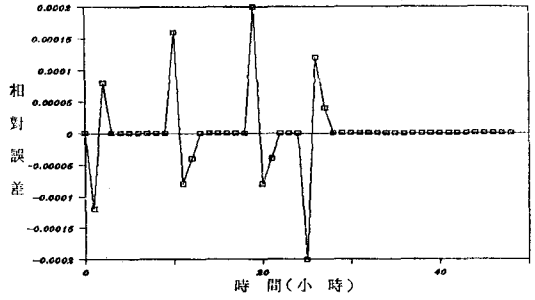


圖10 第三型入流波解析解及中央差分法之相對誤差圖

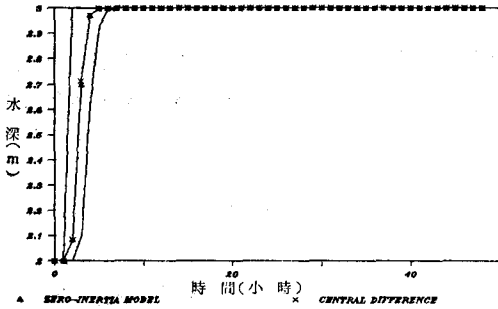


圖11 第四型入流波三種方法之模擬結果

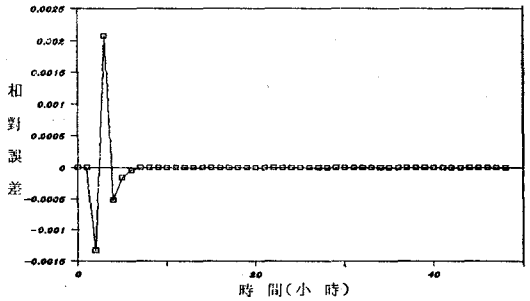


圖12 第四型入流波解析解及中央差分法之相對誤差圖

五、線性解析與零慣性模式之比較

本文中之解析解主要根據微小擾動波之理論將方程式線性化後而解得，即利用(14)式求得解析解。但一般渠道中若擾動波之振幅加大，(9)式中之高階項愈趨重要。因本解析解僅考慮(9)式中一階展開之精度，對於較大振幅之問題，本解析解之適用性及精度將做進一步之探討。

為了探討改變振幅對精度之影響，本文引用普里斯曼隱式差分法直接求解(1)、(2)兩式之零慣性模式，其差分法如下：

$$\left. \begin{aligned} f(x,t) &= \frac{\theta}{2} (f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1}) + \frac{(1-\theta)}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2\Delta t} \left[(f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n) + (f_j^{n+1} - f_j^n) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

(31)式中 f 代表 y 、 v 等變量， θ 表示下一時段所佔之權重，本文採用 0.6⁽⁸⁾， n 及 j 分別表時間段與空間之註標， Δx 及 Δt 表示時間與空間之間距。四型入流波所模擬結果亦分別繪如圖 5、7、9、11 所示圖中顯示其數值解與解析解甚為符合。

(1)、(2)式之零慣性模式中考慮了水深 y 隨時間及空間而變化，所以 ω 及 μ 都不是定值，而解析解是採用微小擾動波的觀念，假設 ω 及 μ 都是定值，因此在大振幅波時可能產生較大之誤差。

圖13至16是四種入流歷線解析解與零慣性模式的相對誤差，其間之誤差包括數值誤差及 ω 、 μ 假設為定值的誤差，圖中顯示其誤差約在 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ 之間，級次較前一節中的誤差為大，但可看出在 $y = y_0 + h_0$ 的附近誤差較小，此由於此時之水深與線性展開之基準水深 $y_0 + h_0$ 較接近所致。

圖17是第一型入流波不同振幅的情況下之相對誤差圖，當 $h_0/y_0=0.25$ 時，其最大相對誤差的級次約在 10^{-3} ；當 $h_0/y_0=0.75$ 時，其最大相對誤差的級次約為 10^{-2} ；當 $h_0/y_0=2.5$ 時，其最大相對誤差的級次約為 10^{-1} 。在第一型的入流波中， h_0 為振幅之半， h_0/y_0 之值愈大，振幅就愈大，其相對誤差也就愈大。為了探討振幅之改變與最大相對誤差之關係，求得第一型入流波各種不同振幅及其最大相對誤差之關係如圖18所示，圖中以最大相對誤差為縱座標，橫座標為 $h_0/(y_0+h_0)$ ，振幅愈大，其值就趨近於1，由圖中可看出其最大相對誤差也就愈大。若要控制最大的相對誤差在某個值以下，可由圖18中得到適用之振幅的範圍。由圖17及18中可知振幅愈小，其相對誤差愈小，此乃因振幅愈小，愈接近微小擾動波之假設。

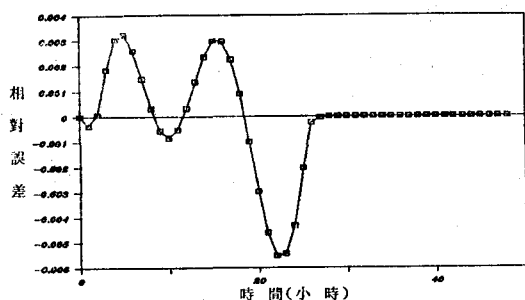


圖13 第一型入流波解析解及零慣性模式之相對誤差圖

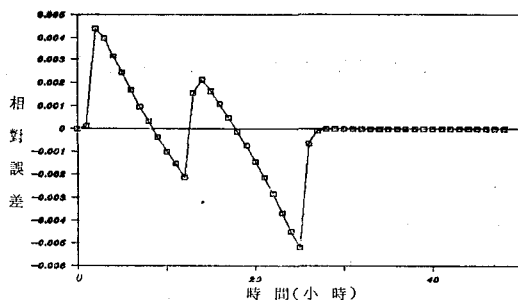


圖14 第二型入流波解析解及零慣性模式之相對誤差圖

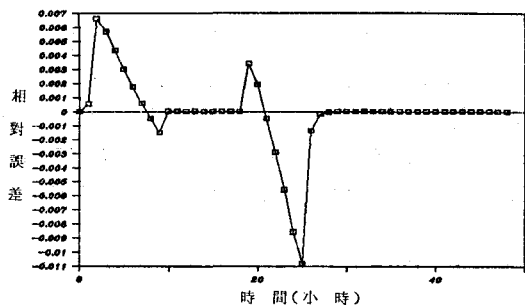


圖15 第三型入流波解析解及零慣性模式之相對誤差

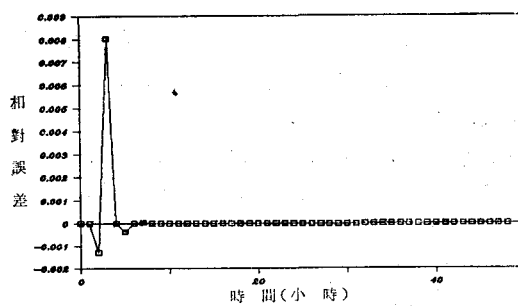


圖16 第四型入流波解析解及零慣性模式之相對誤差圖

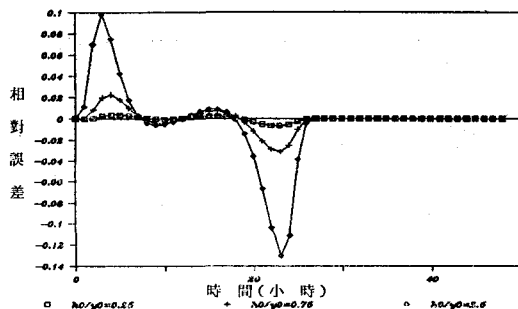


圖17 第一型入流波振幅與相對誤差圖

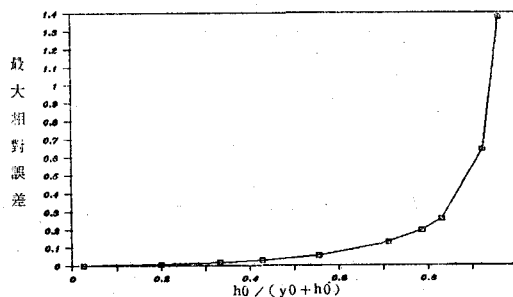


圖18 第一型入流波振幅與最大相對誤差關係

六、結 論

1. 本文依線性化零慣性模式為基礎，配合拉普拉斯轉換，餘數積分定理等數學方法求解渠道中淺水波之傳播情況。
2. 由解析解與中央差分法數值解之誤差比較分析可看出，兩者之誤差主要由數值方法之捨入誤差所造成的，顯示本解析解之正確性。本解析解亦可做為一些數值方法間精度比較之基準。
3. 由解析解與普里斯曼零慣性模式之數值解比較可看出，若入流波之振幅愈小，則兩者之相對誤差亦小，此亦與微小擾動波之理論較為接近。

七、參 考 文 獻

1. Akan, A. O. and B. C. Yen, "A Nonlinear Diffusion-Wave Model for Unsteady Open-Channel Flow.", Proceedings of the 17th Congress, August, 1977, Baden-Baden, Germany, Vol. 12.
2. Ponce, V.M., R.M. Li and D.B. Simons, "Applicability of Kinematic and Diffusion Model", J. of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 104, No. HY3, March, 1978, pp 353~360.
3. Henderson, F.M., *Open Channel Flow*, Macmillan Publishing Co., 1966.
4. Dooge, J.C.I. and B.M. Harley, "Linear Routing In Uniform Open Channels.", International Hydrology Symposium, Fort Collins, Sept., 1967.
5. Hayami, S., "On the Propagation of Flood Wave." Kyoto University Disaster Prevention Research Institute, Bulletin No. 1, Kyoto, Japan, 1951.
6. Keefer, T.M. and R.S. McQuivey. "Multiple Linearization Flow Routing Model," J. of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 100, No. HY7, July, 1974, pp. 1031~1046.
7. Tingsanchali T. and S.K. Manandhar, "Analytical Diffusion Model for Flood Routing." J. of Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 111 No. 3, March, 1985, pp. 435~454.
8. Cunge J.A., *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman Publishing Limited, 1980.
9. Carslaw J., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Oxford University Press., 1959, pp. 297~326.
10. 陶偉麟，1983，淡水河洪流數學模式之比較研究，臺灣大學土木研究所碩士論文。
11. 王士紘、顏本綺，「渠道變量流線性解析法之研究」，臺灣水利季刊第三十五卷第一期，76年3月。
12. 王士紘、吳豐帥，「有迴水影響時渠道變量流解析法之研究」，第四屆水利工程研討會論文集，國立中興大學，77年5月。
13. 謝弘哲，1987，三次雲形配置法在渠道水流與水質模擬之運用，臺灣大學農工研究所碩士論文。

附 錄 (一)

$$\text{求解： } \frac{\partial y}{\partial t} + \omega \frac{\partial y}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots\dots\dots (A.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{邊界條件： } y(0, t) &= y_0 + \frac{Y_w}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right) \\ \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.2)$$

起始條件： $y(x,0)=y_0$

將方程式予以線性化，即令

$$\begin{aligned} y^* &= y - y_0 \\ x^* &= x/L \\ u^* &= \omega \cdot T/L \\ D^* &= \mu \cdot T/L^2 \\ t^* &= t/T \end{aligned}$$

則原式可簡化為

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial y^*}{\partial x^*} &= D^* \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^{*2}} \\ \text{其邊界條件： } y^*(0, t^*) &= \frac{Y_v}{2} \cdot [1 - \cos(2\pi t^*)] \\ \frac{\partial y^*(1, t^*)}{\partial x^*} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.3)$$

起始條件： $y^*(x^*,0)=0$,

為了表示方便，以下將變數右上角的“*”去掉

則上式可寫成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \text{邊界條件： } y(0, t) &= \frac{Y_v}{2} \cdot [1 - \cos(2\pi t)] \\ \frac{\partial y(1, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.4)$$

起始條件： $y(x,0)=0$

將上式對時間取拉普拉斯轉換 (Laplace Transformation) 得到下式：

$$SU + uU' = DU'' \dots\dots\dots$$

上式中， $U=L[y]$ ， U' 及 U'' 分別表示 U 對 x 之一次及二次微分，邊界條件可寫成：

$$\left. \begin{aligned} L[y(0, t)] &= \frac{Y_v}{2S} - \frac{Y_v S}{2(S^2 + 4\pi^2)} \\ L\left[\frac{\partial y(1, t)}{\partial x}\right] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.6)$$

由 (A.5) 及 (A.6) 可求得 U 如下式

$$U = e^{-\frac{ux}{2D}} \cdot \frac{Y_v \cdot 2\pi^2}{S \cdot [S^2 + 4\pi^2]} \cdot \frac{\operatorname{usinh}[\sqrt{u^2 + 4DS}(1-x)/2D] + \sqrt{u^2 + 4DS} \cosh[\sqrt{u^2 + 4DS}(1-x)/2D]}{\operatorname{usinh}[\sqrt{u^2 + 4DS}/2D] + \sqrt{u^2 + 4DS} \cosh[\sqrt{u^2 + 4DS}/2D]} \dots (A.7)$$

再由拉普拉斯逆轉換定理，可將 y 表成下式

$$y = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{r-1\infty}^{r+1\infty} e^{st} \cdot e^{-\frac{ux}{2D}} \cdot \frac{Y_v \cdot 2\pi^2}{\lambda[\lambda^2 + 4\pi^2]} \cdot$$

$$\frac{\operatorname{usinh}[\sqrt{u^2+4D}\lambda(1-x)/2D]+\sqrt{u^2+4D}\lambda\cosh[\sqrt{u^2+4D}\lambda(1-x)/2D]}{\operatorname{usinh}[\sqrt{u^2+4D}\lambda/2D]+\sqrt{u^2+4D}\lambda\cosh[\sqrt{u^2+4D}\lambda/2D]}d\lambda \quad \dots(A.8)$$

(A.8) 式可由殘值定理 (Residual Theorem) 寫成下式：

$$y = \frac{1}{2\pi i} \cdot e^{\frac{ux}{2D}} \cdot Y_w \cdot 2\pi^2 \cdot 2\pi i (\sum \operatorname{Res}) \dots \dots \dots (A.9)$$

式中 Res 表示 (A.8) 式積分式之殘值。其殘值可依奇異點值 (singular point) 求得 (A.9) 式之奇異點有包括以下①, ②, ③三項：

- ① $\lambda=0$
- ② $\lambda=\pm 2\pi i$
- ③ $\lambda=-D\alpha_n^2-u^2/4D$

$$(\text{令 } i\alpha_n = \frac{\sqrt{u^2+4D}\lambda}{2D}, \text{ 則 } \lambda = D\alpha_n^2 - u^2/4D,$$

式中 α_n 是 $\alpha_n \cot \alpha_n + \frac{u}{2D} = 0$ 之正實數根)

再分別求出這三項的殘值如下：

$$\textcircled{1} \quad \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow D\alpha_n^2 - \frac{u^2}{4D}} = \frac{\operatorname{usinh}[(1-x) \cdot |u/2D] + |u| \cdot \cosh[(1-x) \cdot |u/2D]}{4\pi^2 [\operatorname{usinh}(|u/2D) + |u| \cosh(|u/2D)]}$$

$$\textcircled{2} \quad \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow D\alpha_n^2 - \frac{u^2}{4D}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2D\alpha_n \cdot \{\operatorname{usinh}[(1-x)\alpha_n] + 2D\alpha_n \cos[(1-x)\alpha_n]\}}{\left[(-D\alpha_n^2 - \frac{u^2}{4D})\right]^2 + 4\pi^2(-D\alpha_n^2 - u^2/4D)} \cdot \frac{\operatorname{Exp}\left[\left(-D\alpha_n^2 - \frac{u^2}{4D}\right)t\right]}{\left(u + 2D + \frac{4D^2\alpha_n^2}{u}\right)\cos\alpha_n}$$

$$\textcircled{3} \quad \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow \pm 2\pi i} = \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow 2\pi i} + \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow -2\pi i} = \frac{(EH-FG)\cos(2\pi t) + (EG+FH)\sin(2\pi t)}{-2\pi^2(E^2+F^2)}$$

$$\text{式中： } A = \frac{4\sqrt{2}\pi D}{\sqrt{-u^2 + \sqrt{u^4 + 64\pi^2 D^2}}}$$

$$B = \frac{\sqrt{-u^2 + \sqrt{u^4 + 64\pi^2 D^2}}}{\sqrt{2}}$$

$$H = \cos\left(\frac{1-x}{2D}B\right) \cdot \left[\operatorname{usinh}\left(\frac{1-x}{2D}A\right) + A \cosh\left(\frac{1-x}{2D}A\right) \right] - B \sin\left(\frac{1-x}{2D}B\right) \cdot \sinh\left(\frac{1-x}{2D}A\right)$$

$$G = -\sin\left(\frac{1-x}{2D}B\right) \cdot \left[u \cosh\left(\frac{1-x}{2D}A\right) + A \sinh\left(\frac{1-x}{2D}A\right) \right] - B \cos\left(\frac{1-x}{2D}B\right) \cdot \cosh\left(\frac{1-x}{2D}A\right)$$

$$E = 2u \cos\left(\frac{B}{2D}\right) \cdot \sinh\left(\frac{A}{2D}\right) + 2A \cos\left(\frac{B}{2D}\right) \cosh\left(\frac{A}{2D}\right) - 2B \sin\left(\frac{B}{2D}\right) \sinh\left(\frac{A}{2D}\right)$$

$$F = 2u \sin\left(\frac{B}{2D}\right) \cosh\left(\frac{A}{2D}\right) + B \cos\left(\frac{B}{2D}\right) \cosh\left(\frac{A}{2D}\right) \\ + 2A \sin\left(\frac{B}{2D}\right) \sinh\left(\frac{A}{2D}\right)$$

將這三項代入 (A.9) 式中即可解得 y 如下式：

$$y = 2\pi^2 \cdot Y_w \cdot e^{\frac{ux}{2D}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\operatorname{usinh}[(1-x) \cdot |u|/2D] + |u| \cdot \cosh[(1-x) \cdot |u|/2D]}{4\pi^2 \cdot [\operatorname{usinh}(|u|/2D) + |u| \cosh(|u|/2D)]} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2D\alpha_n \cdot \{u \operatorname{Sin}[(1-x)\alpha_n] + 2D\alpha_n \cos[(1-x)\alpha_n]\}}{[(-D\alpha_n^2 - u^2/4D)^2 + 4\pi^2(-D\alpha_n^2 - u^2/4D)]} \\ \frac{\operatorname{Exp}[(-D\alpha_n^2 - u^2/4D) \cdot t]}{(u + 2D + \frac{4D^2\alpha_n^2}{u}) \cos\alpha_n} \\ - \frac{(EH - FG) \cos(2\pi t) + (EG + FH) \sin(2\pi t)}{2\pi^2(E^2 + F^2)} \end{array} \right\} \dots \quad (\text{A.10})$$

附 錄 (二)

$$\text{求解：} \frac{\partial y}{\partial t} + \omega \frac{\partial y}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots \dots \dots (\text{B.1})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{邊界條件：} y(0, t) = y_0 + b \cdot \frac{t}{T} \\ \frac{\partial y(L, t)}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (\text{B.2})$$

起始條件：y(x, 0) = y_0,

將方程式予以線性化，即令：

$$y^* = y - y_0$$

$$x^* = x/L$$

$$u^* = \omega \cdot T/L$$

$$D^* = \mu \cdot T/L^2$$

$$t^* = t/T$$

則原式可寫成下式：

$$\frac{\partial y^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial y^*}{\partial x^*} = D^* \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{邊界條件：} y^*(0, t^*) = b \cdot t^* \\ \frac{\partial y^*(1, t^*)}{\partial x^*} = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (\text{B.3})$$

起始條件：y^*(x^*, 0) = 0

爲了表示方便，以下將變數右上角之“*”去掉。

則上式可寫成：

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} = D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{邊界條件：} y(0, t) = bt \\ \frac{\partial y(1, t)}{\partial x} = 0, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (\text{B.4})$$

起始條件：y(x, 0) = 0

將上式對時間取拉普拉斯轉換可得到：

$$\left. \begin{aligned} SU + uU' &= DU'' \\ L[y(0, t)] &= \frac{b}{S^2} \\ L\left\{\frac{\partial y(1, t)}{\partial x}\right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(B.5)$$

由(B.5)可求得U如下式：

$$U = \frac{b}{S^2} \cdot e^{\frac{ux}{2D}} \cdot \frac{\operatorname{usinh}[(1-x) \cdot (u^2+4DS)^{1/2}/2D] + \sqrt{u^2+4DS} \cdot \cosh[(1-x) \cdot (u^2+4DS)^{1/2}/2D]}{\operatorname{usinh}[(u^2+4DS)^{1/2}/2D] + \sqrt{u^2+4DS} \cdot \cosh[(u^2+4DS)^{1/2}/2D]} \dots\dots\dots(B.6)$$

再由拉普拉斯逆轉換定理，可將y寫成下式：

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-1\infty}^{r+1\infty} e^{st} \cdot \frac{b}{\lambda^2} \cdot e^{\frac{ux}{2D}} \cdot \frac{\operatorname{usinh}[(1-x) \cdot (u^2+4D\lambda)^{1/2}/2D] + \sqrt{u^2+4D\lambda} \cosh[(1-x) \cdot (u^2+4D\lambda)^{1/2}/2D]}{\operatorname{usinh}[(u^2+4D\lambda)^{1/2}/2D] + \sqrt{u^2+4D\lambda} \cdot \cosh[(u^2+4D\lambda)^{1/2}/2D]} d\lambda \dots\dots\dots(B.7)$$

(B.7)式可由殘值定理寫成下式：

$$y = \frac{1}{2\pi i} \cdot b \cdot e^{\frac{ux}{2D}} \cdot 2\pi i \cdot (\Sigma \operatorname{Res}) \dots\dots\dots(B.8)$$

將 (B.8) 式之奇異點分成以下兩項：

① $\lambda=0$ (二階)

② $\lambda = -D\alpha_n^2 - \frac{u^2}{4D}$

分別求出這兩項的殘值如下：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow 0} &= \frac{\operatorname{usinh}[|u| \cdot (1-x)/2D] + |u| \cdot \cosh[|u| \cdot (1-x)/2D]}{\operatorname{usinh}[|u|/2D] + |u| \cosh[|u|/2D]} t \\ &= \frac{\{ \operatorname{usinh}[|u|(1-x)/2D] + |u| \cdot \cosh[|u| \cdot (1-x)/2D] \} \cdot \left\{ \frac{u+2D}{|u|} \cdot \cosh[|u|/2D] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sinh[|u|/2D]}{|u| \cosh[|u|/2D]} \right\}}{\{ \operatorname{usinh}[|u|/2D] + |u| \cosh[|u|/2D] \}^2} \\ &+ \frac{\frac{u(1-x)+2D}{|u|} \cosh[|u|(1-x)/2D] + (1-x) \sinh[|u|(1-x)/2D]}{\operatorname{usinh}[|u|/2D] + |u| \cosh[|u|/2D]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \operatorname{Res}_{\lambda \rightarrow -D\alpha_n^2 - \frac{u^2}{4D}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2D\alpha_n \{ u \sin[(1-x)\alpha_n] + 2D\alpha_n \cos[(1-x)\alpha_n] \} \cdot \operatorname{Exp}[-(D\alpha_n^2 - u/4D)t]}{(-D\alpha_n^2 - u^2/4D)^2 \cdot \{ -(u+2D)\cos\alpha_n + 2D\alpha_n \}} \end{aligned}$$

將這兩項代入 (B.8)，即可求得y如下式：

$$\therefore y(x,t) = b \cdot e^{\frac{ux}{2D}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & t \cdot \frac{u \sinh[|u| \cdot (1-x)/2D] + |u| \cosh[|u| \cdot (1-x)/2D]}{u \sinh[|u|/2D] + |u| \cosh[|u|/2D]} \\ & - \frac{\{u \sinh[|u| \cdot (1-x)/2D] + |u| \cosh[|u| \cdot (1-x)/2D]\} \cdot}{\{u \sinh[|u|/2D] + |u| \cosh[|u|/2D]\} +} \\ & \frac{\{ \frac{u+2D}{|u|} \cosh[|u|/2D] + \sinh[|u|/2D] \}}{|u| \cosh[|u|/2D]} \\ & + \frac{u(1-x) + 2D}{|u|} \frac{\cosh[|u| \cdot (1-x)/2D] + (1-x) \cdot \sinh[|u| \cdot (1-x)/2D]}{u \sinh[|u|/2D] + |u| \cosh[|u|/2D]} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2D\alpha_n \cdot \{u \sin[(1-x)\alpha_n] + 2D\alpha_n \cos[(1-x)\alpha_n]\} \cdot \text{Exp}[-D\alpha_n^2 - (u^2/4D)t]}{(-D\alpha_n^2 + u^2/4D)^2 \cdot \{-(u+2D)\cos\alpha_n + 2D\alpha_n \sin \alpha_n\}} \end{aligned} \right\}$$

附 錄 (三)

本文所採用的中央差分法差分形式如下：

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} \dots\dots\dots (C.1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{0.5(y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}) + 0.5(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} \dots\dots\dots (C.2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{0.5(y_{i+1}^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}) + 0.5(y_{i+1}^n - y_{i-1}^n)}{2\Delta x} \dots\dots\dots (C.3)$$

上式中 n、i 分別為時間及空間之註標，Δt 及 Δx 為時間及空間之間距，將 (C.1)、(C.2) 及 (C.3) 代入(4)式中，可得到六點函數之關係式如下：

$$\begin{aligned} & 0.5(C_r - R)y_{i+1}^{n+1} + (1+R)y_i^{n+1} + 0.5(-C_r - R)y_{i-1}^{n+1} \\ & = 0.5(-C_r + R)y_{i+1}^n + (1-R)y_i^n + 0.5(C_r + R)y_{i-1}^n \dots\dots\dots (C.4) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{上式中, } C_r = \omega \cdot \Delta t / (2\Delta x) \\ & R = \mu \cdot \Delta t / (\Delta x)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (C.5)$$

附 錄 (四)

隱式中央差分法之捨入誤差分析如下：(其展開點為 $f^{n+1/2}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [e^{u\Delta t} - 1] \cdot y \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[1 + \frac{\Delta t \partial y}{1!} + \frac{(\Delta t \partial y)^2}{2!} + \frac{(\Delta t \partial y)^3}{3!} + \dots - 1 \right] \cdot y \\ &= \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \dots\dots\dots (D.1) \end{aligned}$$

由泰勒展開式將 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 表成下式：

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_1^{n+1/2} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^2}{8} \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \dots \quad (D.2)$$

(D.1) 減去 (D.2) 可得 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 之捨入誤差 $\text{Err}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$ 如下式：

$$\text{Err}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{(\Delta t)^2}{24} \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \text{高次項} \quad \dots \quad (D.3)$$

同理可導得 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 之捨入誤差如下：

$$\begin{aligned} \text{Err}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) &= \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{(\Delta t)^2}{8} \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} + \text{高次項} \\ &= \left[\frac{(\Delta x)^3}{6\omega^3} + \frac{(\Delta t)^2}{8\omega} \right] \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \text{高次項} \quad \dots \quad (D.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Err}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) &= \frac{(\Delta t)^2}{8} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \text{高次項} \\ &= \frac{(\Delta t)^2}{8\omega^2} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \text{高次項} \quad \dots \quad (D.5) \end{aligned}$$

將 (D.3)、(D.4) 及 (D.5) 代入 (14) 式可算得 (14) 式之捨入誤差如下式：

$$\text{Err} = \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{6} + \frac{(\Delta x)^2}{6\omega^2} \right\} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \text{高次項} \quad \dots \quad (D.6)$$

專營土木、水利、建築等工程

大勝營造有限公司

地 址：斗六市大同路 121 巷 8 號

電 話：(055)329685