

渠流阻塞之流況分析

Analysis of Flow States Due to a Choke in Open Channel Flows

淡江大學水利工程學系教授兼院長

施 清 吉

Ching-chi Shih

Abstract

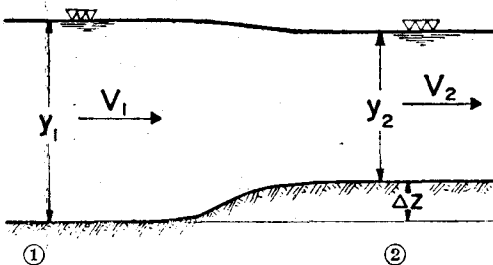
Flow states of a subcritical flow in an open channel due to increasing degrees of a hump of channel bottom or a width constriction will undergo three different successive categories: first the upstream and the discharge will remain unchanged, then the upstream flow will gradually be influenced with a continuously decrease in discharge, and finally the flow is completely choked. In a transition of upward step or side contraction, the onset of the subcritical flow being changed to the critical flow is a prerequisite to choking. After choking, discharges through a transition are subject to the following five equations: the continuity and the momentum equations for a moving surge, the continuity and the energy equations applied to a transition, and the critical flow after the transition. The shape of solution field of the above five simultaneous equations depends upon the types of transitions. A transition of hump in a open channel flow will result in a shape of solution formed by two triangles which join together with a common apex in the middle; while it consists with only an inverse triangles for a transition of width constriction. Part of boundaries of the solution field are two constant Froude lines; i.e., the upstream Froude numbers equal to 1 and 0. Except for completely choking, both the head loss coefficient of nonuniform flow and the discharge affect positions and shifts of constant Froude lines, especially for high values of head loss coefficient and discharge. In this situation part of solution field will shift across the limiting boundary, and becomes meaningless, as the solution in this part represents either a downward step or a side expansion.

一、引言

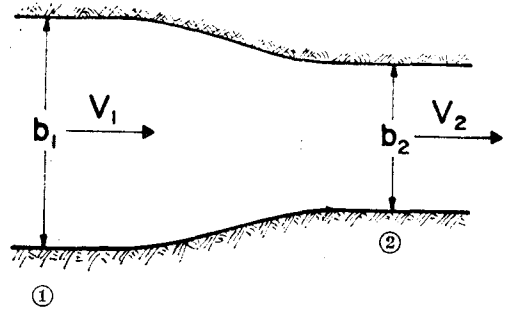
一般而言，不論是渠底上升或渠寬縮小的漸變段 (Transition)，其間的距離都相當短，故摩擦水頭損失 (Frictional head loss) 均可略而不計，只須考慮非均勻流動水頭損失 (Nonuniform flow head loss)，此項水頭損失完全來自改變渠道的幾何因素。在這種情況下，漸變段後的流況分析可引用能量法則 (Energy principle)。由能量法則吾人得知，在某一範圍內，渠底可一直上升或渠寬可一直縮小，但其改變並不影響上游深度 (Depth) 與速度 (Velocity)，即流經漸變段的流量 (Discharge) 仍然保持不變。可是一旦渠底上升的高度或渠寬縮小的幅度超過某一程度後，漸變段就會形成阻塞 (Choke) 的現象了，上游流況也就開始逐漸受影響，流量同時跟着下降。流量一旦受影響，除了受制於漸變段前的流況外，通過漸變段的流量還受其他多種因素的影響，例如渠道粗糙度 (Channel roughness)、渠道長度……等，這不在本文的討論範圍內。

二、理論分析

渠底上升或渠寬縮小的漸變段分別展示於圖一與圖二，漸變段前的流況可為次臨界流 (Subcritical flow) 亦可為超臨界流 (Supercritical flow)。超臨界流經一漸變段極易形成湧 (Surge) 或震波 (Shock wave)。若渠底只上升但渠寬不縮小，震前 (Shock front) 只垂直於岸邊。另一方面，若渠寬縮小，由於岸邊角度改變，震前就不再垂直於岸邊，且由於兩岸的反射作用與兩震前相遇的交互作用 (Interaction)，因而形成菱形駐定波 (Stationary wave)，且可向下游一直延續相當長的距離。由於深度在非常短的距離內急速地改變，現象的分析與探討也因此必須採用另外的方法。而構成方法差異的徵結決定於漸變段前的流況，若其流況為次臨界流，漸變段內的流況極不易



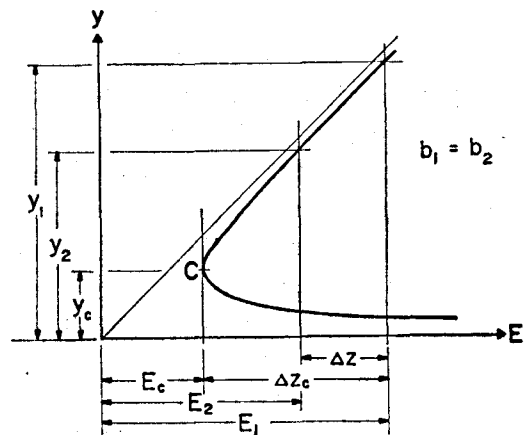
圖一 渠底上升



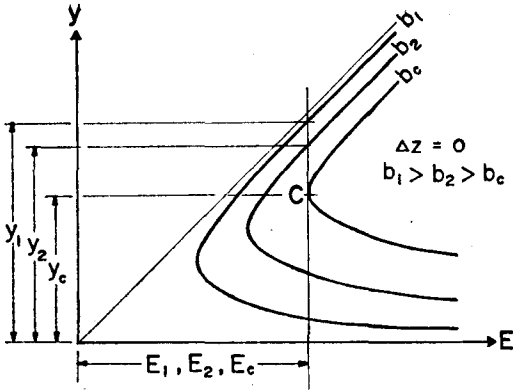
圖二 渠寬收縮

形成湧或震況，故漸變段前的流況為超臨界流的情況也不在本文的討論範圍內。

假設非均勻流動水頭損失 (Nonuniform flow head loss) 可略而不計，渠底上升與渠寬收縮的比能曲線分別展示於圖三與圖四。如圖三所示， E_1 為漸變段的上游比能，渠底上升使漸變段的比能下降，則代表漸變段比能 E_2 的垂直線往左移。若渠底上升的幅度 Δz 小於 Δz_c ，任何垂直線均能與比能曲線相交，其垂直座標 y_2 即為漸變段的水深，漸變段的流況仍為次臨界流。如果上升的高度等於 Δz_c ，則垂直線切於比能曲線的 c 點，此時漸變段的比能 E_c 為最小，且其流況由次臨界流轉變為臨界流，而深度為臨界深度 y_c 。大於 Δz_c 的上升高程就無法再能與比能曲線相交了，這就是一般所謂的阻塞。渠寬縮小的情形也頗為類似。參閱圖四，漸變段前的寬度為 b_1 ，單位寬度流量為 q_1 ，由於渠底高度未改變，故漸變段的比能保持不變同為 E_1 。渠寬縮小使單位寬度流量增大，對應的比能曲線往右移。如果漸變段的寬度 b_2 大於 b_c ，單位寬度流量 q_2 只跟着增加而已，任



圖三 渠底上升之比能曲線



圖四 渠寬收縮之比能曲線

何對應的比能曲線都能與垂直線相交，漸變段的水深為其垂直座標 y_2 ，漸變段的流況仍為次臨界流。若漸變段的寬度等於 b_c ，此時漸變段的單位寬度流量 q_c 為最大，且其流況同樣地由次臨界流轉變為臨界流，而深度為臨界深度 y_c 。小於 b_c 的渠道寬度，比能曲線也同樣地無法再與垂直線相交，這就形成阻塞了。由此，吾人得知不論是渠底上升或渠寬縮小，漸變段要形成阻塞前，其內的流況將先趨近於臨界流。所以，漸變段的流況為臨界流就代表阻塞的開始^{(1)*}。

如前段所述，一旦上升的渠底高度或縮小的渠道寬度超過了最大的容許幅度，漸變段前的流況就開始受影響，同時流量也漸下降，此時在漸變段即刻形成一個移動的水躍，俗稱為「湧」，自漸變段起沿上游方向傳遞，其高度與傳遞速度決定於未阻塞前的流況與阻塞的程度。以「湧」為界限，整個渠道分成兩種截然不同的流況，湧前為原來的流況，即渠底未上升或渠寬未縮小前的流況，而湧後為新的流況。新、舊流況的界限，或「湧」的位置，隨着不同的時間而異，這確實是屬於變量流(Unsteady flow)。但是除了「湧」外，湧前與湧後的流況仍然為定量流(Steady flow)。若進一步再假設「湧」的高度及其傳遞速度均保持不變，則利用(Galilean)轉換，吾人就可將「湧」與其前、後的流況簡化為定量流，湧前的流況為已知，而湧後的流況即可藉助於動量方程式(Momentum equation)與連續方程式(Continuity equation)求得。在湧後，漸變段前與漸變段後的流況分析仍然引用能量法則與連續方程式。根據上述的分析，吾

人共有四個方程式可引用，但未知數計有：湧後水深，湧後流速，湧的傳遞速度，漸變段的水深及流速，總共有五個未知數，尚欠一個關係式。為此，吾人首先探討阻塞後的可能情況。一般而言，除了接近漸變段的附近，渠底坡度可能會有局部性的改變外，其他渠段的坡度均保持不變。在此情況下，未阻塞前渠道即已能夠以原先流況宣洩原先流量，而今阻塞後，通過漸變段的流量下降，比原先流量小，則起碼在緊接漸變段的附近，渠道將以最大流量的流況宣洩阻塞後的流量；易言之，臨界流一定會形成於漸變段內或其後渠道的某一斷面上。所以，漸變段後的流況將轉變為超臨界流。這種情況非常類似於陡坡渠道自湖泊取水，通過漸變段的流量只受制於漸變段前的有效水頭，漸變段的水頭損失及其斷面形狀。另一種情況就相當少見了，不止在鄰近漸變段的附近，渠底坡度局部性改變，其他渠段的坡度也同時變緩了，則可能沒有一個斷面將以最大流量的流況宣洩阻塞後的流量；也就是說，根本沒有一個斷面上的流況是臨界流。故漸變段及其後的流況仍然維持為次臨界流。這種情況相當於緩坡渠道自湖沼取水。除了受上述因素的影響外，流入漸變段的流量還受下列諸因素的影響：漸變段及其後渠道的總長度，粗糙度及尾水位。此種情形的流況分析就極為複雜，除了引用本文所述的方法外，還須配合緩坡渠道自湖泊取水的分析技巧⁽²⁾。

由上段的分析，吾人得知阻塞後的流況分析就可由五個聯立方程式求得：其中三個是描述漸變段後的能量方程式、連續方程式及臨界流條件；另兩個是敘述湧前與湧後的相互關係，動量方程式與連續方程式。不論是渠底上升或渠寬收縮，吾人均可引用上述的方法來分析阻塞後的流況，分別討論於後。

一、渠底上升的流況分析

如圖一所示的矩形渠道，斷面(1)與(2)分別為漸變段前與漸變段後的典型代表，假設其間的距離相當短，故其間的水頭損失僅須考慮非均勻流動水頭損失 $K_L \frac{V_3^2}{2g}$ 。引用能量法則與連續方程式

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta z + K_L \frac{V_3^2}{2g} \dots\dots(1)$$

$$y_1 V_1 = y_2 V_2 \dots\dots\dots(2)$$

式中

y_1, V_1 ：分別為漸變段前（斷面(1)）的水深

* 參考文獻

(Depth) 與断面平均速度 (Sectional mean velocity)

y_2, V_2 : 分別為漸變段後 (断面(2)) 的水深與断面平均速度

Δz : 渠底的上升高度

K_L : 非均勻流動水頭損失係數 (Coefficient of nonuniform flow head loss)

断面(2)的流況轉變為臨界流時是渠底上升的最大高度, 超過這個高度, 上游流況就會受影響同時流量下降。利用這個條件由式(1)與(2)即可求得渠底上升的最大容許高度 Δz_c 。(3)。

$$\frac{\Delta z_c}{y_1} = \frac{1}{2} [2 + Fr_1^2 - (3 + K_L) Fr_1^{2/3}] \dots (3)$$

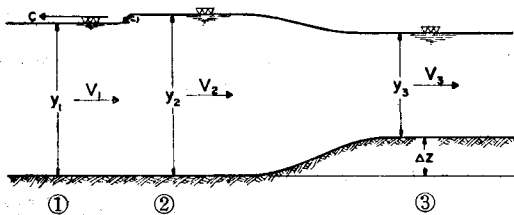
式中 Fr_1 為上游 Froude 數, 定義為 $Fr_1 = V_1 / \sqrt{gy_1}$ 。若上升的高度 Δz 小於式(3)所示的臨界高度 Δz_c , 任何上升的渠底均不影響上游流況, 同時流量也保持不變。如果非均勻流動水頭損失可略而不計, 即 $K_L = 0$, 則式(3)可簡化為:

$$\frac{\Delta z_c}{y_1} = \frac{1}{2} (2 + Fr_1^2 - 3Fr_1^{2/3}) \dots (4)$$

若上升的高度 Δz 超過了式(3)或(4)所示的最大容許高度 Δz_c , 參閱圖五, 則由前面的分析, 吾人得知湧前與湧後須符合下述的動量與連續兩方程式, 即:

$$\frac{(c + V_1)^2}{gy_1} = \frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \left(\frac{y_2}{y_1} + 1 \right) \dots (5)$$

$$(c + V_1)y_1 = (c + V_2)y_2 \dots (6)$$



圖五 渠底上升之阻塞現象

式中 c 代表湧的傳遞速度, 方向如圖五所示, 右下註脚 '1' 與 '2' 分別代表湧前與湧後, 深度與断面平均速度分別以 y 與 V 表示。在湧後, 漸變段前與漸變段後的流況分析類似於式(1)與(2), 同時断面(3)的流況且須為臨界流, 故:

$$y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = y_3 + \frac{V_3^2}{2g} + K_L \frac{V_3^2}{2g}, \Delta z > \Delta z_c (7)$$

$$y_2 V_2 = y_3 V_3 \dots (8)$$

$$V_3 = \sqrt{gy_3} \dots (9)$$

右下註脚 '2' 與 '3' 分別代表漸變段前與漸變段後, 深度與断面平均速度分別同樣以 y 與 V 表示。由式(5)與(6)消去湧的傳遞速度 c 吾人可得:

$$\frac{V_1 y_1 - V_2 y_2}{y_2 - y_1} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} g y_2 \left(\frac{y_2}{y_1} + 1 \right)} - V_1 (10)$$

湧前的流量 $V_1 y_1$ 大於湧後的流量 $V_2 y_2$, 同時湧後的深度 y_2 也大於湧前的深度 y_1 , 故等號右邊的根號必須取正。而後再由式(10), 吾人就求得介於湧後與漸變段前間的断面平均速度, 即:

$$V_2 = \frac{y_2 - y_1}{y_2} \left\{ \frac{V_1 y_1}{y_2 - y_1} + V_1 - \sqrt{\frac{1}{2} g y_2 \left(\frac{y_2}{y_1} + 1 \right)} \right\} \dots (11)$$

湧後的流向必須保持為原來的方向; 易言之, 湧後的速度 V_2 必須大於或等於零。極端的情形是湧後的水靜止不動, 即速度 V_2 等於零, 這時候的深度為湧後的最大深度 y_{2max} 。由式(11), 此深度須符合下列關係式:

$$\left(\frac{y_{2max}}{y_1} - 1 \right)^2 \left(\frac{y_1}{y_{2max}} + 1 \right) - 2Fr_1^2 = 0 \dots (12)$$

另一方面, 以這最大深度 y_{2max} 而言, 若令 $V_2 = 0$, 吾人同樣地可由式(5)與(6)得到相同的結果。總之, 渠底上升的高度 Δz 超過式(12)所示的幅度時, 湧後的水就靜止不動了, 而且其深度也不再受上升高度 Δz 的影響。因此具有意義的上升高度 Δz 應該介於式(3) (或式(4)) 與式(12)所示的範圍內。

總而言之, 針對流況的變化, 渠底上升高度 Δz 的幅度使整個流況的變成分成三種不同的情況。上升高度小於式(3) (或式(4)) 所示的高度 Δz_c , 上游流況並不受影響, 流量也保持不變。若上升高度超過了最大的容許幅度 Δz_c , 但小於式(12)的最大深度 y_{2max} , 流量隨着上升高度的增加而遞減, 且逐漸趨近於零。一旦上升高度超過 y_{2max} 後, 流量就降為零, 不再受上升高度的影響。

二、渠寬縮小的流況分析

另一種導致阻塞的現象就是断面收縮, 如圖二所示的矩形渠道。由於分析與探討的步驟頗類似於上述渠底上升的情形, 因此符號的意義就不再詳述於後。断面(1)與(2)間的能量方程式與連續方程式分別為:

$$y_1 + \frac{Q^2}{2gb_1^2 y_1^2} = y_2 + \frac{Q^2}{2gb_2^2 y_2^2} + K_L \frac{Q^2}{2gb_2^2 y_2^2} \dots \dots \dots (13)$$

$$b_1 y_1 V_1 = b_2 y_2 V_2 \dots \dots \dots (14)$$

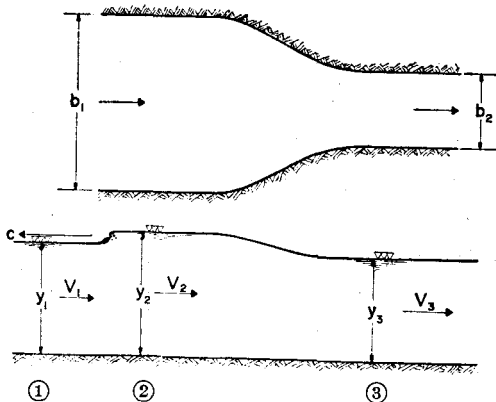
式中 b_1 與 b_2 分別為断面(1)與(2)的寬度，其比值定義為寬度比 ($\sigma = b_2/b_1$)。阻塞的臨界條件仍為断面(2)的流況由次臨界流轉變為臨界流。故由式(13)與(14)可求得臨界寬度比 σ_c ，即：

$$\sigma_c^2 = Fr_1^2 \left(-\frac{3}{2} + \frac{K_L}{2} \right)^3 / \left(1 + \frac{1}{2} Fr_1^2 \right)^3 (15)$$

如果非均勻流動水頭損失可不計，即 $K_L = 0$ ，則式(15)可簡化為：

$$\sigma_c^2 = 27 Fr_1^3 / (2 + Fr_1^2)^3 \dots \dots \dots (16)$$

若寬度比 σ 大於式(15)或式(16)所示的值，則上游流況不受渠寬收縮的影響，且 $\sigma = 1$ 代表渠寬未收縮。其次，如果收縮比 σ 介於 0 與 σ_c 之間，上游流況就會受渠寬收縮的影響，而且流量遞減，此時的流況展示於圖六。在漸變段前，湧前與湧後的動量方程式與連續方程式仍為式(5)與(6)。湧後的水呈現靜止不動時，寬度比等於 0，這表示渠道完全被漸變段阻塞了，此時湧後的最大深度 y_{2max} 仍須符合式(12)。在漸變段後，断面(2)與(3)間的能量方程式與連續方程式分別為：



圖六 渠寬收縮之阻塞現象

$$y_2 + \frac{Q^2}{2gb_1^2 y_2^2} = y_3 + \frac{Q^2}{2gb_2^2 y_3^2} + K_L \frac{Q^2}{2gb_2^2 y_3^2} \dots \dots \dots (17)$$

$$b_1 V_2 y_2 = b_2 V_3 y_3 \dots \dots \dots (18)$$

由於断面(2)與(3)間的渠底高度並沒改變，故式(17)未包括 Δz 。如同上述渠底上升的情況，断面(3)的流況必須為臨界流，故

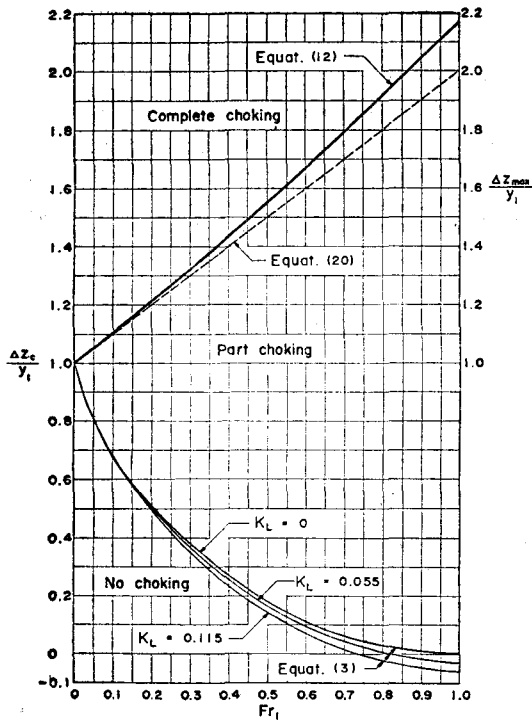
$$y_3 = \left(\frac{y_2 V_2}{\sqrt{g \sigma}} \right)^{2/3} \dots \dots \dots (19)$$

總之，渠寬的改變或寬度比 σ 的變化同樣地使整個流況分成三種不同的情況。寬度比大於式(15)或(16)所示的比值 σ_c 時，上游流況並不受影響，流量保持不變。若收縮後的寬度比小於最小的容許幅度 σ_c ，則流量隨着渠寬的縮小而遞減，且逐漸趨近於零。寬度比等於 0 代表完全阻塞。

三、數值計算

分析結果的計算可分為兩部份：阻塞的臨界情況（包括剛形成阻塞與完全阻塞的條件）和阻塞後的流況。所有的計算均採用倍精度(Double precision)，有效數字為十四位。渠底上升與渠道收縮時，剛形成阻塞的臨界條件分別為式(3)與(15)，這兩個關係式可直接計算求得，其結果分別展示於圖七與圖八。寬度比 σ 等於 0 代表完全阻塞，但是渠底上升的情形較為複雜，完全阻塞時，渠底的上升高程 Δz 須符合非線性方程式(12)。一旦形成阻塞，而後部份阻塞時的流況分析為解一組聯立非線性方程式之根，渠底上升為式(5)、(6)、(7)、(8)與(9)，而渠寬收縮則為式(5)、(6)、(17)、(18)與(19)。實際上本文並不直接尋求聯立方程式之根，而是將聯立非線性方程式予以簡化，轉換成一個非線性方程式後，再解其根。一般而言，非線性方程式之根往往都有好幾個，但是目前吾人所解之根為湧後深度 y_2 (參閱圖五與圖六)，則最接近湧前深度或上游深度 y_1 的第一個根即為吾人所欲求的湧後深度 y_2 。為此，吾人可採用稍稍大於湧前深度 y_1 的值做為疊代的初始值 (Initial value)，並以疊代間距 Δy_2 循序代入，直到代入的值同時符合下列兩條件時，才停止疊代：一是兩相鄰的疊代間距小於容許幅度，二是方程式的殘餘值小於容許幅度。每次疊代時，吾人須先檢查先後兩次代入的殘餘值是否改變了符號，即由大於 0 變成小於 0 或由小於 0 變成大於 0，若這種情形發生，則疊代間距 Δy_2 減為一半，同時改變符號。此種簡易方法相當可靠，但是所需的疊代次數較多。為了使代疊代間距與殘餘值均小於 10^{-7} ，大致需要三十至四十次的疊代次數。若使用 Newton Raphson 方法大約只需疊代十次，就可得到同樣精度之根，但是由於函數形式的過份複雜，在疊代過程中極易導向非所欲求之根。

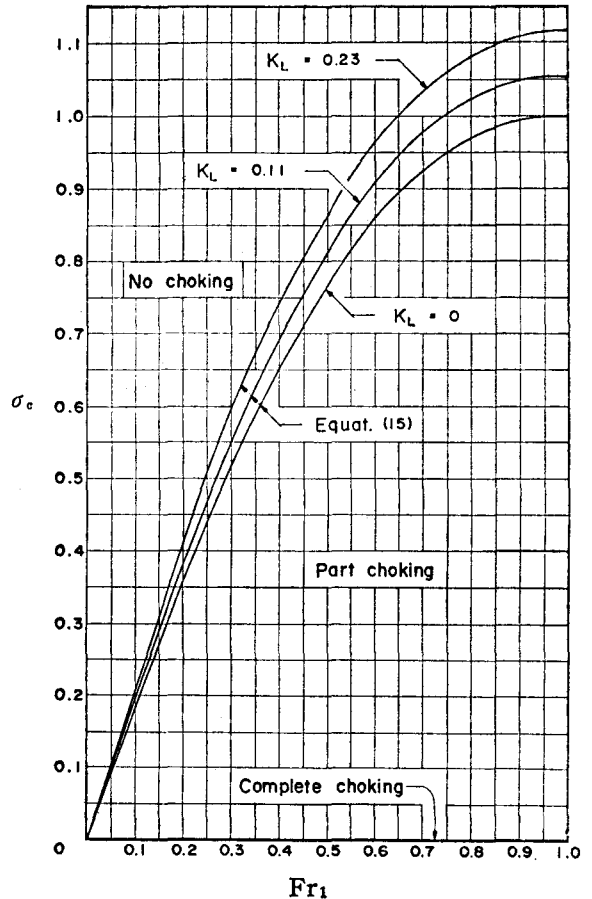
漸變段所導致的非均勻流動水頭損失通常均以



圖七 渠底上升之阻塞分界

$K_L \frac{V^2}{2g}$ 計。根據 Formica 的研究成果，流況為次臨界流時，渠寬緩慢收縮（圓化）與突然收縮（直角型），其水頭損失係數 K_L 分別等於 0.11 與 0.23⁽⁴⁾。由於目前尚無詳盡資料可供查訊渠底上升的水頭損失係數 K_L 之值。吾人只能姑且根據渠寬收縮的資料來推估渠底上升的情況。渠寬收縮是兩邊同時收縮的，而渠底上升則可視為單邊收縮，所以渠底緩慢上升與突然上升時的水頭損失係數就分別以 $0.11/2=0.055$ 與 $0.23/2=0.115$ 計。總之，針對非均勻流動水頭損失而言，所輸入的水頭損失係數之值只用以典型的區分而已，以便了解這種典型的差異對分析結果的影響。所以本文所探討的非均勻流動水頭損失可分為三類：水頭損失可不計，圓化的幾何變化，以及直角型的幾何變化。

不論是渠底上升或渠寬收縮，在部份阻塞的計算過程中，這兩種情況均須需輸入的變數或參數及其值（示於括弧內）計有：上游深度 y_1 (10 ft)，上游 Froude 數 Fr_1 (0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6、0.7、0.8、0.9)。上游 Froude 數等於 0 與 1 時的流況是使用其他方法解析求得的，將討論於後。另一共同的參數但其值視渠底上升或渠寬收

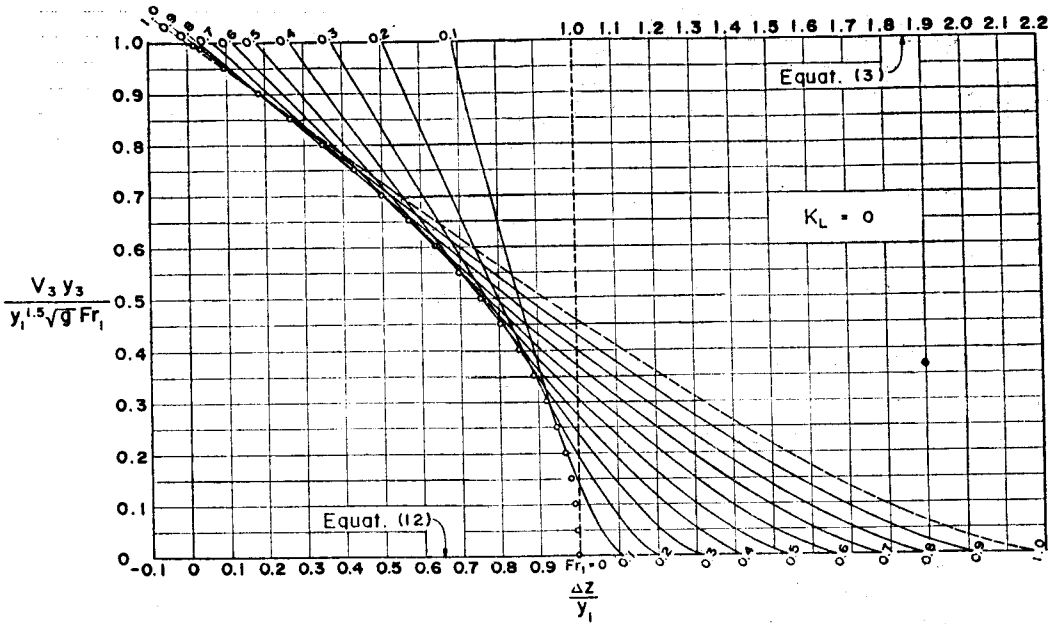


圖八 渠寬收縮之阻塞分界

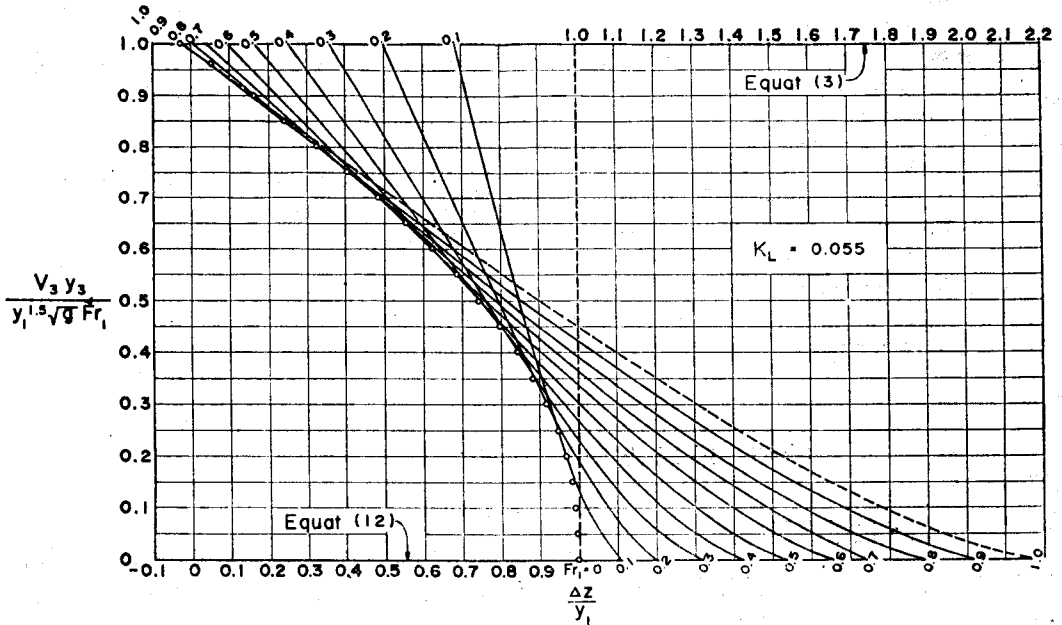
縮而定的，是非均勻流水頭損失係數 K_L 的值。以水頭損失可略而不計、圓化的幾何變化以及直角型的幾何變化等三種典型的區分而言，渠底上升的水頭損失係數 K_L 分別設為 0、0.055 與 0.115，對應的分析結果分別展示於圖九、圖十與圖十一；渠寬收縮的水頭損失係數則採用 0、0.11 與 0.23，對應的分析結果另分別展示於圖十三、圖十四、圖十五。圖九至圖十一的水平與垂直座標軸分別為相對於上游流況的上升高程與流量，即 $\Delta z/y_1$ 與 $y_3 V_3 / (y_1^{1.5} \sqrt{g Fr_1})$ ，圖中的參數為上游 Froude 數。圖十三至圖十五的水平座標軸改為寬度比 σ ，但垂直座標軸仍為相對於上游流況的流量，可是其組成多了一個寬度比，即 $y_3 V_3 \sigma / (y_1^{1.5} \sqrt{g Fr_1})$ 或 $y_3 V_3 \sigma / (y_1 V_1)$ ，這三個圖仍然以上游 Froude 數為參數。除了上述的輸入外，吾人尚須有系統地輸入自變數的值，這視渠底上升或渠寬收縮而略有差異。分析渠底上升的流況時，無因次變數 $\Delta z/y_1$ 的值取自 0.02 至 2.0，其間的差距為 0.01，有效

數據是指渠底上升的高度 Δz 大於式(3)的 Δz 。但小於式(12)的 y_{2max} 。另一方面，若為渠寬收縮，寬度比 σ 的變化幅度設為0.01至0.99，其間的差距為0.01，寬度比 σ 大於0且小於式(15)的 $\bar{\sigma}$ 。均為有效

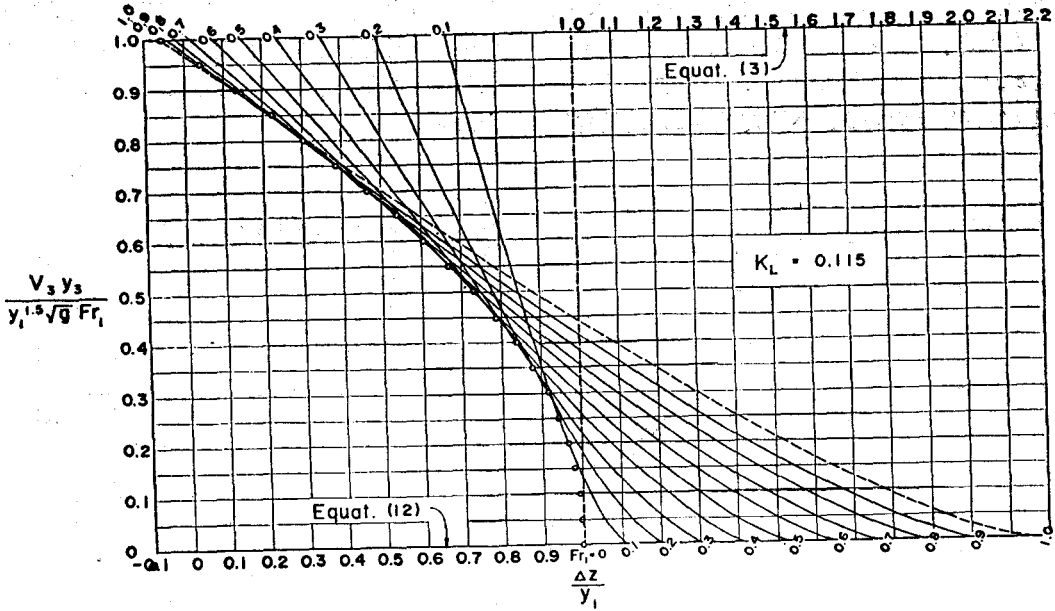
數據。圖九至圖十一，圖十三至圖十五只是根據有效數據的計算結果繪畫而成的。此外，非均勻流動水頭損失係數的單獨影響另分別展示於圖十二與圖十六。



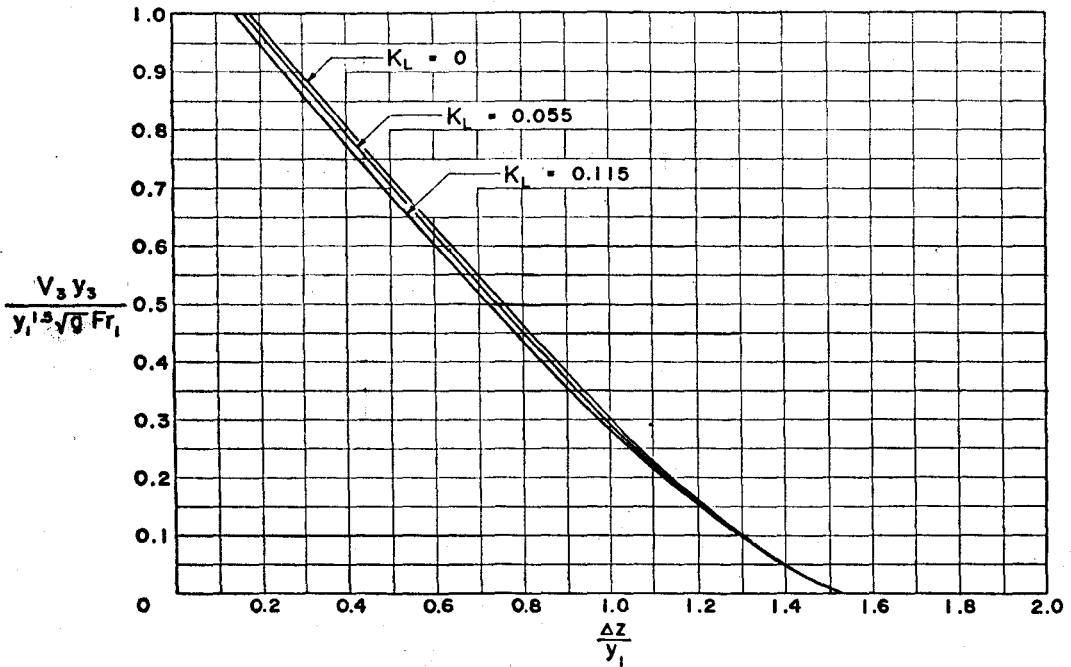
圖九 渠底上升阻塞後之流量變化



圖十 渠底上升阻塞後之流量變化



圖十一 渠底上升阻塞後之流量變化



圖十二 渠底上升阻塞後之流量變化

四、結果與討論

配合第三章的數值計算，結果與討論分為兩部份：一是阻塞的臨界條件，包括阻塞的開始與完全阻塞；二是部份阻塞後的流況分析。

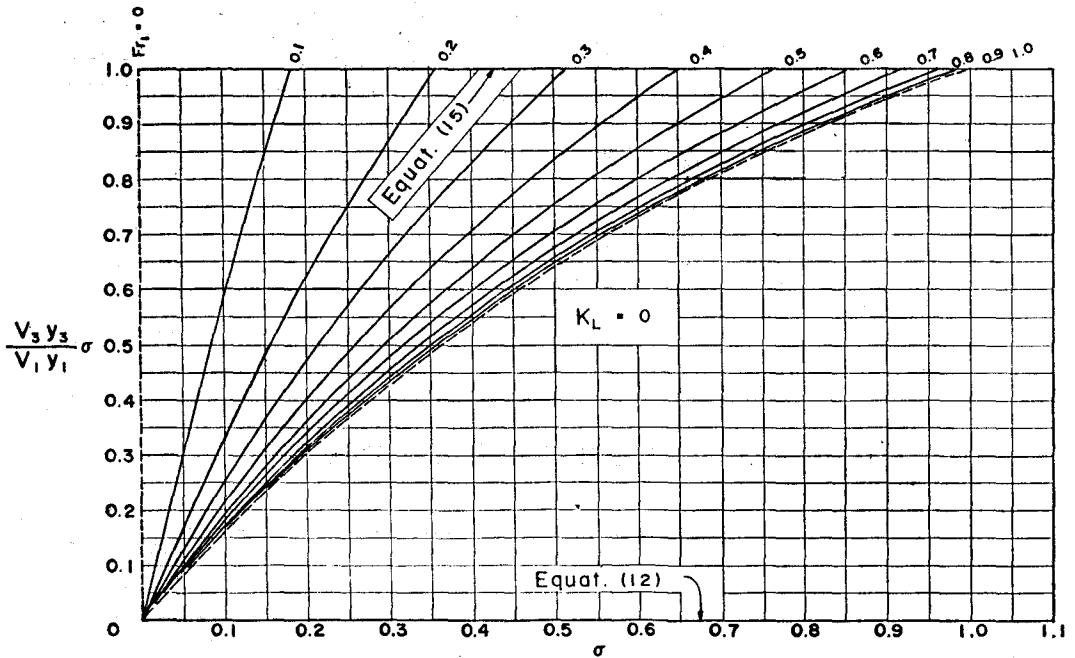
一、阻塞的界限分析

如上章所示，渠底上升或渠寬收縮而導致的流量變化都同樣地可分成無阻塞 (No choking)、部份阻塞 (Part choking) 與完全阻塞 (Complete choking) 等三種不同的情形。部份阻塞

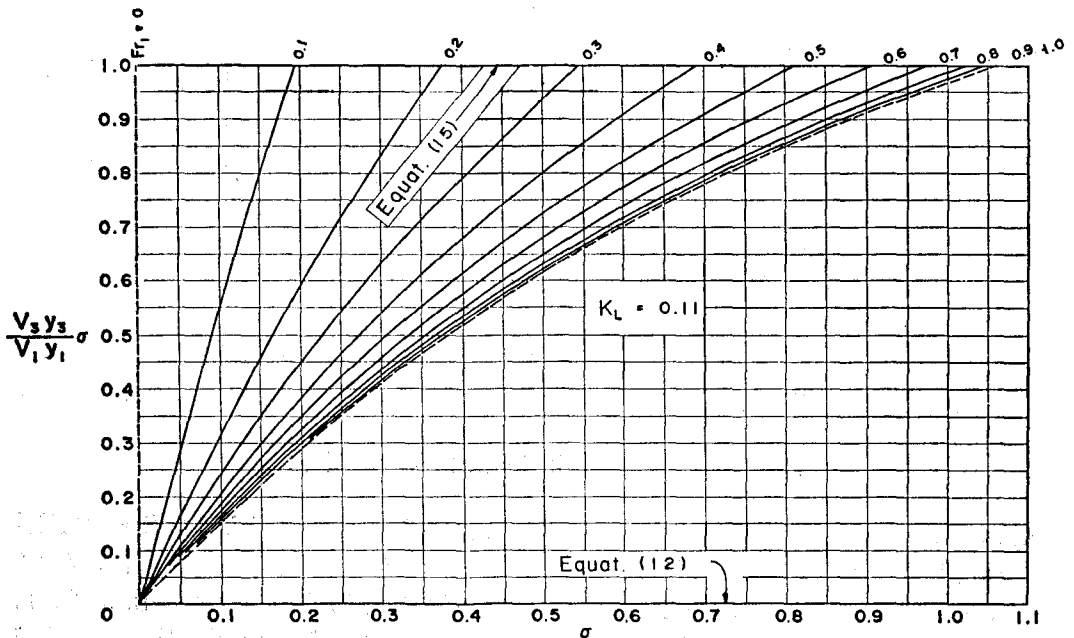
與完全阻塞，無阻塞與部份阻塞間的分界線分別以粗實線與實線展示於圖七與圖八。

渠底上升時，部份阻塞與完全阻塞的界限為式(12)上游 Froude 數非 0 與 1 的結果可直接計算求得，但等於 0 與 1 的兩個端點係由解析求得。上游

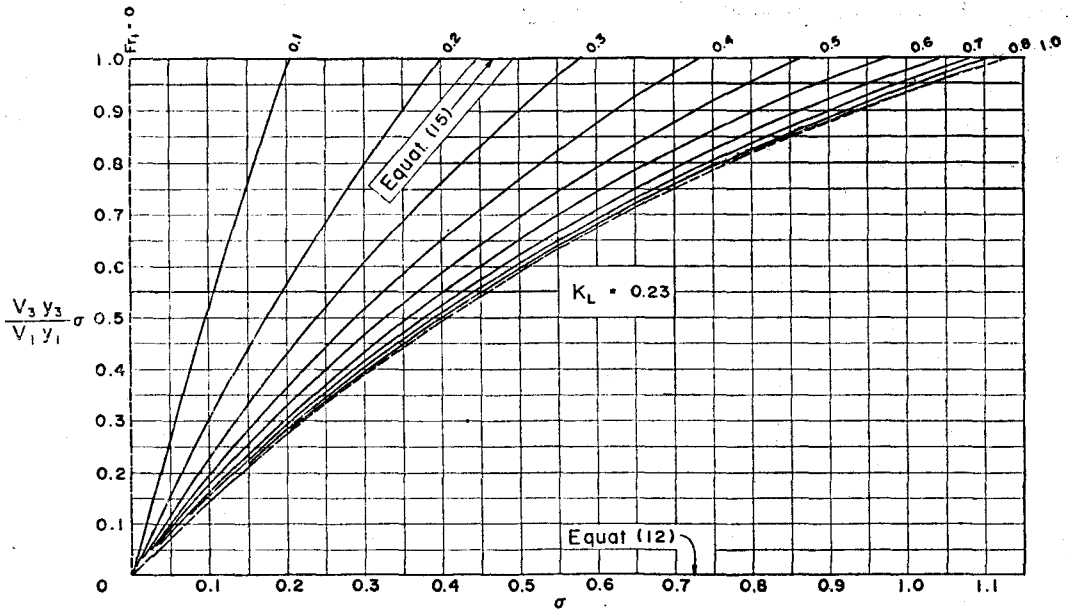
Froude 數 Fr_1 等於 0 時，式(12)有三個根，-1、1 與 -1。因完全阻塞時，渠底上升的最大高度 Δz_{max} 即為湧後的最大深度 y_{2max} ，渠底上升的最大高度 Δz_{max} 與上游深度 y_1 間的比值也因此就等於 1，同時由於比值必須大於 0，故吾



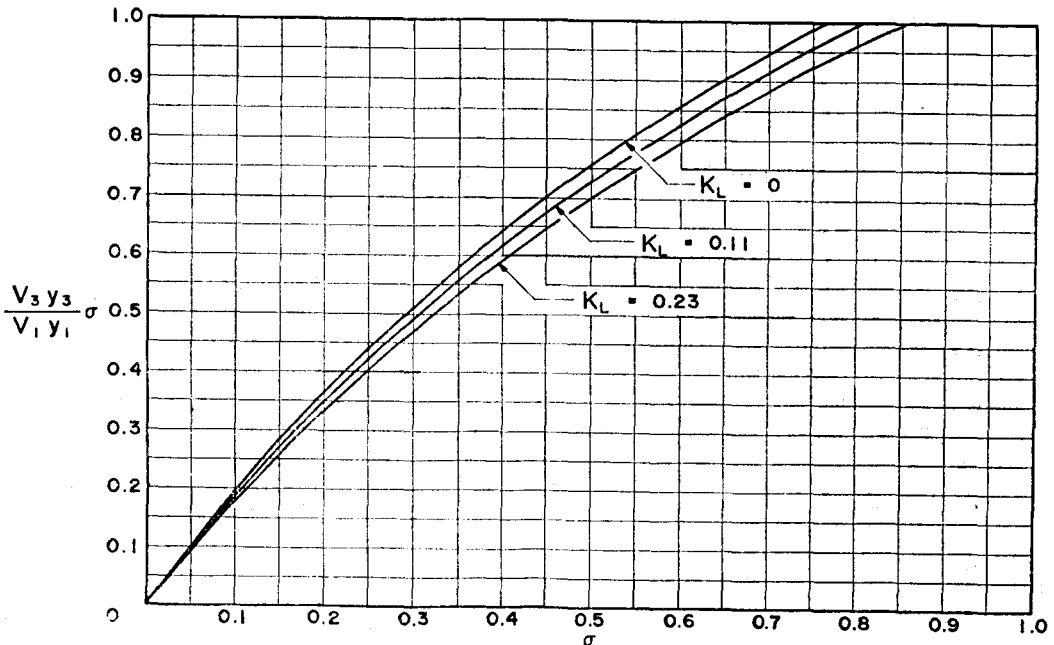
圖十三 渠寬收縮阻塞後之流量變化



圖十四 渠寬收縮阻塞後之流量變化



圖十五 渠寬收縮阻塞後之流量變化



圖十六 渠寬收縮阻塞後之流量變化

人取正根1而不取負根-1。上游 Froude 數等於零代表相對於渠底的總水頭只含壓力頭 y_1 而無速度頭，所以渠底只須上升到這個高度 y_1 就可完全阻塞渠道內的水流了。但是一旦上游 Froude 數大於零，渠底的上升高度還須額外克服來自速度

頭的有效水頭，才能完全阻塞水流，故此時的比值 $\Delta z_{max}/y_1$ 就不再等於1了，同時隨着上游 Froude 數的增加而遞增，如圖七的粗實線所示。另一個端點為上游 Froude 數等於1，此時的比值 $\Delta z_{max}/y_1$ 等於 2.17008。此外，式(12)的導

數可反映介於兩端點間的函數形式，由式(2)，吾人得知：

$$\frac{d}{dy_1} \left(\frac{\Delta z_{max}}{y_1} \right) = 4 (\Delta z_{max}/y_1)^2 \sqrt{0.5(\Delta z_{max}/y_1 + 1) / (\Delta z_{max}/y_1)} / [2 (\Delta z_{max}/y_1)^2 + \Delta z_{max}/y_1 + 1] \dots\dots\dots(20)$$

上游 Froude 數趨近於 0 時，式(2)顯示值 $\Delta z_{max}/y_1$ 趨近於 1，故式(20)的值也跟着趨近於 1，由此吾人得知，粗實線在點 $Fr_1 = 0, \Delta z_{max}/y_1 = 0$ 上的切線為四十五度線，如虛線所示。在這點上，式(20)的值為最小，而後隨着上游 Froude 數的增加，比值 $\Delta z_{max}/y_1$ 的值跟着增加，式(20)的值也因此隨着增加，致使斜率愈來愈陡，故粗實線位於四十五度線的上方。粗實線的上方代表完全阻塞，而下方則為部份阻塞。此外，渠寬收縮的情形就簡單多了。寬度比 σ 等於 0 代表完全阻塞，這相當於圖八的水平座標軸。不論是渠底上升或渠寬收縮，圖七與圖八都顯示部份阻塞與完全阻塞的分界線（粗實線）都與非均勻流動水頭損失無關。這是早在意料之中，因為完全阻塞時，渠道內的水成靜止，水頭損失當然等於零，也就無非均勻流動損失而言。

式(3)代表渠底上升時，無阻塞與部份阻塞的分界或阻塞的開始，其結果以實線（非粗實線）展示於圖上。不論非均勻流動水頭損失係數 K_L 的多寡，上游 Froude 數 Fr_1 趨近於 0 時，渠底上升的臨界高度與上游深度間的比值 $\Delta z_c/y_1$ 均等於 1，而且其切線斜率也都等於九十度。此外，水頭損失係數的大小也不影響實線的變化傾向。但是在臨界高度的相對比值 $\Delta z_c/y_1$ 隨着上游 Froude 數自 0 增到 1 的過程中，第三項 $-(3 + K_L) Fr_1^{2/3}$ 的遞減量遠超過於第二項 Fr_1 的遞增量，所以式(3)呈遞減。除了在這一點上，比值 $\Delta z_c/y_1$ 不受影響外，其餘的都受水頭損失係數 K_L 的影響，而且其影響程度隨着上游 Froude 數的增加而遞增，尤以上游 Froude 數等於 1 時的情形最為顯著，此時 $\Delta z_c/y_1 = \frac{1}{2} \times [3 - (3 + K_L)] = -\frac{K_L}{2}$ 。上述水頭損失係數 K_L 對比值 $\Delta z_c/y_1$ 的大小之影響，可引用第二章的分析以了解其意義。由第二章，吾人得知若渠底上升的高程超過某一限度，上游流況就開始受渠底上升的影響，而此臨界條件為在漸變段的流況轉變為臨界流。這可來自上游流況已是臨界流，只須稍稍提升渠底高程即可阻塞水流，或上游流況只為次臨界流但未達臨界流，

則此時必須藉助於渠底上升，才能使流況由次臨界流轉變為臨界流。以上述的第一種情形為例，若水頭損失係數 K_L 等於零且渠底上升的幅度非常小，幾乎等於 0，則上游 Froude 數必須等於 1 才能使流況受阻。在同樣的情形下，若非均勻流動水頭損失必須予以考慮，即水頭損失係數不再等於 0，則圖七的實線顯示上游 Froude 數就無須再高到等於 1 時，上游流況才開始受影響或在漸變段的流況才開始形成臨界流；因為上游 Froude 數等於 1 時，臨界高度的相對比值 $\Delta z_c/y_1$ 不再等於 0，已經變為小於 0，這相當於渠底下降而不是上升。此時，水頭損失係數等於 $0.11/2 = 0.055$ 與 $0.23/2 = 0.115$ 時的對應比值 $\Delta z_c/y_1$ 分別等於 -0.0275 與 -0.0575 。小於 0 的比值不具任何實質意義，因此臨界高度的相對比值 $\Delta z_c/y_1$ 必須大於或等於 0，而比值等於 0 時，對應的上游 Froude 數可由式(3)求得，即：

$$0 = 2 + Fr_1^2 - (3 + K_L) Fr_1^{2/3} \dots\dots\dots(21)$$

由式(21)吾人得知水頭損失係數 K_L 等於 0.055 與 0.115 時，對應的上游 Froude 數分別等於 0.8126507569 與 0.7389385987。另一情形，若上游流況為次臨界流，為了促使在漸變段內的流況轉變為臨界流，因而開始阻塞水流並影響上游流況，則吾人可提升渠底高度。但圖七的實線顯示所需提高的幅度隨着水頭損失係數的增加而下降。以上游 Froude 數 $Fr_1 = 0.5$ 為例， $K_L = 0, 0.055$ 與 0.115 時，上述所需的渠底上升高度分別等於 0.1800592126, 0.1627352981 與 0.1438364824。總而言之，除了受上游流況與渠底上升高度的影響外，上游流況何時開始受阻也同時視水頭損失係數 K_L 的值而定，而其影響可分為兩種情形。就第一種情形而言，非均勻流動水頭損失的影響為降低上游 Froude 數，而第二種情形則為減小所需的渠底上升高度。兩者的說法雖然不相同，但是所指的都是同一現象，這就是非均勻流動水頭損失額外地消耗了在漸變段內的有效水頭。

渠寬收縮時，無阻塞與部份阻塞的分界可由式(15)求得，其結果以實線（非粗實線）展示於圖八。

同樣地，無論非均勻流動水頭損失係數 K_L 的值等於多少，上游 Froude 數 Fr_1 趨近於 0 時，渠道的臨界寬度比 σ_c 等於 0；但是在這點上的切線斜率卻不等於同一值，視水頭損失係數的大小而定。式(15)的導數為：

$$\frac{d\sigma_c}{dFr_1} = (1 - Fr_1^2) \left(-\frac{3}{2} + \frac{K_L}{2} \right)^{3/2} / (1 + Fr_1^2)^{5/2} \dots\dots\dots(22)$$

由式(22)吾人得知，水頭損失係數 K_L 等於 0、0.11 與 0.23 時，在點 ($Fr_1 = 0, \sigma_c = 0$) 上對應的導數分別等於 1.837117307、1.939079388 與 2.052384802。此外，式(22)同時顯示等號右邊的值隨着上游 Froude 數的增加而遞減，上游 Froude 數等於 1 時，切線斜率為最小而呈水平。但是就整體而言，水頭損失係數的大小並不影響實線的變化傾向。

臨界寬度比 σ_c 隨着上游 Froude 數的增加而遞增，這種變化充分地反映於式(15)的函數型式。除了在上游 Froude 數等於 0 的點外，臨界寬度比的大小都受水頭損失係數 K_L 的影響，而且其影響幅度隨着上游 Froude 數的增加而遞增，尤以上游 Froude 數等於 1 時的情形最為顯著，此時 $\sigma_c =$

$$\left[1^2 \left(-\frac{3}{2} + \frac{K_L}{2} \right)^3 / \left(1 + \frac{1}{2} \times 1 \right)^3 \right]^{1/2} = (1 + \frac{K_L}{2})^{3/2}$$

同樣地，上述水頭損失係數 K_L 對臨界寬度比 σ_c 的大小之影響，可引用第二章的分析以了解其意義。若渠道的寬度比小於某一程度，上游流況就開始受渠寬收縮的影響，而此臨界條件仍為在漸變段的流況轉變為臨界流。這可歸之於上游流況已經是臨界流了，那就只須稍稍收縮渠道寬度就足以阻塞水流了；或上游流況只是次臨界流而已並未達臨界流，則此時必須藉助於渠寬收縮才會使流況由次臨界流轉變為臨界流，因而導致阻塞水流。以上述的第一種情形為例，若水頭損失係數 K_L 等於零，且渠寬收縮的幅度非常小幾乎等於 0，則上游 Froude 數必須等於 1 才能影響上游流況。今在同樣的情形下，若非均勻流動水頭損失必須予以考慮，水頭損失係數不可再視為 0，則圖八的實線顯示上游 Froude 數根本沒有必要高到等於 1 時，上游流況就開始受渠寬收縮的影響或在漸變段的流況就開始形成臨界流，因為在這個情況下，臨界寬度比 σ_c 已不再等於 1，而是大於 1，表示渠寬擴大。此時，水頭損失係數等於 0.11 與 0.23 時，對應的臨界寬度比分別等於 1.0555011127 與

1.1171766782。大於 1 的臨界寬度比失去討論的意義，因此臨界寬度比必須小於或等於 1，而寬度比等於 1 時的對應 Froude 數須符合式(15)，此式顯示水頭損失係數 K_L 等於 0.11 與 0.23 時，對應的上游 Froude 數分別等於 0.7439971924 與 0.6489935303。另一種情形，若上游流況屬於次臨界流，為了促使在漸變段內的流況轉變為臨界流，由此而開始阻塞水流並影響上游流況，則吾人可收縮渠道寬度。可是圖八的實線變化顯示所需收縮的幅度隨着水頭損失係數的增加而遞減，即臨界寬度比 σ_c 增大。以上游 Froude 數 $Fr_1 = 0.5$ 為例， $K_L = 0、0.11$ 與 0.23 時，臨界寬度比分別等於 0.7698003589、0.8125251466 與 0.860003088。總之，除了決定於上游流況與渠寬收縮幅度外，上游流況何時開始受阻也同時視水頭損失係數 K_L 的大小而定，而其影響也同樣地可分為兩種情形。以第一種情形而言，非均勻流動水頭損失的影響也是降低上游的 Fr_1 數，而第二種情形却為減小所需的渠寬收縮幅度。說法雖不一致，但是都是基於同一原因，這就是非均勻流動水頭損失額外地消耗了在漸變段的有效水頭。

二、部份阻塞的流況分析

改變渠道的幾何因素，可能導致其內的流量受阻，並影響漸變段前的上游流況。從前章的討論吾人得知，形成此現象的先決條件為漸變段的流況須首先由次臨界流轉變為臨界流。一般而言，幾何因素的改變方式以渠底上升與渠寬收縮為最常見。雖然超過了某一限度後，這兩種方式都同樣地會阻塞渠道內的流動且影響上游流況，但是影響的程度與結果並不盡相同，故分別討論於下。

(一) 渠底上升

部份阻塞時的流量變化展示於圖九至圖十一，分別對應於非均勻流動水頭損失係數 K_L 的值等於 0、0.055 與 0.115，且以上游 Froude 數 Fr_1 為參數，而水頭損失係數 K_L 對流量變化的單獨影響則另表示於圖十二，圖上的水平與垂直座標軸分別為 $\Delta z/y_1$ 與 $y_3 V_3 / (y_1^{1.5} \sqrt{g Fr_1})$ 。無因次變數 $\Delta z/y_1$ 代表相對於上游深度 y_1 的上升高度 Δz ，而無因次變數 $y_3 V_3 / y_1^{1.5} \sqrt{g Fr_1}$ (或 $y_3 V_3 / (y_1 V_1)$) 為相對於上游流量 $y_1 V_1$ ，通過漸變段的流量 $y_3 V_3$ ，參閱圖五。由於流量受阻後，在漸變段內與其後的流況均須為臨界流，即 $V_3 = \sqrt{g y_3}$ ，垂直座標軸的另一形式可轉換為 $(y_3/y_1)^{1.5} / Fr_1$

，故除了代表受阻後在漸變段內的流量變化外，垂直座標軸也同時代表受阻後的深度變化。

無因次變數 $y_3V_3/(y_1^{1.5}\sqrt{gFr_1})$ 等於 1 的水平線代表通過漸變段的流量 y_3V_3 並未受阻，仍然等於在漸變段前的上游流量 y_1V_1 ，參閱圖五。所以變數 $y_3V_3/(y_1^{1.5}\sqrt{gFr_1})$ 等於 1 的水平線實際上就是式(3)。由此，吾人得知展示於圖九至圖十一的等 Froude 數 Fr_1 線與此水平線之交點，其水平座標 $\Delta z/y_1$ 即為 $\Delta z_c/y_1$ 。此外，代表完全阻塞的水平線就相當於無因次變數 $y_3V_3/(y_1^{1.5}\sqrt{gFr_1})$ 等於 0，即式(2)。由已知的上游 Froude 數 Fr_1 ，吾人可由式(2)求得對應的湧後深度 y_2 ($y_2 = y_{2max}$)，此深度與上游深度 y_1 間的比值 y_2/y_1 正是等 Froude 數 Fr_1 線與此水平線 ($y_3V_3/(y_1^{1.5}\sqrt{gFr_1}) = 0$) 的交點之水平座標。除了上述兩條水平線與等 Froude 數的交點外，其餘的九條等 Froude 數線 ($Fr_1 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 0.8$ 與 0.9) 都是由數值計算求得的，並以實線表示，參閱第三章。綜觀圖九至圖十一的等 Froude 數線，實線的分佈都呈現相同的傾向，渠底上升形成部份阻塞時，通過漸變段的流量隨着上升高度 $\Delta z/y_1$ 的增加而遞減。渠底上升的幅度介於式(3)的 Δz_c 與式(2)的 y_{2max} 之間時，則通過漸變段的流量 y_3V_3 與上游流量 y_1V_1 間的比值自 1 減為 0。渠底上升的幅度 Δz 愈大，渠道受阻的程度也就愈大，通過的流量自然跟着減小，這就說明了為何通過漸變段的相對流量自 1 降為 0。

圖九至圖十一是以無因次變數 $\Delta z/y_1$ 與 $y_3V_3/(y_1^{1.5}\sqrt{gFr_1})$ (或 y_3V_3/y_1V_1) 為座標軸，根據這兩個變數的形式，部份阻塞時的控制方程式(5)、(6)、(7)、(8)與(9)可合併簡化為下列的聯立方程式；為了書寫方便，令 $Y_u = y_3V_3/(y_1^{1.5}\sqrt{gFr_1})$ ， $X_u = \Delta z/y_1$ ，右下註脚 'u' 代表渠底上升。

$$Y_u = \frac{y_2}{y_1} - \left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) \frac{1}{Fr_1} \times \sqrt{\frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \cdot \left(\frac{y_2}{y_1} + 1\right)} \dots\dots\dots(23)$$

$$\frac{y_2}{y_1} + \frac{1}{2} \frac{Y_u^2 Fr_1^2}{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2} = Y_u^{2/3} Fr_1^{2/3} \times \left(\frac{3}{2} + \frac{K_L}{2}\right) + X_u \dots\dots\dots(24)$$

如第三章所述，上述 Froude 數 Fr_1 等於 0 與 1

的兩條等 Froude 數線 (以虛線示於圖九至圖十一) 並不像其他值的等 Froude 數線一樣，由上述的控制方程式計算而得，而是由式(23)與(24)解析求得的。上游 Froude 數等於 0 時，由式(23)吾人首先得知 $y_2/y_1 = 1$ ，而後再由式(24)又得知 $X_u = y_2/y_1$ ，即 $X_u = \Delta z/y_1 = 1$ ，故 $\Delta z/y_1 = 1$ 的垂直線代表上游 Froude 數等於 0 的等 Froude 數線；同時此垂直線與非均勻流水動頭損失係數 K_L 的大小無關。其次，除了兩個端點 $Y_u = 0$ 與 $Y_u = 1$ 外，類似於計算其他值的等 Froude 數線，利用簡化前的控制方程式或簡化後的方程式(23)與(24)，吾人同樣可求得上游 Froude 數 Fr_1 等於 1 的等 Froude 數線。在此線上，左端點的垂直座標等於 1，令 $Y_u = 1$ ，則式(23)可簡化成以 y_2/y_1 為未知數的三次方程式，其根為 1、1 與 -2，取正根 $y_2/y_1 = 1$ 後，再代入式(24)，吾人可得左端點的水平座標等於 $\frac{K_L}{2}$ ；在右端點 ($Y_u = 0$) 上，吾人首先將式(24)簡化為 $X_u = y_2/y_1$ ，利用此關係，式(23)就可再簡化為：

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 1 = 0 \dots\dots\dots(25)$$

由式(25)吾人求得，最接近上游深度 y_1 的第一根等於 2.170043，故右端點的水平座標就等於 2.170043。針對上游 Froude 數等於 1 的等 Froude 數而言，由上述的分析，吾人得知非均勻流動水頭損失係數 K_L 的大小只影響左端點的位置，但不影響右端點的位置。參閱圖九至圖十一的左上方，比較等 Froude 數線的移動情形，吾人發現受了非均勻流動水頭損失係數 K_L 的影響，左上方的等 Froude 數線會因係數 K_L 值的增加而逐漸往左移，一旦超過了垂直座標軸，渠底變成下降而不是上升，就不再有實質意義，成為無意義的解域 (Solution field)，域的範圍也同時隨之擴大。其實，由於水頭損失係數的增加，等 Froude 數線逐漸往左移與圖七的實線漸次往下移是一樣的，只不過展示的形式不相同而已。此外，式(23)與(24)除了引用於上述的解析外，還可用於求包羅線 (Envelope)。圖九至圖十一各為一族曲線，以上游 Froude 數 Fr_1 為參數來辨別不同的曲線。展示於圖上的曲線分佈很清楚地顯示有一條同時切於不同曲線的包羅線，而且只有一條且與上游 Froude 數無關。易言之，包羅線不再包含參數 Fr_1 ，故函數關係式對參數 Fr_1 的偏導數必須等

於 0。如果聯立方程式(23)與(24)可消去變數 y_2/y_1 ，那麼包羅線即可利用上述的方法直接求得。目前雖然無法由式(23)與(24)消去變數 y_2/y_1 ，但吾人可將變數 y_2/y_1 視為參數的未知函數，而不再視為獨

立變數。對參數 Fr_1 取偏導數的過程中，也同時須對變數 y_2/y_1 ，取導數再乘以 $d(y_2/y_1)/dFr_1$ 。所以由式(23)與(24)，吾人可分別求得：

$$\frac{d}{dFr_1} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \left(\frac{y_2}{y_1} - Y_u \right) / Fr_1 \left[\left(-1 + \frac{1}{Fr_1} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \times \left(\frac{y_2}{y_1} + 1 \right)} + \left(\frac{y_2}{y_1} - Y_u \right) \times \left(\frac{y_2}{y_1} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \left(\frac{y_2}{y_1} + 1 \right) \right) \dots \dots \dots (26)$$

$$\frac{d}{dFr_1} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) + Y_u^2 Fr_1^2 / \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - Y_u^2 Fr_1^2 / \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^3 \times \frac{d}{dFr_1} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) - \frac{2}{3} Y_u^2 Fr_1^{-1/3} \left(\frac{3}{2} + \frac{K_L}{2} \right) = 0 \dots \dots \dots (27)$$

由式(23)、(24)、(26)與(27)就可求得包羅線，以空心圓標示於圖九至圖十一。包羅線的右端點並不受非均勻流動水頭損失係數 K_L 的影響，其水平與垂直座標始終分別為 1 與 0。但是左端點的水平座標就視水頭損失係數的大小而定，水頭損失係數 K_L 等於 0、0.055 與 0.115 時，左端點的水平座標分別等於 $1.93765092 \cdot 10^{-2}$ 、 $-2.762720679 \cdot 10^{-2}$ 與 $-5.806179036 \cdot 10^{-2}$ 。

標並不受其值的影響。因此，以右端點為共同的基準，整個等 Froude 數線隨着水頭損失係數的增加而逐漸往左移。若渠底上升同樣的相對高度 $\Delta z/y_1$ ，水頭損失係數的值愈大者，表示非均勻流動水頭損失愈大，則餘下用以供輸水的有效水頭也跟着減小，因此通過漸變段的流量也就愈小。圖十二的任一垂直線都反映此現象，但是這種差距隨着上升高度的增加而逐漸下降，直到完全阻塞時就完全消失了。

圖九至圖十一顯示，由式(5)、(6)、(7)、(8)與(9)求得的「解」是落於以下列曲線與直線為界的範圍內： $y_3 V_3 / (y_1^{1.5} \sqrt{g Fr_1}) = 0$ 、 1 、 $Fr_1 = 1$ 、 0 包羅線與 $\Delta z/y_1 = 0$ 。頭兩條水平線為範圍的上、下界，標示通過漸變段的相對流量是介於 0 與 1 之間，又分別代表完全阻塞與部份阻塞的開始。範圍的右界是由上游 Froude 數等於 1 與 0 的兩條等 Froude 數線所組成的折線，前者為範圍的下半段，而後者為上半部。包羅線則為範圍的左界，且以 $\Delta z/y_1 = 0$ 的垂直線為界限。式(5)、(6)、(7)、(8)與(9)之解不會落於折線的右邊，也不會落於包羅線之下，更不能落於垂直座標軸 ($\Delta z/y_1 = 0$) 之左側。座落於範圍之解代表部份阻塞，其流量可由對應的上游 Froude 數 Fr_1 與渠底上升的相對高度 $\Delta z/y_1$ 求得；易言之，決定於等 Froude 數線與垂直線的交點。故上游 Froude 數等於 0 的等 Froude 線不可列為「解」，因為這一條等 Froude 線適巧為經過 $\Delta z/y_1 = 1$ 的垂直線，無法由兩線相交而求得對應的流量。

(二) 渠寬收縮

非均勻流動水頭損失係數 K_L 的值等於 0、0.11 與 0.23 時，部份阻塞的流量變化分別展示於圖十三至圖十五，同樣地以上游 Froude 數 Fr_1 為參數，而水頭損失係數 K_L 對流量變化的單獨影響則示於另一圖十六上，圖上的水平座標軸改為寬度比 σ ，垂直座標軸仍然代表通過漸變段的相對流量，但並不是指單位渠寬的流量，而是指通過整個渠道通水面積的全部流量，所以垂直座標軸改為無因次變數 $y_3 V_3 \sigma / y_1 V_1$ ，參閱圖六。其次，因 $V_3 = \sqrt{g y_3}$ ，故垂直座標軸也同時代表受阻後的深度變化。

圖十二顯示在同一上游 Froude 數的值時，非均勻流動水頭損失係數 K_L 的值對等 Froude 數線的影響，尤以左端點最為顯著，但右端點的座

類似於渠底上升的討論，無因次變數 $y_3 V_3 \sigma / y_1 V_1$ 等於 1 的水平線為部份受阻的上界（或阻塞的開始），所以展示於圖十三至圖十六的等 Froude 數 Fr_1 線與此水面線之交點，其水平座標是由式(15)求得的。以實線表示的九條等 Froude 數線 ($Fr_1 = 0.1$ 、 0.2 、 0.3 、 0.4 、 0.5 、 0.6 、 0.7 、 0.8 與 0.9) 都是由數值計算而得的，參閱第三章；所有的等 Froude 線均凝聚於座標軸的零點，此點正代表完全阻塞。圖十三至圖十五的等 Froude

數線顯示，實線的走向都展示相同的傾向，渠寬收縮形成部份阻塞時，通過漸變段的流量隨着寬度比 σ 的增加而遞增。寬度比介於 0 與 1 時，則通過漸變段的流量 $y_2 V_2 b_2$ 與上游流量 $y_1 V_1 b_1$ 間的比值自 0 增為 1。寬度比 σ 愈大，渠道受阻的程度也就愈小，通過的流量自然跟着增大，故通過漸變段

$$Y_s = \frac{y_2}{y_1} - \left(\frac{y_2}{y_1} - 1 \right) \frac{1}{Fr_1} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y_2}{y_1} \left(\frac{y_2}{y_1} + 1 \right)} \dots \dots \dots (28)$$

$$\sigma = \left\{ Y_s^{2/3} Fr_1^{2/3} \left(\frac{3}{2} + \frac{K_L}{2} \right) / \left[\frac{y_2}{y_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{y_2} \right)^2 Y_s^2 Fr_1^2 \right] \right\}^{3/2} \dots \dots \dots (29)$$

式(28)與(29)用以解析上游 Froude 數等於 0 與 1 的兩條等 Froude 數線。首先為上游 Froude 數等於 1 的等 Froude 數線，除了兩個端點 ($Y_s = 0$ 與 $Y_s = 1$) 外，其餘的均可由未簡化或簡化後的控制方程式求得，如式(28)與(29)，計算的技巧類似於計算上游 Froude 數不等於 0 或 1 的其他等 Froude 數線。其次，右端點的垂直座標等於 1，故令 $Y_s = 1$ ，式(28)可簡化成以 y_2/y_1 為變數的三次方程式，其根為 1、1 與 -2；取正根 $y_2/y_1 = 1$ 後，再代入式(29)就得到一關係式用以描述右端點的水平座標，其形式如式(15)所示，但上游 Froude 數等於 1。最後，由於左端點的垂直座標等於 0，故式(28)與(29)顯示其水平座標也等於 0。由上述的分析，吾人得知非均勻流動水頭損失係數 K_L 的值只影響右端點的位置，但不影響左端點的位置，如圖上的等 Froude 數線所示。此外，吾人同時不難發現，受了非均勻流動水頭損失係數 K_L 的影響，右上方的等 Froude 數線會因水頭損失係數 K_L 的增加而逐漸往右移；一旦超過了標示渠寬收縮與擴大的界限，即寬度比等於 1，渠道寬度變成擴大而不是縮小，就不再有實質意義，而成為無意義的解域，其範圍也同時隨之擴大。這一現象頗類似渠底上升的情形。實際上，由於水頭損失係數的遞增，等 Froude 數線漸次往右移與圖八的實線逐漸往上移是一樣的，只不過表示的形式不相同而已。其次，若上游 Froude 數 Fr_1 等於 0，由式(29)，吾人得知寬度比 σ 等於 0，即為垂直座標軸。

從圖十三至圖十五的展示吾人可發現，由式(5)、(6)、(17)、(18)與(19)求得的「解」是落於以下列曲線與直線為界的範圍內： $y_2 V_2 \sigma / y_1 V_1 = 0、1$ ， $Fr_1 = 1、0$ 與 $\sigma = 1$ 。前兩條水平線為範圍之上、下界，標示通過漸變段的相對流量是介於 0 與 1 之間，同時又分別代表完全阻塞與部份阻塞的開

的相對流量自 0 增為 1。

根據圖十三至圖十六的展示形式，渠寬收縮形成部份阻塞時的控制方程式，(5)、(6)、(17)、(18)與(19)同樣地可予以合併簡化，其結果為一由兩個非線性方程式所組成的聯立方程式，以 $Y_s = y_2 V_2 \sigma / y_1 V_1$ ，即：

始。範圍的右界為上游 Froude 數等於 1 的等 Froude 數線，但不能超過寬度比等於 1 的垂直線；左界為上游 Froude 數等於 0 的等 Froude 數線。由於本文所探討的上游流況僅限於次臨界流，故「解」不會落於右界的右側。座落於範圍內之「解」代表部份阻塞，介於上述兩水平線之間，其流量可由對應的上游 Froude 數 Fr_1 與寬度比 σ 求得，即決定於等 Froude 數線與垂直線的交點，故上游 Froude 數等於 0 的等 Froude 線不可視為「解」，由於這一條等 Froude 線適巧為經過 $\sigma = 0$ 的垂直線，無法由兩線相交而求得對應的流量，但原點除外。

圖十六展示在同一上游 Froude 數的值時，非均勻流動水頭損失係數 K_L 的值對等 Froude 數線的影響，尤以右端點最為顯著，但左端點的位置並不受其值的影響。以左端點的原點為共同的基準，整個等 Froude 數線隨着水頭損失係數的遞增而漸次往右移。以同樣的寬度而言，水頭損失係數的值愈大者，就表示非均勻流動水頭損失愈大，則餘下用以輸水的有效水頭也跟着減小，故通過漸變段的流量也就愈小。圖十六的任一垂直線都呈現此事實，然而這種差距隨着寬度比的減小而逐漸下降，直到完全阻塞時就完全消失。上述的現象完全類似於渠底上升的情形。

五、結 論

不論是渠底上升或渠寬收縮，若改變的幅度超過某一程度，流量就會受阻因而影響上游流況，其先決條件為在漸變段的流況首先須由次臨界流轉變為臨界流。渠底上升導致比能下降，在不影響上游流況的情形下，流況為臨界流時的比能為最小，此時的渠底高度為最大的上升幅度。若上升渠底超過了這個高度，則對應於此上升高度的比能之垂直線

將無法與比能曲線相交。這是形成阻塞的開始。另一方面，渠寬收縮將會使單位寬度流量增加，則對應的比能曲線就跟着往右移，流況變為臨界流時的單位寬度流量為最大；若渠寬再縮小，則對應於這渠寬的單位寬度流量之比能曲線將無法與代表比能的垂直線相交。同樣地，這也是形成阻塞的開始。所以渠道受阻的開始，必須先形成臨界流。由此條件，吾人得知渠底上升或渠寬收縮時，流量開始受阻的臨界條件，分別列於式(3)與(12)。其次，渠道內的流動完全受阻決定於湧後的速度變為零；此時無論是渠底上升或渠寬收縮，完全阻塞的條件均為式(15)。

一旦形成了阻塞，除非是渠底坡度變小，渠道將以最大流量的流況宣洩受阻後的流量，故臨界流一定會形成於漸變段或其後渠道的某一斷面上。在此同時，自漸變段起即刻形成一向上游傳遞的「湧」。湧前與湧後的流況決定於其間的連續方程式與動量方程式。而湧後，漸變段前與漸變段後的流況可由兩斷面間的連續方程式與能量方程式以及上述的臨界流條件求得。總之，受阻後的流況分析包含五個方程式，以供求五個未知數，湧後水深及速度，湧之傳遞速度及漸變段的水深與速度。這五個聯立方程式實際上可合併簡化為兩個非線性方程式。

受阻後的流量變化陳列於圖九至圖十一，圖十三至十五，前系列為渠底上升，而後系列為渠寬收縮。相對於未受阻前的流量，在漸變段的流量變化為圖的垂直座標軸，而水平座標軸視情況而定，渠底上升採用上升的相對比，渠寬收縮改採用寬度比，且以上游 Froude 數 Fr_1 為各簇曲線的參數。每一系列均包括三種情形，分別為非均勻流動水頭損失的典型代表：非均勻流動水頭損失可略而不計，圓角化的幾何變化與直角型的幾何變化。

如圖九至十一所示，若上游 Froude 數與非均勻流動水頭損失係數均保持不變，由於上升的高度愈小，餘下的有效水頭愈小，故以單位寬度計通過漸變段的流量隨着渠底上升高度的增加而遞減。同時，上游 Froude 數以及非均勻流動水頭損失係數的大小都不影響上述的變化傾向，只不過後者影響由式(5)、(6)、(7)、(8)與(9)所求得的解之範圍，其組成為下列直線與曲線。通過垂直座標等於 1 與 0 的兩條水平線（分別代表阻塞的開始與完全阻塞）構成範圍的上、下界，而左界為一包羅線與垂直座標軸但右界為一折線，上半部是上游 Froude

數等於 0 的垂直線，下半部是 Froude 於等於 1 的等 Froude 數線。由於解之形成是來自垂直線與等 Froude 數線的交點，同時本文所探討的場合僅限於上游流況為次臨界流，故解不能落於右界上。以解的範圍而言，只有左界的位置受制於非均勻流動水頭損失係數的多寡，其餘的均不受影響。提高水頭損失係數的值，就會導致包羅線逐漸往左移，因而使部份範圍落於垂直座標的左側，就變成無實質意義了，因為在此範圍內的解並不是代表渠底上升而是代表渠底下降。此外，等 Froude 數線與通過垂直座標等於 1 的水平線的交點，其位置也決定於水頭損失係數的值，參閱式(3)，但與通過垂直座標等於 0 的交點之位置却與水頭損失係數的大小無關。

其次，如果上游 Froude 數與非均勻流動水頭損失係數同樣地也都保持不變，渠寬收縮的計算結果顯示，通過漸變段的相對流量隨着寬度比的增加而遞增，如圖十三至圖十五所示。類似於渠底上升的情形，上游 Froude 數與非均勻流動水頭損失係數的大小均不影響變化的傾向，同時，也僅後者影響由式(5)、(6)、(17)、(18)與(19)所求得的解之範圍。但範圍的形狀與組成就相當不同於渠底上升的情形。通過垂直座標等於 1 的水平線（代表阻塞的開始）仍然為範圍的上界，但下界改為原點，而不是水平座標軸。範圍的左界為一上游 Froude 數等於 0 的等 Froude 數線，而不是一包羅線。此外，因為解同樣是由於垂直線與等 Froude 數線交織而成的，所以，解也不會落於上游 Froude 數等於 1 的垂直線上。而範圍的右界僅為上游 Froude 數等於 1 的等 Froude 數線（在寬度比等於 1 的垂直線之左側部份），而不是由兩條等 Froude 數線所組成的。此外，上游流況為臨界流並不在本文的探討範圍內，故上游 Froude 數等於 1 的等 Froude 數線也不能視為解。就範圍的形成而言，渠寬收縮時，解落於一個形狀為倒三角形的範圍內；但渠底上升時，就變成落於似乎由二個三角形組成的範圍內，上為倒立三角形，下為正立三角形。以非均勻流動水頭損失係數的影響而言，只有範圍的右界受影響，其餘的均保持不變，提高水頭損失係數的值，將會使等 Froude 數線逐漸往右移，因而導致部份範圍落於寬度比等於 1 的右側，這些範圍就不再具實質意義，因為在此範圍內的解並不是代表渠寬收縮而是代表渠寬擴大。此外，等

Froude 數線與通過垂直座標等於 1 的水平線之交點，其位置也同樣受制於水頭損失係數的大小，參閱式(5)。

六、致 謝

淡江大學電腦教學中心之鼎力協助，本論文得以告一段落，作者在此謹致深厚謝意。作者同時更深深感謝水利系助理丘瑞玲小姐不厭其煩地細心抄寫。

參 考 文 獻

1. K. Subramanya. "Flow in Open Channel" (1984), pp. 47-56.
2. 施清吉：梯形渠道之引水探討，臺灣水利季刊，第三十五卷第二期，(1987)，pp. 1-23.
3. Robert F. Allen. "Steady Solution for River Flow," Proc. Am. Soc. Civil Engrs., vol. 106, no. HY4 (April 1980), pp. 608-611.
4. G. Formica. "Esperienze preliminari sulle perdite di carico nei canali devute a cambiamenti di sezione." (Preliminary tests on head losses in channels due to cross-sectional changes), L'Energia elettrica, Milan, vol. 32, no. 7 (July 1955), p. 554.

專營土木、水利、建築等工程

泰 榕 土 木 包 工 業

負責人：曾德廣 地 址：桃園縣觀音鄉中山路一段271號
電 話：(03)4732790

專營土木、水利、建築等工程

開 銘 營 造 有 限 公 司

地址：台南縣永康鄉中華路455號 電話：(06)2329710

專營土木、水利、建築等工程

錦 昌 土 木 包 工 業

地址：台南縣柳營鄉中埕路324號 電話：(06)6220707

專營土木、水利、建築等工程

大 和 營 造 股 份 有 限 公 司

地址：台南縣麻豆鎮中山路128—2號 電話：(06)5722211