

地下水安全出水量線性模式之應用

Applications of Linear Model on Safe Yield of Groundwater

國立臺灣大學農業工程系教授兼農業工程研究中心主任 國立成功大學水利及海洋工程研究所博士班研究生

曹 以 松

許 榮 庭

Yii-Soong Tsao

Rong-Ting Hsu

摘 要

利用有限元素法及線性規劃，本文建立安全出水量線性模式，以推估區域地下水最佳抽水量。模式應用分成兩部份，其一利用位於雲林地區之 190 公頃超量灌溉試驗區資料，分別測試轉換係數 ω 及抽水量目標係數 $\gamma\omega$ 對最佳值的影響。其二針對彰化雲林平原做年安全出水量之推估，並由結果得此區域之地下水年安全抽水量已經低於地下水年補給量約1.3億噸至3.3億噸之間。

Abstract

By Combining finite element method and linear programming, a linear model on safe yield of groundwater was constructed for the estimation of optimal pumpage of regional groundwater. Applications of linear model within this paper were divided into two parts. Firstly, the effects of optimal pumpage introduced by transformation coefficient ω and cost coefficient $\gamma\omega$ of pumping term were discussed with the field data of over-irrigative region of area 195 ha. Secondly, we used linear model to estimate the annual safe yield of groundwater of region Yun-Lin and Chang-hua, and the results showed that annual safe yield of groundwater were 1.3 to 3.3 hundred million tons per year less than annual natural recharge of groundwater.

一、緒 論

地下水層安全出水量推求乃是根據諸多不同的需求水量而有所差別，如工業用水及灌溉用水所設定之用水目標必然不同，又如都市區域地下水與臨海平原之地下水亦有地下水抽水管制上之差異，然而安全出水量最主要之目的當在於如何充分利用水資源。地下水依其水層構造差別主要可以分為受壓水層及非受壓水層，受壓水層僅在上游之水源區與地表連通，而接受地表入滲水之補注；非受壓水層之水層厚度常不及受壓水層，其儲存水量亦容易受

降雨入滲及蒸發散之影響而不穩定。

地下水的流動是藉著水位勢能，因其勢能坡度大都很小，因而水流緩慢，常易造成抽水分佈不均，尤其是下游區域更容易受局部集中抽水的影響，而產生洩降錐。洩降錐的存在將導引地下水流向，在臨海平原區域則容易導致海水入侵地下透水層問題。然而，若使抽水量適當平配於地下水層中，亦即說，在適當地點抽取適量地下水，則可以促使水位勢能形成均勻洩降面，並誘導上游補注水源的流向，而達到充分利用水資源的目的。

就均勻洩降面及水平衡的觀點，地下水層安全出水量將受到下列兩項因素的影響：

(一)補注水源

就水資源保護之觀點，地下水出水量不能超過水層補注量。水層補注量主要有兩類：

天然入滲量：包括河川地入滲水，上游水源補注區入滲水，雨水入滲及半透水層之補注。

人工補注量：利用人工方式，將河水或其他地表水強迫灌入地下透水層，有人工井補注法，水田超量灌溉等。

(二)安全地下水位面

地下水為地層構造的一部份，地下水位之下降使土層的應力增加，導致地盤沉陷。另一方面，沿海平原地下水位若低於海平面水位，將誘導地下水流之逆向流動，亦即海水楔將延伸進入地下透水層而影響地下水的品質。

安全出水量的推求可以根據上列兩項因素，亦即補注水量與水層儲存量。補注水量由上游入滲量及水層流動量而求得，水層儲存量則視有效水位下

降面而推求，這些推求出水量的工作往往必需依賴野外調查，而地下水之流動為不可見，因此野外調查之準確性往往難以評估。

利用平衡原則及線性規劃，以有限元素法模擬地下水在受壓水層中流動情形，當安全水位面及上游補注水量評估完成後，即可應用此線性模式推算地下水層之安全出水量。而這些工作可以在室內進行，並視安全水位面之不同可以推求安全出水量之差異。

二、線性模式的建立

安全出水量數學模式之建立可以分成兩個主要部份：

(一)區域地下水流數值模擬

假設地下水流係等向流動(isotropic aquifer)，流通係數 T (Transmissivity)，貯蓄係數 S (storage coefficient)，透水層之受壓水頭高度 h ，水層抽水量 p ，則受壓水層之地下水流為

$$T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = S \frac{\partial h}{\partial t} + p \quad \dots\dots\dots(1)$$

利用葛爾金殘差理論 (Galerkin's residual formula) 將上式積分

$$\iint [T(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}) - S \frac{\partial h}{\partial t} - p] \tilde{N} d_x d_y = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

其中， $\tilde{N}$ 為形狀函數 (shape function) 亦即殘差理論中之權函數 (weighting function)。

將(2)式對每一個有限元素積分後，得矩陣式為

$$[A] \{h(t_m)\} = -[B] \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} + [F] + [P] \quad \dots\dots\dots(3)$$

其中，

$$[A] = \sum_i T_i \left[\iint \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{N}_k}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tilde{N}_k}{\partial y} d_x d_y \right] \dots\dots\dots(4)$$

$$[F] = \int_p \tilde{N} q_n d_p \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$[P] = P \cdot \delta(x_p, y_p) \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$[B] = \sum_i S_i \left[\iint \tilde{N}_i \cdot \tilde{N}_k d_x d_y \right] \quad \dots\dots\dots(7)$$

(5)式中之 q_n 為邊界流量， Γ 為沿邊界之積分路徑。

(3)式之時間差分項以差分法展開，並令 θ 表示時間差分係數，其中

$$h(t_m) = \theta h(t) + (1-\theta)h(t_0) \quad \dots\dots\dots(8)$$

(8)式代入(3)式後，得修正矩陣式為

$$\{\theta[A] + [B]\} \{h(t)\} = \{[B] - (1-\theta)[A]\} \{h(t_0)\} + [F] - [P] \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\text{令 } [C] = \theta[A] + [B], [D] = [B] - (1 - \theta)[A]$$

$$[E] = [F] - [P]$$

則(9)之簡單矩陣式為

$$[C][h(t)] = [D][h(t_0)] + [E] \dots\dots\dots(10)$$

此時, $h(t)$ 為所欲求解之 t 時刻受壓水頭高度, $t_0 = t - \Delta t$, $h(t_0)$ 為模式之起始條件, 亦為 t_0 時刻受壓水頭高度。

(二) 抽水量最佳分配

安全出水量之目的既在於充份利用水源, 亦即如何分配抽水量。另一方面, 地下水位必須保持在安全水位以上, 且儘可能使水位提高。根據此原則, 設計線性規劃式如下:

$$\text{目標函數 Max. } Z = \sum_{i=1}^n h_i(t) + \gamma \sum_{j=1}^m P_j \dots\dots\dots(11)$$

此目標函數必須滿足地下水流動方程式, 以及上下限制式, (10)式

$$[C][h(t)] = [D][h(t_0)] + [E] \dots\dots\dots(10)$$

$$\text{及 } [h(t)]_{\min} \leq [h(t)] \leq [h(t)]_{\max} \dots\dots\dots(12)$$

$$[P]_{\min} \leq [P] \leq [P]_{\max} \dots\dots\dots(13)$$

(11)式目標函數中 γ 為抽水量權重係數。(10)至(13)式之限制式非線性規劃之標準式, 將之標準化後可得下式:

$$\text{目標函數 Max. } Z = \sum_{i=1}^n h_i^s(t) + \gamma \sum_{j=1}^m P_j^s \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{限制式 } [C][h^s(t)] + [P^s] &= [K] \\ [h^s(t)] &\leq [h^s]_{\max} \\ [P^s] &\leq [P^s]_{\max} \\ h_i^s, P_j^s &\geq 0, i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $h_i^s(t) = h_i(t) - h_{i\min}$, $h_{j\max}^s = h_{i\max} - h_{i\min}$

$$P_j^s = P_j - P_{j\min}, P_{j\max}^s = P_{j\max} - P_{j\min}$$

$$\text{及 } [K] = [D][h(t_0)] - [C][h(t)]_{\min} + [F] - [P]_{\min} \quad (16)$$

現引入轉換係數 ω , 並使 $P_j^w = \frac{P_j^s}{\omega}$

則(14)及(15)標準式之轉換式如下:

$$\text{目標函數 Max. } Z = \sum_{i=1}^n h_i^s(t) + \gamma \omega \sum_{j=1}^m P_j^w \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{限制式 } \frac{1}{\omega} [c][h^s(t)] + [p^w] &= \frac{1}{\omega} [K] \\ [h^s(t)] &\leq [h^s]_{\max} \\ [P^w] &\leq [P^w]_{\max}, h_i^s, p_j^w \geq 0, i=1, 2, 3, \dots, n; j=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (18)$$

1, 2, ..., m

數學模式之流程圖如圖 1 所示。

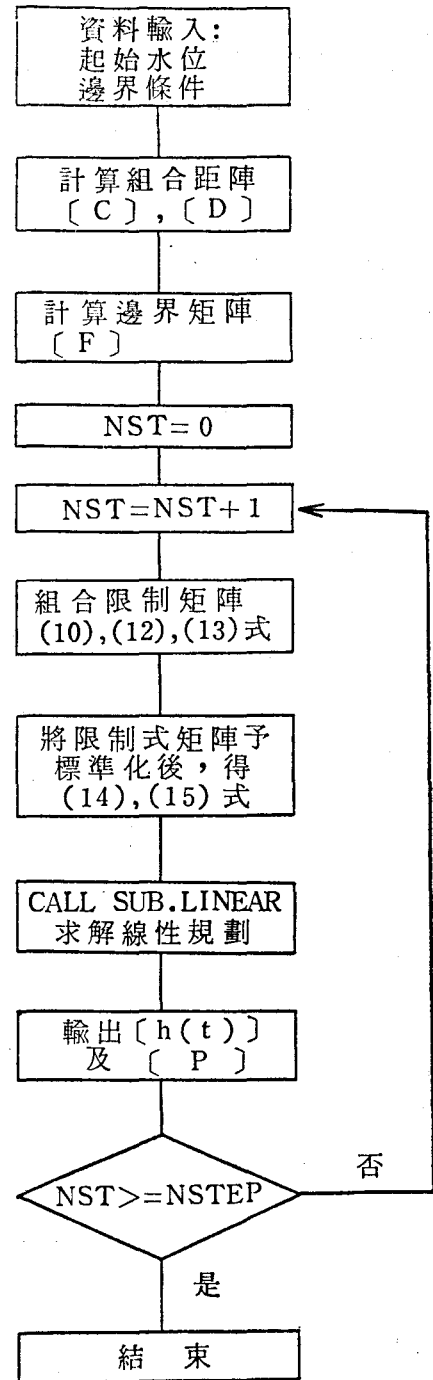


圖 1 安全出水量線性模式流程圖

三、線性模式的應用

對於線性安全出水量數學模式的應用，本文分成兩個部份，並且分別用兩個現地演算結果加以說明。第一部份針對模式建立過程中所引入之轉換係數 ω ，及目標係數中抽水量的權重係數 γ 對推求結果的影響。第二部份為大濁水平原，即彰化雲林平原約1,730平方公里，利用民國73年實測水位資料配合本文線性模式所做年安全出水量的推估。

圖2示雲林平原濁幹線灌溉渠道與鹿場課圳灌

溉渠道之間，一超量灌溉試驗區，影點覆蓋面積為入滲區，約為195公頃，利用有限元素法數值模擬技巧，首先將此區域切割成74個不等面積之三角形元素，並使抽水點均勻分佈於整個區域節點上。本文取安全水位面為起始水位面，亦即使水位不低於起始水位，最高水位則設定為地表高程，地下水位若高過地表高程，水井將呈自流狀態。起始水位取民國73年7月實施超量灌溉期間之觀測水位，示如圖3。

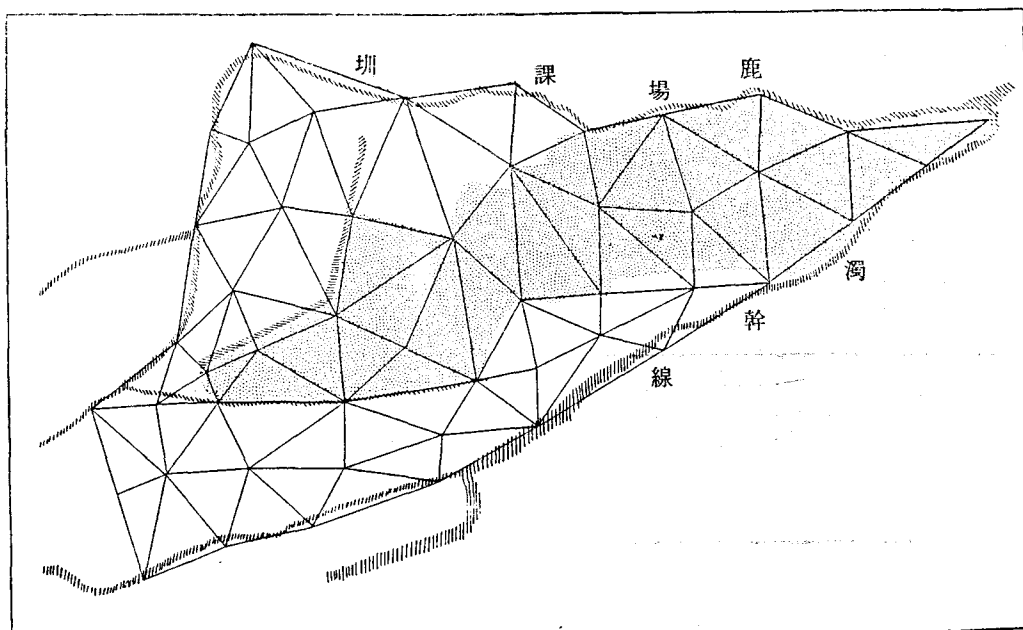


圖3 195公頃試驗區起始水位

模式的應用首先針對轉換係數 ω 值，亦即先固定轉換式(7)目標函數中 r ω 值，並使 ω 由1變化至 10^4 ，如表一所示，計分成5種個案，安全出水量推估值繪如圖4。就平均趨勢而言， ω 值愈大，所推估的安全出水量愈高。就CASE(5)與CASE(1)而言，安全出水量差值在 $2,490\text{m}^3/\text{day}$ 到 $4,260\text{m}^3/\text{day}$ 之間。 ω 之物理意義即將原限制曲面扭曲，使變數 h_i 及 P_j 從等座標空間轉換至不等座標空間， ω 值愈大， P_j 座標也集中，從幾何觀點看， P_j 方向的坡度因 ω 值增加而變陡。由於線性規劃式在尋找最佳解的逐步轉換過程亦可說尋找樞紐轉換(pivoting transformation)，亦即沿最陡坡度方向前進，因而 ω 值的引入有利於使 P_j 由非基底

變數(unbasis)變成基底函數(basis)，而確保推估值接近於最大出水量。

表一 ω 值變化表

編號	$\gamma\omega$	ω
CASE (1)	100,000	1
CASE (2)	100,000	10
CASE (3)	100,000	100
CASE (4)	100,000	1,000
CASE (5)	100,000	10,000

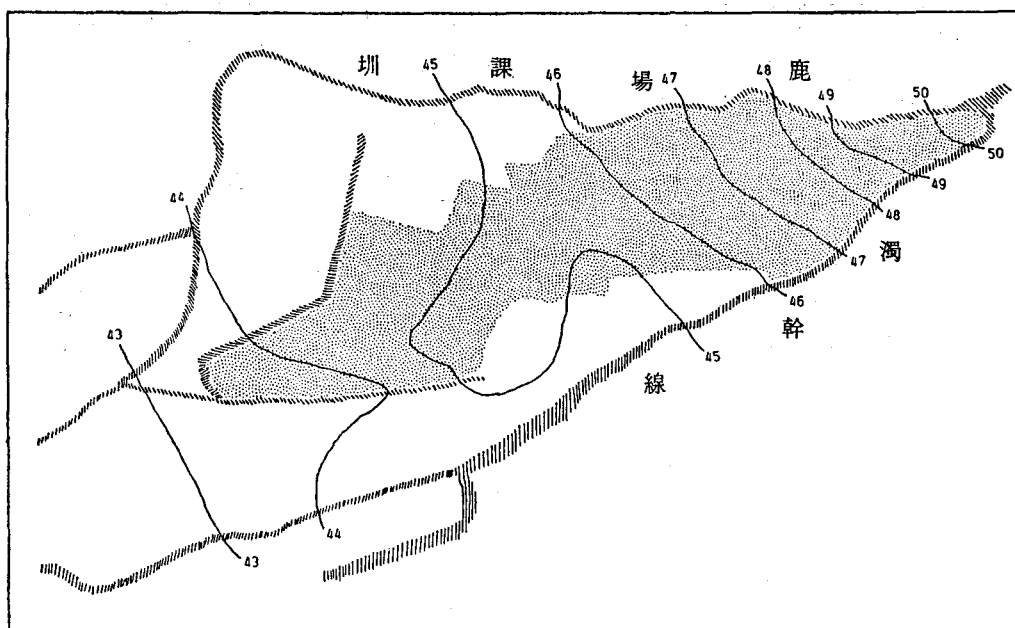


圖 2 195 公頃試驗有限元素分割圖

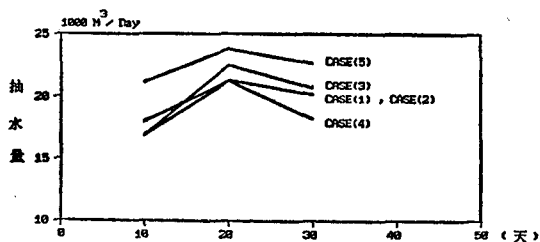


圖 4 不同 ω 值對安全抽水量推求結果的影響

其次，固定 ω 為 10^3 ，使 $\gamma\omega$ 由0.1變化至100，如表二之數值。圖5為此4種個案下，安全出水量推估之比較，其平均趨勢為， $\gamma\omega$ 值愈大，則安全出水量愈大，由(17)式知此為吾人所期許合理的結果。CASE (6)與CASE (8)安全出水量之差值在 $5,100 \text{ m}^3/\text{day}$ 與 $6,969 \text{ m}^3/\text{day}$ 之間，比圖4的

表二 $\gamma\omega$ 值變化表

編號	$\gamma\omega$	ω
CASE (6)	0.1	1,000
CASE (7)	1	1,000
CASE (8)	10	1,000
CASE (9)	100	1,000

$2,490 \text{ m}^3/\text{day}$ 與 $4,260 \text{ m}^3/\text{day}$ 高出 $2,500 \text{ m}^3/\text{day}$ 左右。因此，就此結果而論， ω 值雖然影響安全出水量推求結果，然而目標係數 $\gamma\omega$ 的影響更大於 ω 。

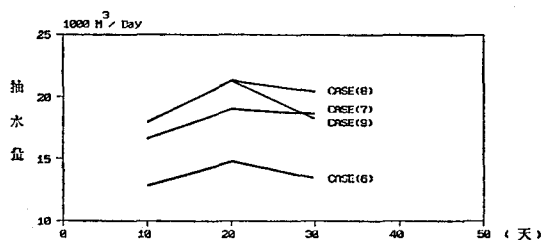


圖 5 不同 $\gamma\omega$ 值對安全出水量推求結果的影響

安全出水量線性模式應用之第二部份為彰化雲林平原年安全出水量的推求。圖6示模式所應用之區域，北至烏溪，南以北港溪為界，西至台灣海峽，東至八卦山台地及斗六丘陵台地，面積約為 $1,762$ 平方公里，分割成 135 個不等面積之三角形有限元素，並在沿海外邊界上外加 22 個元素，以彌補邊界條件之不足。

在前提及地下水層安全出水量兩項重要影響因素為補注水源及安全地下水位面，考慮大區域面積之補注水源時，任何在此面積上均等微小入滲量，對整個面積而言將是一項不可忽略的補注量，因此在推求此大區域之出水量，必須先推估平均雨量。

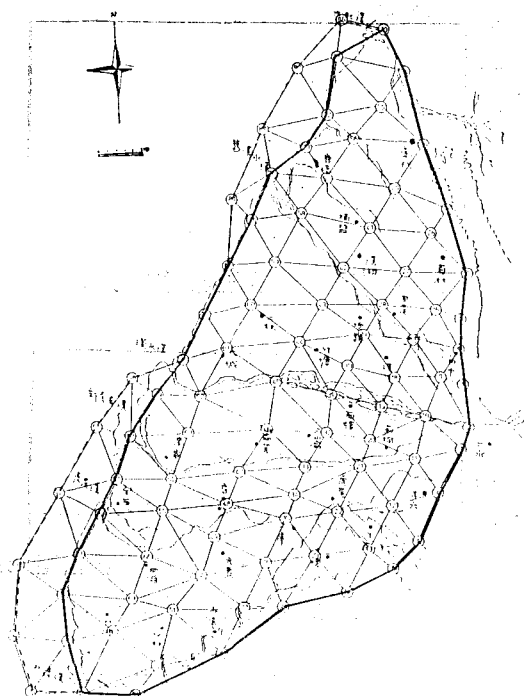


圖 6 彰化雲林平原有限元素分割圖

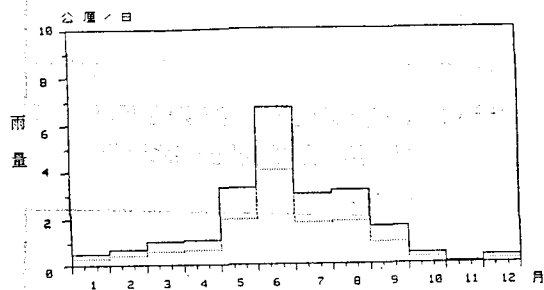


圖 7 歷年平均雨量與入滲深度

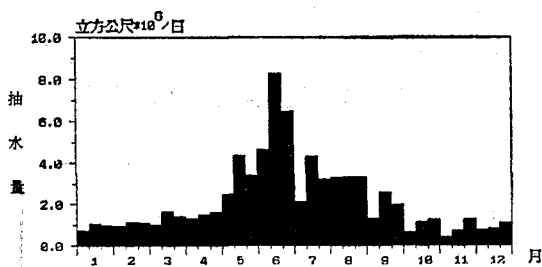


圖 8 彰化雲林平原安全出水量推求結果

依彰化北斗地區歷年之平均月雨量，假設彰化雲林平原之平均月雨量與其相同，並由蒸發散之觀測，約有60%之降雨量入滲，如圖7，實線為平均月雨

量分佈曲線，點線為入滲深度。

取 $\omega=10^4$ ， $\gamma\omega=100$ ，水位之上限仍為地表高程，下限則取民國73年1月至12月實測水位，即各月份之起始水位。各抽水節點之上限為 $200,000\text{m}^3/\text{day}$ ，下限為 $-20,000\text{m}^3/\text{day}$ 。圖8示以旬為單位之安全出水量推求結果，年安全出水總量為7.77億噸，此結果可與歷年來各單位對彰化雲林平原做地下水補給量調查之結果做一比較，如表三。

由表三歷年來調查結果之比較，彰化雲林平原地下水層年補給量以9.0億噸至11.0億噸之期望值最高，本文所推求安全出水量為7.77億噸，顯示彰化雲林平原之可抽取水量已低於年補給量1.3億噸至3.3億噸間。

表三 歷年來對彰化雲林平原做地下水補給量調查結果比較

報品年度	調 查 單 位	結 果 摘 要
民國44年	農復會・水資會・水利局	彰雲平原地下水年補給量9.185億噸
民國52年12月	水利局地下水工程處	彰化平原地下水補給量5.8億噸
民國50年	水利局地下水工程處	彰化雲林平原60~80公尺及110~130公尺之地下透水層年補給量約2.959億噸
民國56年10月	水資會	大濁水平原沖積扇地下水年補給量為7.0億噸
民國59年3月	經合會	彰化平原地下水年補給量為5.2億噸
民國62年	水利局地下水工程處	大濁水平原1,075平方公里面積地下水之年補給量4.54億噸
民國63年2月	水資會農復會	彰化平原地下水之年補給量為6.86億噸
民國74年7月	水利局	由地下水平衡式法推估大濁水平原地下水之年補給量，得民國69年70年及71年之年補給量為10.46億噸，11.79億噸及11.19億噸
民國75年10月	本文	大濁水平原1,762平方公里面積之地下水安全年出水量為7.77億噸

圖9將彰化平原及雲林平原分別再細分成5及6個小分區，圖10至圖20分別為此11分區之安全出水量推求結果

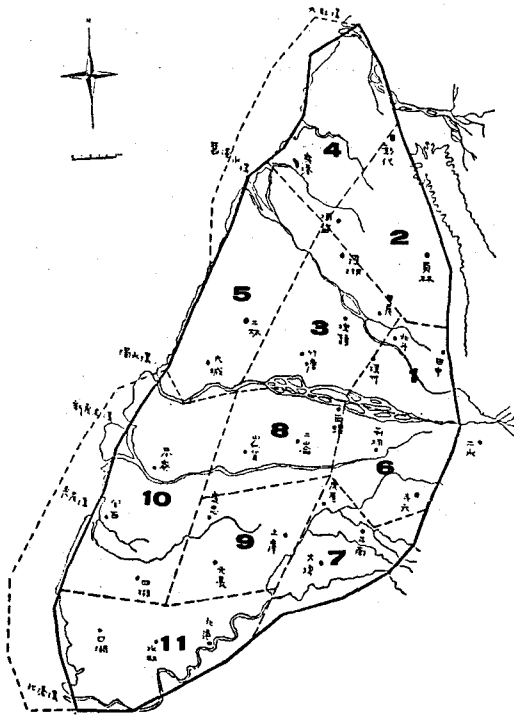


圖9 彰化雲林平原11分區圖

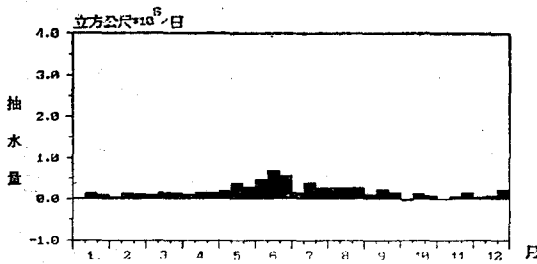


圖10 第1分區年安全出水量分佈

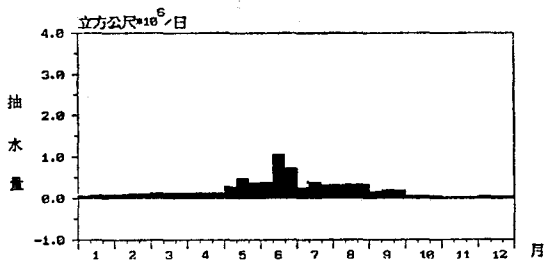


圖11 第2分區年安全出水量分佈

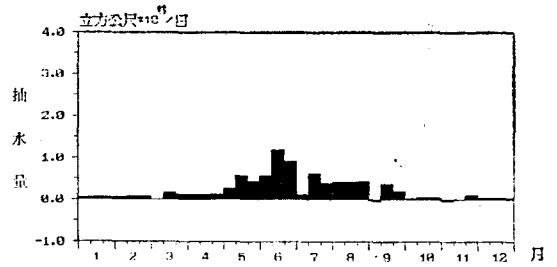


圖12 第3分區年安全出水量分佈

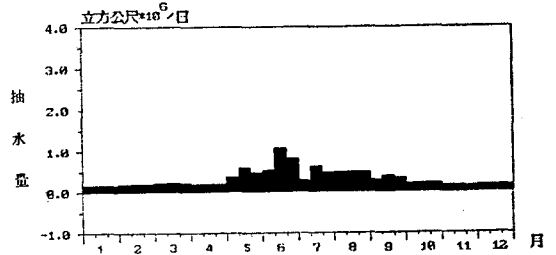


圖13 第4分區年安全出水量分佈

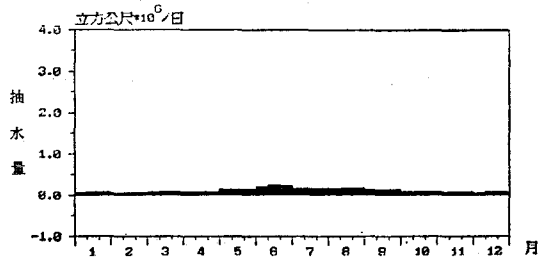


圖14 第5分區年安全出水量分佈

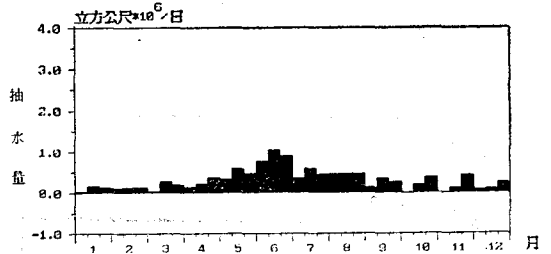


圖15 第6分區年安全出水量分佈

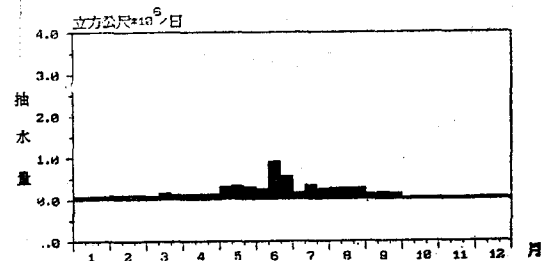


圖16 第7分區年安全出水量分佈

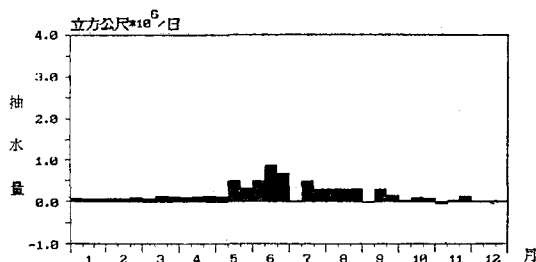


圖17 第8分區年安全出水量分佈

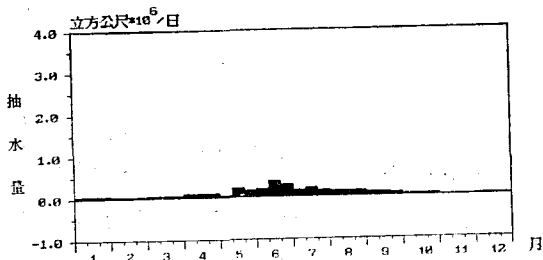


圖18 第9分區年安全出水量分佈

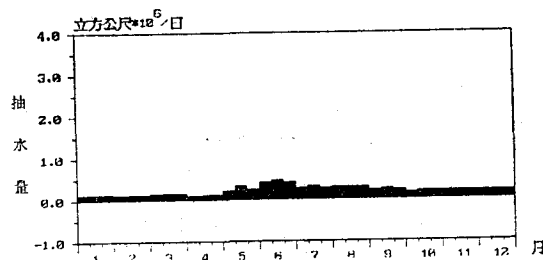


圖19 第10分區年安全出水量分佈

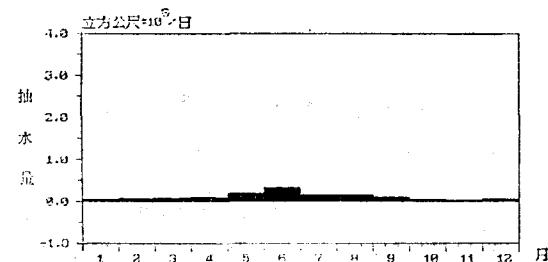


圖20 第11分區年安全出水量分佈

四、結論與建議

利用線性模式做安全抽水量推估，係建立於兩個主要過程：首先以有限元素法建立地下水流動模擬程式，其次利用線性規劃求解最佳抽水量。

線性模式中引入轉換係數 ω ，由應用實例顯示出 ω 有權重效果，即 ω 值愈大最佳抽水量也愈大，然而由應用於195公頃試驗區之結果，當 $\omega \geq 10^6$ 時，線性規劃式將會產生惡化 (degeneration)。 $\gamma\omega$ 表抽水量的目標係數，顯然地， $\gamma\omega$ 值愈大，抽水量也愈高。

在彰化雲林地區應用之結果，得年安全出水量為 7.77 億噸，比歷年來對地下水補給量之 9.0~11.0 億噸/年，少了大約 1.3 至 3.3 億噸/年，亦即安全出水量已在補給量之下。利用本文之模式對地下水管制所應採用之措施，由本文應用實例上所顯示之效果乃至為明顯。

然而線性模式亦有缺點，對於時間效應及時間系列抽水量最佳值的推估，線性模式則無法處理，而使得抽水量最佳值在時間分佈上會出現波峰波谷連接的現象。然而對於推求長期平均趨勢而言，線性模式仍有準確的推估值。

五、參考文獻

1. 曹以松，許榮庭「地下水抽水量反向推求法數學模式導論」台灣水利季刊，Vol. 32(4)，1984
2. 曹以松，許榮庭「地下水抽水量反向推求模式之研究與應用」農工學報，Vol. 31(4)，1985
3. 曹以松等「雲林地區地下水數學模式之研究」，農業工程研究中心 AERC-82-RR-13，民國 71 年。
4. 「集集共同引水計量可行性規劃，二、水源專題報告 4. 水源調蓄運用規劃研究」，台灣省水利局，民國 74 年 7 月
5. 「北斗地區地下水開發灌溉規劃報告」水利局第四規劃調查隊，民國 66 年 6 月。
6. George F. Pinder & William G. Gray "Finite element simulation in surface and subsurface hydrology", 1977
7. Jacob Bear "Hydraulics of groundwater" Page 491~512, 1979.