

# 水庫系統之動態操作模式

## Dynamic Model for Reservoir System Operation

臺灣大學農業工程研究所教授

臺灣大學農業工程研究所碩士、研究所研究助理

易 任  
Jen Yih

吳 文 憲  
Wen-Shiann Wu

### 摘 要

本研究主要目的在探討水庫系統動態操作之應用，因目前一般水庫操作大部份係依據固定之操作規線，配合當時水量及下游需水量，決定該時期之放水量，此種方法雖簡捷而便於應用，但常招致水資源之若干浪費。

水庫操作為一多階段動態序率性之控制問題，欲充分利用水資源，必須能準確預測河川流量，並配合適當之水庫操作模式。本研究之內容包含兩大部分：(一)流量預測模式，(二)漸近優選模式 (Progressive Optimality Algorithm, POA)。首先以自迴歸移動平均 (Autoregressive Moving Average, ARMA) 模式預測流量，視流量為時間系列，以過去之流量資料，推估未來流量。繼以漸近優選模式解求動態操作問題之解答。漸近優選模式為動態規劃改良形式之一，其狀態變數不必離散化 (Discretized)，故可得較準確之解答，且模式未有維度問題，所需要之電腦記憶容量亦小，可有效解求動態規劃之問題。

前述兩模式之運用步驟為先以流量預測模式預測一年之入流量，然後以漸近優選模式定出當年之放水量，俟每月之實際流量觀測得到，再重新預測該月以後之流量，以為放水策略之依據，故此研究有逐月修正誤差之效果。由本研究所確定之放水策略，當較現行之放水策略更具實用性及經濟價值，且漸近優選模式可以兼顧河水之流動時間，故於短期操作可得較準確之結果，因此可使模式適用範圍增大。

### Abstract

This study is devoted to the development and application of reservoir system dynamic operation. At present most of the operating policies of a reservoir are determined by the fixed rule curves which commonly define the discharges at any time of the year and demand for water use and hydropower. Such rule curve has the advantage of concision and convenience, but it can not bring water resources into full efficiency.

Reservoir operation is a multistage dynamic stochastic control problem. The optimal utilization of water resource depends on the accurate forecast of inflows and the suitable reservoir operation

model. This report consists of (1) Streamflow Forecast Model, (2) Progressive Optimality Algorithm (POA). Inflow can be regarded as time series and inflow forecasts are computed by Autoregressive Moving Average (ARMA) model. The POA is a modification of Dynamic Programming (DP). This method is computationally efficient and has minimal storage requirements. Contrary to DP, the state variables do not have to be discretized with this method.

At every beginning of periods (e. g., month), the forecast of inflow is made by ARMA model, and release policies are determined by POA. As inflow forecast is deviated from actual realizations, new forecast is computed and a revised future release policy is developed on the basis of the observed state of the system and update forecast.

From this research, we obtain the conclusion that this model is superior to current operating policies. And POA can take into account the time of water travel between upstream and downstream reservoir. Therefore this model can be suitable for most cases.

## 一、導 論

臺灣地區平均年降雨量約為 2,510 公厘<sup>(8,10)</sup>，雨量堪稱豐沛，由於降雨時間及空間分佈不均，加以河川短且坡降陡峭，故雨水不易涵蓄，為增加可用水量，可在各重要河川適當地點建造水庫，以滿足旱季時各標的用水之所需。除建造水庫外，如何對水庫作有效之操作運用，使水資源發揮最大效用，為最經濟可行之方法。

水庫操作運用為一個多階段動態序率之控制問題<sup>(22)</sup>，其中河川流量及下游需水量均具有序率特性，而傳統之水庫操作所依據之操作規線，係利用模擬法以既有之流量紀錄，根據下游各標之需水量進行模擬，藉試誤法於甚多規線中，選擇較佳者以為操作運用之規線<sup>(12)</sup>。因傳統規線係固定不變，未能配合流量及需水量之序率特性，因而使水資源未能發揮最佳效用。

本研究首先以自迴歸移動平均模式預測流量，再以漸近優選模式決定放水策略，並於每一階段做必要之修正，具有即時操作之效果，以期使水資源有最經濟合理之運用。

## 二、水庫系統操作

### (一) 系統概述

系統之定義<sup>(8,10)</sup>，因研究之領域不同而異，其

意指一組合之事物，相互之間發生作用，而能達成某些特定之目標者。但 Dooge 氏之定義為根據一時間基礎由輸入原因，刺激、質量、能量及資訊轉為輸出，結果、反應、質量、能量及資訊，勿論其型式為真實或抽象，由上述關係所產生之一種程序或機構者，較為完整。

系統大致可以分類如下：

1. 序率 (Stochastic) 系統及定率 (Deterministic) 系統。
2. 線性 (Linear) 系統及非線性 (Nonlinear) 系統
3. 示因 (Causal) 系統及非示因 (Non-causal) 系統。
4. 時變 (Time-variant) 系統及非時變 (Time-invariant) 系統。
5. 集塊 (Lumped) 系統及分佈 (Distributed) 系統。
6. 連續 (Continuous) 系統及間斷 (Discrete) 系統。
7. 瞬時 (Instantaneous) 系統及動態 (Dynamic) 系統。
8. 自然 (Natural) 系統及設計 (Devised) 系統。
9. 黑盒 (Black-box) 系統及結構擬似 (Structure-imitating) 系統。

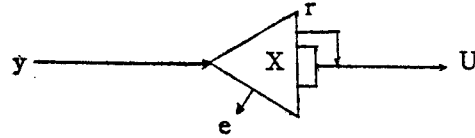
10. 定常性 (Stationary) 系統及非定常性 (Nonstationary) 系統。

(二) 水庫系統 (10, 13, 19, 21, 32, 33)

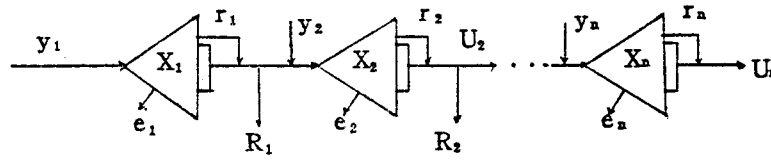
水庫系統具有灌溉、公共給水、環境控制及保

護、魚類與生態保護、航運、水質控制、防洪、水力發電及娛樂觀光等功能。依功能之多寡，可分為單目標水庫系統及多目標水庫系統，而視水庫之多寡及排列方式可分類如下：

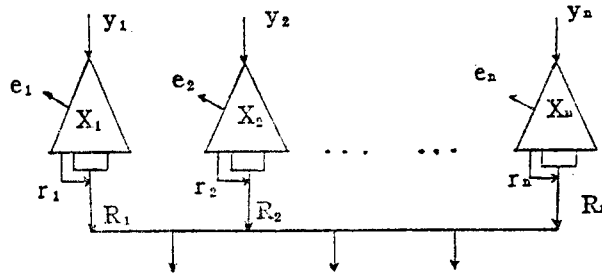
1 單一水庫系統



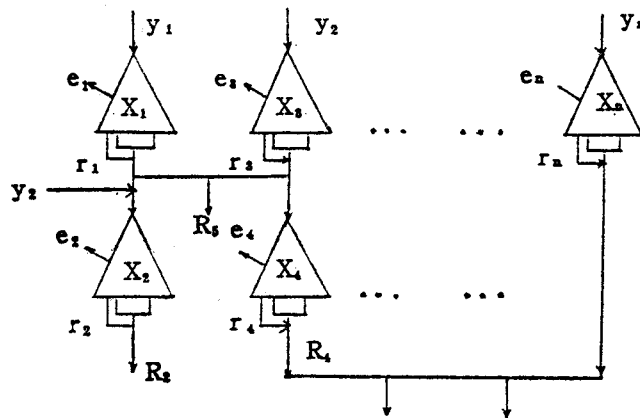
2 串聯水庫系統



3 並聯水庫系統



4 網路水庫系統



〔註〕  $y_i$  : 天然流量  $x_i$  : 蓄水量  $e_i$  : 蒸發量

$r_i$  : 溢流量  $U_i$  : 放水量

(三) 水庫操作模式 (14,22,35)

水庫操作模式可分為四大類型：

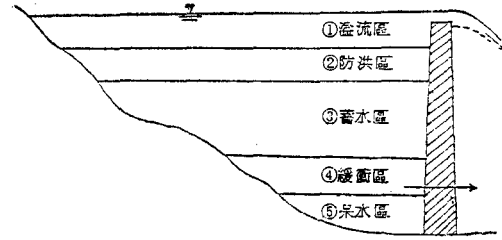
1. 線性規劃模式 (Linear programming, LP)
    - (1) 線性規劃 (LP)。
    - (2) 機率限制線性規劃(Chance-constrained LP)。
    - (3) 序率線性規劃 (Stochastic LP)。
    - (4) 疊代序率規劃 (Stochastic Programming with Recourse)。
  2. 動態規劃模式 (Dynamic Programmig, DP)
    - (1) 動態規劃 (DP)。
    - (2) 增量動態規劃 (Incremental DP, IDP)。
    - (3) 微分動態規劃 (Differential DP, DDP)。
    - (4) 間斷微分動態規劃 (Discrete DDP, DD-DP)。
    - (5) 連續逼近增量動態規劃 (IDP with Successive Approximation)。
    - (6) 信賴度限制動態規劃 (Reliability-Constrained DP)。
    - (7) 漸近優選模式(Progressive Optimality Algorithm, POA)。
  3. 非線性規劃 (Nonlinear Programming, NLP)
  4. 模擬法 (Simulation)
- 除此之外，尚有兩種模式合併使用者，如LP-DP。

(四) 水庫操作規線 (Operation Rule Curve) (12,31)

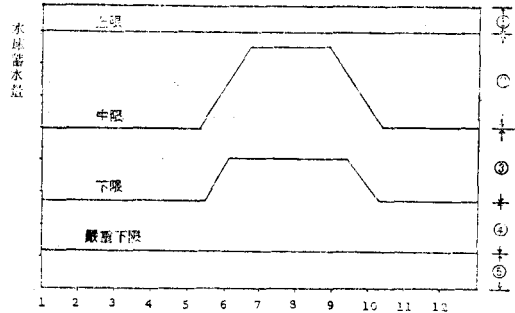
傳統之水庫操作均依據操作規線，決定該時期之放水量及最終蓄水量。

一般水庫蓄水區間可以分成五個部份，如圖(1)及圖(2)，而各區間之意義及放水原則如下：

1. 溢洪區 (Spill Zone): 水庫蓄水量若在此區間，則採用最大溢洪量進行排水，蓄水量必須低於此區之下限，以保護水庫及下游安全。
2. 防洪區 (Flood Control Zone): 蓄水量在此區間，須將進水量儘速排出，保留此區間以容蓄洪水量，亦有學者將此區與溢洪區併為一區。



圖(1) 水庫存水區間示意圖



圖(2) 傳統之水庫操作規線

3. 蓄水區 (Conservation Zone): 水庫蓄水量在此區間，則可滿足各標的之需水量，故水庫蓄水量儘可能保持在此區間。
4. 緩衝區 (Buffer Zone): 枯旱時水庫蓄水量往往在此區間，無法滿足各標的之需水量，故必須以折扣方式供水。
5. 呆水區 (Dead Zone): 水庫蓄水量在此區間，則無法取用，故在嚴重枯旱時即無法供水。

(四) 長期操作 (Long-term) 問題及短期操作 (Short-term) 問題，水庫之操作通常可以分為序率性之長期操作及定率性之短期操作 (14,26,32,33)。長期者可意謂戰略 (Strategic) 問題，而短期者又可意謂戰術 (Tactical) 問題。

戰略問題乃決定基期為旬、月或年不同期距之水庫放水量，須考慮水庫系統之序率特性，而戰術問題為決定基期為每小時或每日之放水量，故水庫系統多以定率性處理之，戰術問題是以戰略問題為基礎，以分配短時間內之放水量。

### 三、自迴歸移動平均模式

關於流量預測之序率模式甚多，本文主要為研

究自迴歸移動平均模式 (Autoregressive Moving Average, ARMA model) 之運用及其特性。

(一) ARMA 模式及 ARIMA 模式之比較

ARMA 模式僅能符合定常性時間序列，而季節性之 ARIMA 模式則能處理含有趨向 (Trend) 及季節性之時間序列<sup>(10,34)</sup>。

但一般河川之流量並不具有逐年增多或逐年減少之趨向性，如能再將時間序列做適當處理及轉換，消除其季節性，即可將其轉變為定常性之時間序列，而以 ARMA 模式處理之。

ARMA 模式較 ARIMA 模式簡捷，模式參數之推估較易求得，可以節省甚多電腦時間，且根據吳賢銘教授及 Pandit 氏之理論，當 ARMA 之階數，取用足夠多時，亦可符合季節性之時間序列。

(二) 統計符號及定義

1. 平均值 (mean)

$$\mu = E[X_t] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t = \bar{X}$$

2. 標準偏差 (Standard deviation)

$$\sigma = \sqrt{E[(X_t - \mu)^2]} = \sqrt{\frac{\sum (X_t - \bar{X})^2}{N-1}} = S$$

3. 偏度 (Skewness)

$$\alpha = E[(X_t - \mu)^3] = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^3$$

4. 自相關變異數 (Autocovariance) 及自相關係數 (ACF)<sup>(13,28)</sup>

$$\begin{aligned} C_k &= C_{ov} [Z_t, Z_{t-k}] \\ &= E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] \\ &= \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}) \end{aligned}$$

$$\rho_k = \frac{C_k}{C_0}$$

5. ACF 之標準誤差 (Standard Error, SE)

$$V_{s.e.}(\hat{\rho}_k) = \frac{1}{N} (1 + 2 \sum_{i=1}^q \rho_i) \quad k > q$$

$$SE(\rho_k) = \sqrt{V_{s.e.}(\hat{\rho}_k)}$$

6. 偏自相關函數 (PACF)<sup>(10,13,28)</sup>

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}}$$

或

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{k+1,k+1} = \frac{\rho_{k+1} - \sum_{t=1}^k \phi_{k,t} \rho_{k+1-t}}{1 - \sum_{t=1}^k \phi_{k,t} \rho_t}$$

$$\phi_{k+1,t} = \phi_{k,t} - \phi_{k+1,k+1} \phi_{k,k-t+1} \quad t = 1, 2, \dots, k$$

7. 偏自相關函數之標準誤差

$$SE(\phi_{kk}) = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

8. 通用化之偏自相關函數 (Generalized PACF, GPACF)

$$\phi_{kk}^{(j)} = \frac{\begin{vmatrix} \rho_j & \rho_{j-1} & \dots & \rho_{j-k+2} & \rho_{j+1} \\ \rho_{j+1} & \rho_j & \dots & \rho_{j-k+3} & \rho_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{j+k-1} & \rho_{j+k-2} & \dots & \rho_{j+1} & \rho_{j+k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_j & \rho_{j-1} & \dots & \rho_{j-k+2} & \rho_{j-k+1} \\ \rho_{j+1} & \rho_j & \dots & \rho_{j-k+3} & \rho_{j-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{j+k-1} & \rho_{j+k-2} & \dots & \rho_{j+1} & \rho_j \end{vmatrix}}$$

(三) ARMA 之基本理論

1. 自迴歸模式 AR(P)

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \alpha_t \quad (3 \sim 1)$$

$$Z_t = X_t - \mu$$

$\phi_i$  為 AR(P) 中之參數

$\alpha_t$  為白噪音 (White noise)，亦稱為擾動值，呈常態分佈，期望值為零， $\alpha_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$

表示由過去之水文觀測量，可以推求未來之水文量。

$$\text{令 } \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

B 為後移運算子 (Backshift Operator)

$$B(Z_t) = Z_{t-1}$$

$$B^k(Z_t) = Z_{t-k}$$

則 (三~1) 式可以寫為

$$\phi(B)Z_t = \alpha_t \dots \dots \dots (三\sim 2)$$

2. 移動平均模式 MA(q)

$$Z_t = \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \dots - \theta_q \alpha_{t-q} \dots \dots \dots (三\sim 3)$$

$\theta_i$  為 MA(q) 之參數

表示由過去之擾動值，可以推測未來之水流量。

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

則 (三~3) 式可以寫為

$$Z_t = \theta(B)\alpha_t \dots \dots \dots (三\sim 4)$$

3. ARMA(p, q) 模式

ARMA(p, q) 模式為 AR(p) 模式與 MA(q) 模式之綜合運用，其方程式可寫為：

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)\alpha_t \dots \dots \dots (三\sim 5)$$

意即由過去之水流量及擾動值，可以推測未來之水流量。

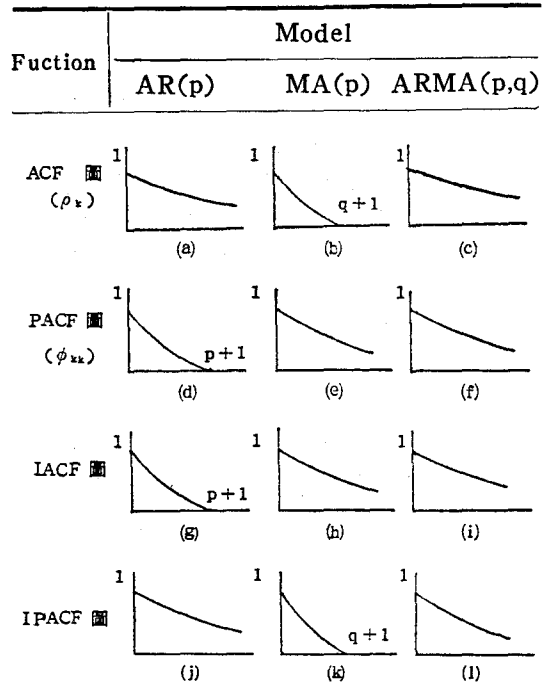
(四) 模式鑑定 (Identification) 之程序

1. 繪製流量資料之時間系列分佈圖及 ACF 圖  
由時列分佈圖及 ACF 圖，可以判斷時列之季節性、持續性、趨勢及長時距之循環性。
2. 將資料做適當之轉換，使其具有定常性。
3. 繪製定常性資料之 ACF 圖及 PACF 圖。
  - (1) AR(p) 模式其  $\rho_k$  值漸減，而  $\phi_{kk}$  值在 p 階後截斷。
  - (2) MA(q) 模式其  $\phi_{kk}$  值漸減，而  $\rho_k$  值在 q 階後截斷。
4. 列出 GPACF 計算表格

q 階後截斷。

(3) ARMA(p, q) 模式其  $\rho_k$  及  $\phi_{kk}$  值均漸減，而無截斷之現象。

除 ACF 及 PACF 外，尚有逆自相關函數 (Inverse ACF) 及逆偏自相關函數 (Inverse PACF) 可以判斷 AR(p) 及 MA(q) 之階數 (17, 24, 28)，IACF 之作用與 PACF 相當，而 IPACF 之功用與 ACF 相當，如圖(3)。



圖(3) ARMA(p, q) 與 ACF, PACF, IACF 及 IPAF 之關係圖

表(1) GPACF for the ARMA(p, q) Model

Moving Average Order, j	Autoregressive Order, k				
	1	p - 1	p	p + 1	p + 2
0	$\phi_{11}^{(0)} \dots$	$\phi_{p-1, p-1}^{(0)}$	$\phi_{pp}^{(0)}$	$\phi_{p+1, p+1}^{(0)}$	$\phi_{p-2, p+2}^{(0)}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
q - 1	$\phi_{11}^{(q-1)} \dots$	$\phi_{p-1, p-1}^{(q-1)}$	$\phi_{pp}^{(q-1)}$	$\phi_{p+1, p+1}^{(q-1)}$	$\phi_{p-2, p+2}^{(q-1)}$
q	$\phi_{11}^{(q)}$	$\phi_{p-1, p-1}^{(q)}$	$\phi_p$	0	0
q + 1	$\phi_{11}^{(q+1)} \dots$	$\phi_{p-1, p-1}^{(q+1)}$	$\phi_p$	$\mu$	$\mu \dots$
q + 2	$\phi_{11}^{(q+2)}$	$\phi_{p-1, p-1}^{(q+2)}$	$\phi_p$	$\mu$	$\mu \dots$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

$\mu = \text{undefined}$

由 GPACF 表格可以判斷 ARMA(p, q) 模式之階數，在第 p 行中自第 q 列後  $\phi_{p,j}^{(q)}$  均為常數，而第 q 列中自第 p+1 行後  $\phi_{k,q}^{(q)}$  均為零。另一判斷標準為在  $k > p+1$  且  $j \geq q+1$  時，其  $\phi_{k,j}^{(q)}$  為無限大 (Undefined)。

5. 上述 3 及 4 程序中判斷 ARMA (p,q) 模式階數之方法，僅適用於低階之 AR(p)、AM(q) 模式或理想之 ARMA (p,q) 模式，於實際運用上，亦常會產生誤差，因此吳賢銘教授及 Pandit 認為應求出數個模式，比較其誤差及適用性，始能決定最正確之模式。

(四) 參數估算 (Parameter Estimation)

ARMA(p, q) 模式係利用最小平方方法求出殘餘值  $\alpha_t$  之平方和為最小值，以估計模式之參數，特別在 AR(p) 模式中，線性最小平方估計法當更便捷。當移動平均參數出現時，則非條件迴歸 (Unconditional) 為非線性，因此須以非線性最小平方方法處理之。

非線性最小平方方法通常以猜測之參數為起始值以為開始，其  $\alpha_t$  值可由下式反覆計算之。

$$\alpha_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \alpha_{t-1} + \theta_2 \alpha_{t-2} + \dots + \theta_q \alpha_{t-q}$$

因當  $t < 0$  時，無  $X_t$  值，故第一個  $\alpha_t$  計算值常從  $t = p+1$  開始，且當  $t < q$  時， $\alpha_t$  值均設定為零，因其期望值等於零之故。

最常用之線性最小平方方法，係馬克特氏 (Marquardt) 數值解法，亦即高斯法 (Gauss Method) 與最陡下降法 (The Method of Steepest Descent) 之聯合運用。

參數起始值之猜測可以依據自相關函數求得，另一方法則為依據反函數所求得者。

(六) 模式之檢驗 (Verification)

如模式正確時，則其殘差值  $\alpha_t$  必須為白噪音，殘差之間相互獨立，且呈常態分佈<sup>(10,13,28)</sup>。可由  $\alpha_t$  之 ACF 圖檢驗其是否相互獨立。

根據吳氏及 Pandit 理論<sup>(34)</sup>，先求出模式，再做下述之各種比較與檢驗，定出最佳階數之模式。

1. RSS (Residual Sum of Square) 一檢驗

$$RSS = \sum_{t=1}^N \alpha_t^2$$

2. AIC (Akaike Information Criterion) 一檢驗

$$AIC = N \ln \left( \frac{RSS}{N-p-q} \right) + 2(p+q)$$

N 為樣本之個數

p, q 為 ARMA(p, q) 之階數

此為 Akaike 氏發展之檢驗公式，AIC 愈小，則模式愈佳。

3. FPE (Final Prediction Error) 一檢驗

$$FPE = \frac{RSS}{N} \times \frac{N+p+q}{N-p-q}$$

FPE 值愈小，則模式愈佳。

4.  $\lambda^2$  一檢驗 (Chi-Square Test)

$$Q_{0.05} = \sum_{k=1}^{k+p+q} \rho_k^2 N$$

$\rho_k$  為  $\alpha_t$  之 k 階自相關係數， $\lambda^2$  之臨界值可以查得，通常取  $Q_{0.05, f}$ ，f 為自由度，如  $Q_{0.05} < Q_{0.05, f}$ ，則顯著性為 95%，通過檢定。

5. 檢定 SSM+SSA 是否等於 100%

$$SSM = \frac{V_{a,r}[\hat{X}_{t-1}(1)]}{V_{a,r}[X_t]} \times 100\%$$

$$SSA = \frac{V_{a,r}[\alpha_t]}{V_{a,r}[X_t]} \times 100\%$$

此法為檢定  $\alpha_t$  是否與  $X_{t-1}$  無關，而相互獨立。上式中  $\hat{X}_{t-1}(1)$  為在  $t-1$  時刻，對  $X_t$  之預測值。

SSM+SSA=100% 之證明：

$$\because X_t = \hat{X}_{t-1}(1) + \alpha_t$$

$$\therefore V_{a,r}[X_t] = V_{a,r}[\hat{X}_{t-1}(1) + \alpha_t]$$

$$V_{a,r}[X_t] = V_{a,r}[\hat{X}_{t-1}(1)] + V_{a,r}[\alpha_t] + 2C_{o,r}[\hat{X}_{t-1}(1), \alpha_t]$$

$$\because C_{o,r}[X_{t-1}(1), \alpha_t] = 0$$

$$\therefore V_{a,r}[X_t] = V_{a,r}[\hat{X}_{t-1}(1)] + V_{a,r}[\alpha_t]$$

上式除以  $V_{a,r}[X_t]$ ：

$$\frac{V_{a,r}[X_t]}{V_{a,r}[X_t]} = \frac{V_{a,r}[\hat{X}_{t-1}(1)]}{V_{a,r}[X_t]} + \frac{V_{a,r}[\alpha_t]}{V_{a,r}[X_t]}$$

$$\therefore SSM + SSA = 100\%$$

SSM+SSA 愈接近 100%，則模式愈佳。

6. 殘差自相關係數檢驗 (Unified Autocorrelation Function)

$\alpha_t$  為白噪音，則其自相關係數之期望值為零， $\rho_k \sim NID [0, \sigma^2 (\rho_k)]$ ，在 95% 可信度下，可定出其上下限：

$$\left| \frac{\rho_k}{\sigma(\rho_k)} \right| \leq 1.96$$

$$\sigma(\rho_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} [1 + 2(\rho_2^1 + \rho_2^2 + \dots + \rho_2^p)]^{1/2}$$

$$p < k$$

### 7. F 檢驗

F 檢驗為檢驗 ARMA(p, q) 模式將階數增為 ARMA(p', q') 時，對誤差之改進是否具有顯著性。

$$F = \frac{A_1 - A_0}{S} \div \frac{A_0}{N - r} \sim F(S, N - r)$$

A<sub>1</sub> 為 ARMA(p, q) 之殘差平方和  
A<sub>0</sub> 為 ARMA(p', q') 之殘差平方和  
N 為樣本個數

$$r = p' + q'$$

$$S = p' + q' - (p + q)$$

如 F 值小於 F 分佈表中值，則選用 ARMA(p, q) 模式即可，顯示在某一信賴水準可認為適當。

### (b) ARMA 模式之特性<sup>(13, 34)</sup>

#### 1. 格林函數 (Green's Function)

格林函數之含意為“以一組 α<sub>t</sub> 之過去資料以描述動態或記憶，並用解釋此組 α<sub>t</sub> 對 X<sub>t</sub> 影響之程度及將所對應之 X<sub>t</sub> 以此組 α<sub>t</sub> 之線性組合以表示”。

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \alpha_{t-j} = \sum_{j=-\infty}^t G_{t-j} \alpha_j \dots \dots \dots (三 \sim 6)$$

G<sub>j</sub> 為格林函數，G<sub>j</sub> 可以解釋為干擾值 α<sub>t-j</sub> 之權重 (Weight)，G<sub>j</sub> 之大小表示出系統記憶外來干擾值 α<sub>t-j</sub> 之程度。另一解釋為格林函數為表示對任一 α<sub>t</sub> 在系統中相對應衰減之速率。格林函數之解法有兩種：隱式 (Implicit Form) 及顯式 (Explicit Form)，今以 ARMA(2, 1) 為例，求其格林函數。

#### (1) 隱式法：

$$\text{ARMA}(2, 1): (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = (1 - \theta_1 B) \alpha_t \dots \dots \dots (三 \sim 7)$$

假設：

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \alpha_{t-j} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \right) \alpha_t \dots \dots \dots (三 \sim 8)$$

將 (三 ~ 8) 式代入 (三 ~ 7) 式得

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \left( \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \right) \alpha_t = (1 - \theta_1 B) \alpha_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) (G_0 + G_1 B + G_2 B^2 + \dots) = (1 - \theta_1 B)$$

比較各項係數得

$$G_0 = 1$$

$$G_1 - \phi_1 = -\theta$$

$$G_2 - \phi_1 G_1 - \phi_2 = 0$$

$$G_j (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$$

$$j \geq 2 \dots \dots \dots (三 \sim 9)$$

#### (2) 顯式：

$$\text{ARMA}(2, 1): (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = (1 - \theta_1 B) \alpha_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = (1 - \lambda_1 B) (1 - \lambda_2 B)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \phi_1$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\phi_2$$

其中 λ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub> 為下列方程式之兩根

$$\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$$

$$\therefore \lambda = 1/2 \times (\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})$$

由 (三 ~ 7) 可得

$$X_t = (1 - \theta_1 B) \alpha_t / (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = (1 - \theta_1 B) \alpha_t / (1 - \lambda_1 B) (1 - \lambda_2 B)$$

如 λ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub> 相異，則

$$X_t = \left[ \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \times \frac{1}{1 - \lambda_1 B} + \frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times \frac{1}{1 - \lambda_2 B} \right] \alpha_t = \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \lambda_1^j + \left( \frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \lambda_2^j \right] \alpha_{t-j}$$

$$\therefore G_j = \left( \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \lambda_1^j + \left( \frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \lambda_2^j \dots \dots \dots (三 \sim 10)$$

若 |λ<sub>1</sub>| < 1, |λ<sub>2</sub>| < 1，則為穩定系統。

#### 2. 反函數 (Inverse Function)

ARMA 系統之動態性亦可以過去之 X<sub>t</sub> 以線性組合之形式表示之。此展開式之係數函數稱為反函數以 I<sub>j</sub> 表示。

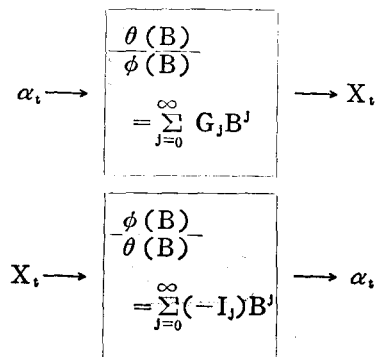
I<sub>j</sub> 定義為：

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} X_{t-j} I_j + \alpha_t \dots \dots \dots (三 \sim 11)$$

$$\text{或 } \alpha_t = (1 - I_1 B - I_2 B^2 - \dots) X_t$$

反函數之求法與格林函數之求法相同，只須將 (三 ~ 9) (三 ~ 10) 式中之 φ、θ 互換，且以 “-I<sub>j</sub>” 代替 G<sub>j</sub> 即可，並以 ν<sub>1</sub> 代替 λ，ν<sub>1</sub> 為 MA 部份之特性根。

格林函數與反函數之雙向性，可由下圖表示之。



圖(4) 格林函數與反函數之雙向性



#### 四、漸近優選模式

動態規劃可以有效解決水庫操作問題，但其所需維度甚大，狀態變數分割不易，尤其在多水庫多標的之系統情況下，更加複雜，不易解決。因此甚多學者研究各種模式，以解決動態規劃之問題，而漸近優選模式即為其中方法之一。

(一) 漸近優選模式之理論及方法

一個N階段之動態規劃問題，可以下列形式表示之：

$$\min \sum_{j=1}^N h(X_j, Y_j)$$

$$X_j = H(X_{j-1}, Y_j)$$

若  $Y_j$  可用  $X_j$  與  $X_{j-1}$  之函數表示之，則目

標函數可改寫為：

$$\min \sum_{j=1}^N g(X_{j-1}, X_j)$$

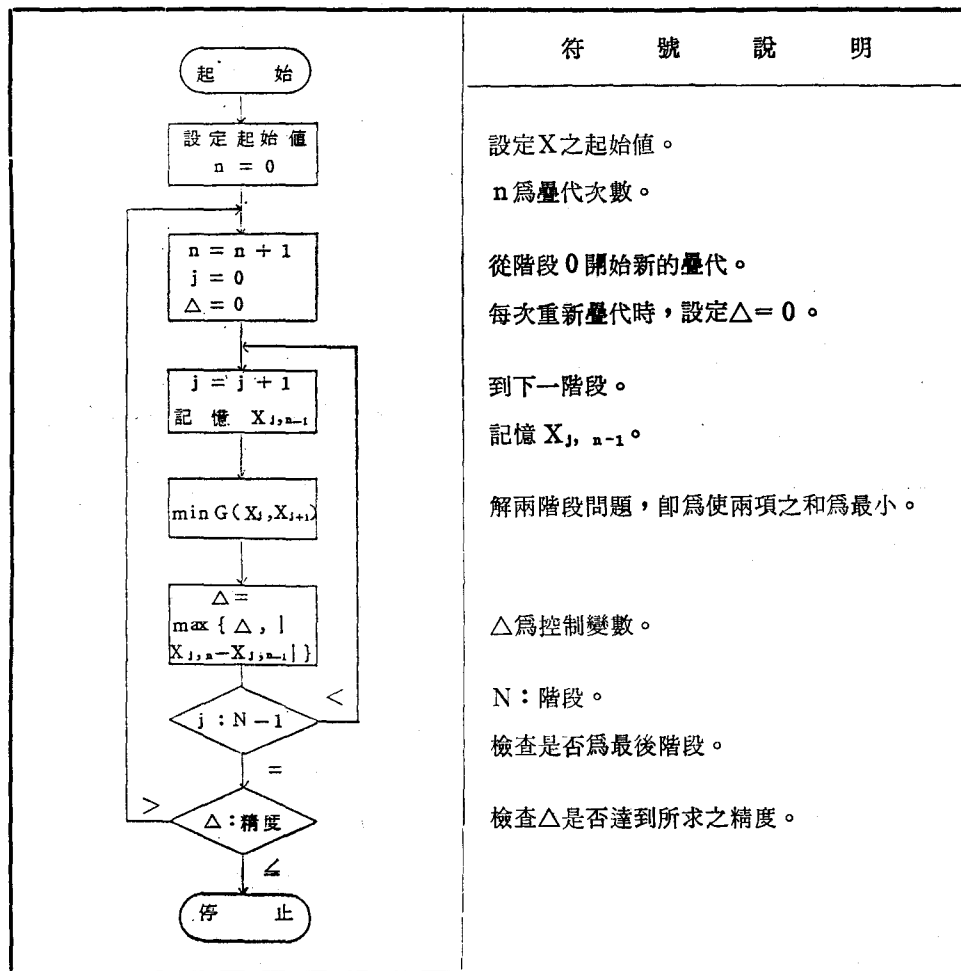
POA 之基本條件為  $X_0$  及  $X_N$  為已知

POA 之運算基本形式為

$$G(X_j, X_{j+1}) = \min_{X_j} [g(X_{j-1}, X_j) + g(X_j, X_{j+1})]$$

設定  $X_{j-1}, X_{j+1}$ ，求  $X_j$  使  $G(X_j, X_{j+1})$  值為最小。

求解時可用正向 (Forward) 法，亦可用逆向 (Backward) 法，先設定一組起始值 (Initial Value)，再利用基本形式反覆疊代計算，其流程如圖(5)。

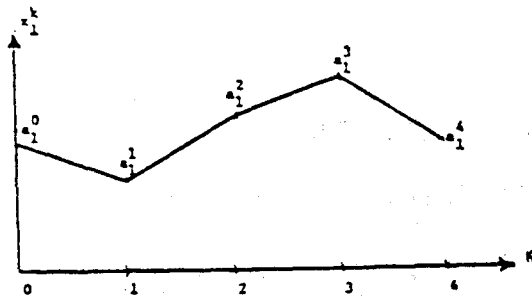


圖(5) POA 流程圖

茲以下列說明其計算過程，設  $N=4$ ，即四個階段：

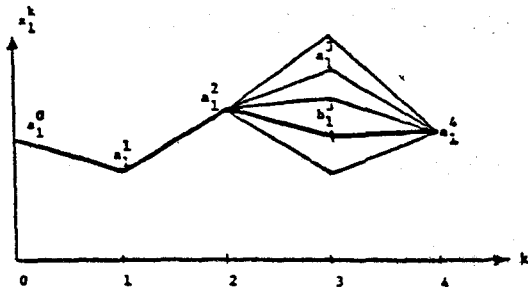
1. 設定起始值

$x_1^k = a_1^k, k=0, \dots, 4$   $a_1^0, a_1^4$  為邊界條件，如圖(6)。



圖(6)  $X_1^k$  之起始軌跡

2. 調整第三階段之值  $x_1^2, x_1^3, x_1^4$  保持不變，求得  $x_1^3 = b_1^3, x_1^k$  之軌跡為  $a_1^0, a_1^1, a_1^2, b_1^3, a_1^4$ ，如圖(7)。



圖(7) 調整  $X_1^3$

3. 調整  $x_1^2$

$x_1^1, x_1^3$  保持不變，求得  $x_1^2 = b_1^2$ 。  $x_1^k$  之軌跡成

$$\text{令 } f_N(X_0) = \min_{X_1, X_2, \dots, X_{N-1}} \sum_{j=1}^N g(X_{j-1}, X_j)$$

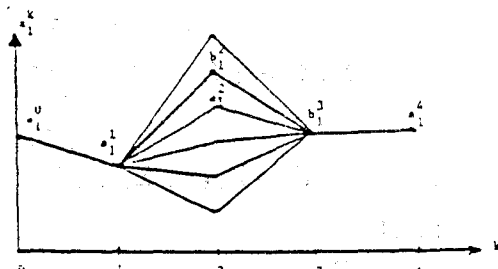
$$= \min_{X_1} [g(X_0, X_1) + \min_{X_2 \dots X_{N-1}} \sum_{j=2}^N g(X_{j-1}, X_j)] \dots \dots \dots (四 \sim 1)$$

可得

$$f_N(X_0) = \min_{X_1} [g(X_0, X_1) + f_{N-1}(X_1)], N \geq 2 \dots \dots \dots (四 \sim 2)$$

$$f_1(X_0) = g(X_0, X_N), N = 1$$

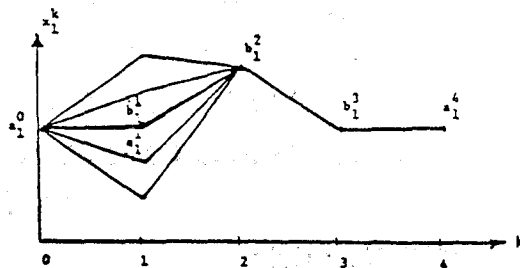
為  $a_1^0, a_1^1, b_1^2, b_1^3, a_1^4$ ，如圖(8)。



圖(8) 調整  $X_1^2$

4. 依照上述方式調整

$x_1^1$ ，得  $x_1^1 = b_1^1, x_1^k$  之軌跡成爲  $a_1^0, b_1^1, b_1^2, b_1^3, a_1^4$ ，如圖(9)。



圖(9) 調整  $X_1^1$

同理依 1~4 之步驟，做二次疊代試算後， $x_1^k$  之軌跡成爲  $a_1^0, c_1^1, c_1^2, c_1^3, a_1^4$ ，依此重覆疊代，至誤差小於所設之精度爲止。

(二) POA 最佳解收斂性證明<sup>(18)</sup>

$$\min \sum_{j=1}^N g(X_{j-1}, X_j)$$

$X_j$  爲  $M$  階之向量， $X_0$  與  $X_N$  已知。

以數學歸納法證明。

設  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{N-1}$  為最佳解，則

$$f_N(X_0) = g(X_0, \tilde{X}_1) + g(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) + \dots + g(\tilde{X}_{N-1}, X_N) \dots\dots\dots (四\sim 3)$$

設  $X_j$  之起始值為  $C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$

$$\begin{aligned} g(X_0, C_1) + g(C_1, C_2) &\geq \min_{X_1} \{g(X_0, X_1) + g(X_1, C_2)\} \\ &= g(X_0, \tilde{X}_{1,1}) + g(\tilde{X}_{1,1}, C_2) \dots\dots\dots (四\sim 4) \end{aligned}$$

當  $X_0, C_2$  不變， $X_{1,1}$  為  $X_1$  之最佳解。

同理：

$$\begin{aligned} g(\tilde{X}_{1,1}, C_2) + g(C_2, C_3) &\geq \min_{X_2} \{g(\tilde{X}_{1,1}, X_2) + g(X_2, C_3)\} \\ &= g(\tilde{X}_{1,1}, \tilde{X}_{2,1}) + g(\tilde{X}_{2,1}, C_3) \dots\dots\dots (四\sim 5) \end{aligned}$$

同理：

$$\begin{aligned} g(\tilde{X}_{j-1,n}, \tilde{X}_{j,n-1}) + g(\tilde{X}_{j,n-1}, \tilde{X}_{j+1,n-1}) &\geq \min_{X_j} \{g(\tilde{X}_{j-1,n}, X_j) + g(X_j, \tilde{X}_{j+1,n-1})\} \\ &= g(\tilde{X}_{j-1,n}, \tilde{X}_{j,n}) + g(\tilde{X}_{j,n}, \tilde{X}_{j+1,n-1}) \dots\dots\dots (四\sim 6) \end{aligned}$$

$\tilde{X}_{j,n}$  為  $\tilde{X}_j$  第  $n$  次疊代計算之最佳值。

因此第一次疊代計算後，可得：

$$g(X_0, C_1) + g(C_1, C_2) \geq g(X_0, \tilde{X}_{1,1}) + g(\tilde{X}_{1,1}, C_2) \dots\dots\dots (四\sim 7)$$

$$\begin{aligned} g(X_0, C_1) + g(C_1, C_2) + g(C_2, C_3) &\geq g(X_0, \tilde{X}_{1,1}) + g(\tilde{X}_{1,1}, C_2) + g(C_2, C_3) \\ &\geq g(X_0, \tilde{X}_{1,1}) + g(\tilde{X}_{1,1}, \tilde{X}_{2,1}) + g(\tilde{X}_{2,1}, C_3) \dots\dots\dots (四\sim 8) \end{aligned}$$

繼續至  $N$  項，可得：

$$\begin{aligned} g(X_0, C_1) + g(C_1, C_2) + g(C_{N-1}, X_N) \\ \geq g(X_0, \tilde{X}_{1,1}) + g(\tilde{X}_{1,1}, \tilde{X}_{2,1}) + \dots + g(\tilde{X}_{N-1,1}, X_N) \dots\dots\dots (四\sim 9) \end{aligned}$$

同理，第二次疊代計算後，得：

$$\begin{aligned} g(X_0, \tilde{X}_{1,1}) + g(\tilde{X}_{1,1}, \tilde{X}_{2,1}) + \dots + g(\tilde{X}_{N-1,1}, X_N) \\ \geq g(X_0, \tilde{X}_{1,2}) + g(\tilde{X}_{1,2}, \tilde{X}_{2,2}) + \dots + g(\tilde{X}_{N-1,2}, X_N) \dots\dots\dots (四\sim 10) \end{aligned}$$

故第  $n$  次疊代計算後，得：

$$\begin{aligned} g(X_0, \tilde{X}_{1,n-1}) + g(\tilde{X}_{1,n-1}, \tilde{X}_{2,n-1}) + \dots + g(\tilde{X}_{N-1,n-1}, X_N) \\ \geq g(X_0, \tilde{X}_{1,n}) + g(\tilde{X}_{1,n}, \tilde{X}_{2,n}) + \dots + g(\tilde{X}_{N-1,n}, X_N) \\ \geq g(X_0, \tilde{X}_1) + g(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) + \dots + g(\tilde{X}_{N-1}, X_N) \dots\dots\dots (四\sim 11) \end{aligned}$$

如  $n \rightarrow \infty$ ，則  $X_{j,n} \rightarrow X_j$ ，故得證。

(三) 漸近優選模式之特性<sup>(18,22,33,35)</sup>

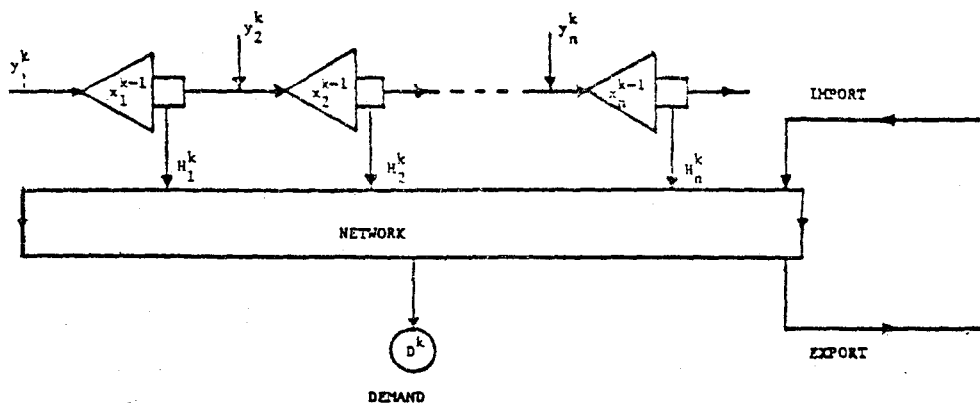
1. 狀態變數不必離散化(Discretized)，即可獲得更準確之答案，而其他之動態規劃解法，必須將狀態變數及決策變數做適當之離散化，如欲得較高之精度，則狀態變數須分割愈細，因而計算量及電腦記憶容量呈指數之增加。

2. POA 模式未有維度之問題，所需之電腦記憶容量亦小，僅需記憶一組軌跡(Trajectory)即可。
3. 計算狀態變數及決策變數時，不必使用遞迴方程式(Recursive equation)，僅以兩個階段計算即可。

4. POA 模式亦可兼及河水自上游水庫至下游水庫之時間，而其他之動態規劃模式除前述之 IDPSA 方法外，並無此功能。

### 五、應用實例

(一) POA 模式在水力發電系統短期操作之運用<sup>(15,16,33)</sup>



圖(10) 水力發電系統示意圖

假設各發電廠之電能可以共同使用，並忽略水庫之滲漏量及蒸發量，而各水庫之最始及最終蓄水量，可由長期操作問題求得。並設此水庫系統在短期操作時，僅考慮水力發電單一目標。

由於係每小時之水庫操作問題，故河水由上游流至下游之時間，亦可以小時為單位，並取整數運算之。

1. 符號之意義：

(1)  $U_k^i$  為水庫  $i$  於  $k$  時段之放水量， $U_i$  為發電廠之最大容許水量，如  $U_k^i > U_i$  則表示有  $U_k^i - U_i$  之水量由溢洪道溢流。

(2)  $S_{i,j}$  為水由水庫  $i$  流至水庫  $j$  之時間，以小時為單位，亦取整數。

$$S_{i,j} = S_{i,i+1} + S_{i+1,i+2} + \dots + S_{j-1,j}$$

(3)  $q_k^i$  為水庫  $i$  於  $k$  時段之總入流量 (Total inflow)

$$q_k^i = y_k^i \quad \text{如 } i = 1$$

$$q_k^i = y_k^i + U_{i-1} \quad j > 1$$

$y_k^i$  為天然流量， $\tau = k - S_{j-1,j}$

(4)  $X_k^i$  為水庫  $i$  於  $k$  時段末之蓄水量

$$X_k^i \leq X_i, \quad X_i \text{ 為水庫 } i \text{ 之最大容量。}$$

(5)  $H_i(X_k^{i-1}, U_k^i)$  為水庫  $i$ ，於  $k$  時段之發

由於本省河川流量未有完整之時流量記錄，亦無每小時之水力發電標的，故本實例採用加拿大學者 Turgeon [1981] 之研究實例作說明。

考慮一含有  $n$  個水力發電廠之串聯水庫系統，於一週內每一小時之水庫操作運用，水庫系統如圖 (10)。

電量。

(6)  $D^k$  為  $k$  時段之電力需求量。

(7)  $C(S^k)$  為  $k$  時段產生之代價 (Production Cost)，如下述並如圖 (11)。

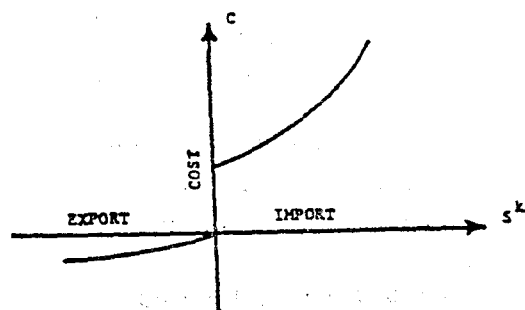
$$S^k = D^k - \sum_i H_i(X_k^{i-1}, U_k^i)$$

若  $S^k > 0$ ，表示電量不足。

若  $S^k < 0$ ，表示發電量過多，則  $C(S^k)$  為負值。

當  $S^k = 0$ ， $C(0) = 0$ ，表示供輸平衡。

(8)  $K$  為期距。如為一週時， $K = 168$ 。



圖(11) 產生之代價 (Production Cost) 示意圖

2. 問題概述：

決定放水量  $U_k^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, k$ , 使 (五~1) 式為最小。

$$\min \sum_{k=1}^k C(S^k) \dots \dots \dots (五\sim 1)$$

其限制條件為：

$$X_k^i = X_k^{i-1} + q_k^i - U_k^i, X_k^0 = \alpha_i^0, X_k^i = \alpha_k^i \quad \forall i, k \dots \dots (五\sim 2)$$

$$\sum_i H_i(X_k^{i-1}, U_k^i) + S^k = D^k \quad \forall k \dots \dots (五\sim 3)$$

$$0 \leq X_k^i \leq X^i \quad \forall i, k \dots \dots (五\sim 4)$$

$$U_k^i \geq 0 \quad \forall i, k \dots \dots (五\sim 5)$$

(五~2) 式中之最前一式為連續方程式， $\alpha_i^0, \alpha_k^i$  可由戰略問題求得 (前已述及)。

3. 解算步驟：

(1) 時間延遲 (Time Delarys) 未予考慮之情形：

- 步驟A：設定起始值  $X_k^i = \alpha_k^i, \forall i, k$
- 步驟B：令  $k = K - 1$
- 步驟C：調整  $X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^n$ ，而不改變

$$X_k^{i-1} \text{ 及 } X_k^{i+1} \\ i = 1, 2, \dots, n \\ \min \{C(S^k) + C(S^{k+1})\}$$

(五~2) ~ (五~5) 為其限制式  
得  $X_k^i = b_k^i, i = 1, 2, \dots, n$

步驟D：令  $k = k - 1$ ，如  $k > 0$  則回至步驟C 如  $k = 0$ ，則至步驟E

步驟E：令  $\Delta = \max |b_k^i - \alpha_k^i|, \forall i, k$   
如  $\Delta$  小於所設定之精度，則終止計算，  
否則令  $\alpha_k^i = b_k^i \forall i, k$ ，再回至步驟B

其中步驟C之解法如下：

$$X^k = [X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^n] \dots (五\sim 6) \\ J^k(X^k) = C(S^k) + C(S^{k+1}) \dots (五\sim 7) \\ \min \{J^k(X^k), st. \\ (五\sim 5) \sim (五\sim 2)\} \dots \dots (五\sim 8)$$

如  $X^k$  為最佳解，則

$$J^k(X^k + \epsilon) \geq J(X^k) \dots \dots (五\sim 9)$$

今令

$$\epsilon_i = [0, 0, \dots, \delta_i, 0, \dots, 0]$$

$\delta_i$  為一甚小之正數

再令

$$\nabla_i^+ J^k(X^k) = J^k(X^k + \epsilon_i) - J^k(X^k) \dots \dots \dots (五\sim 10)$$

$$\nabla_i^- J^k(X^k) = J^k(X^k - \epsilon_i) - J^k(X^k) \dots \dots \dots (五\sim 11)$$

由 (五~9) 知

$$\nabla_i^+ J^k(X^k) \geq 0, \Delta_i^- J^k(X^k) \geq 0 \dots \dots \dots (五\sim 12)$$

如  $X^k = [\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k]$  未能滿足 (五~12) 式時，則  $X_k^i$  必須修正，而設  $X_k^i$  之最大及最小允許值為  $X_i'^k, X_i''^k$

$$X_i'^k = \min \{ \bar{X}_i, \alpha_i^k + \min_{j \geq i} U_j^k \} \dots \dots \dots (五\sim 13)$$

$$X_i''^k = \max \{ 0, \alpha_i^k - \min_{j \geq i} U_j^{k+1} \} \dots \dots \dots (五\sim 14)$$

其中

$$U_k^i = \alpha_k^{i-1} + q_k^i - \alpha_k^i$$

$$U_k^{i+1} = \alpha_k^i + q_k^{i+1} - \alpha_k^{i+1}$$

(五~13) 式中，如  $X_k^i > \alpha_i^k + \min_{j \geq i} U_j^k$ ，

則在  $k$  時段內，表示下游水庫放水會出現負值。(五~14) 式中，如  $X_k^i < \alpha_i^k - \min$

$U_j^{k+1}$  則在  $k + 1$  時段內，表示下游水庫放水量為負值，因此  $X_k^i$  必須在  $[X_i''^k, X_i'^k]$  內變動方可。

(2) 考慮時間延遲之情形：

如果考慮河水之流經時間，則修改下列三式即可。

$$J^k(X^k) = \sum_{i=k}^k C(S^i)$$

$$X_k'^i = \min \{ \bar{X}_i, \alpha_k^i + \min_{j \geq i} U_{k+s, j}^i \}$$

$$X_k''^i = \max \{ 0, \alpha_k^i - \min_{j \geq i} U_{k+1+s, j}^i \}$$

其他與無時間延遲情形相同。

4. 計算實例：

水庫系統之基本資料如表(2)。

表(2) 水庫系統資料

i	$X_n, \text{Mm}^3$	$U_n, \text{Mm}^3/\text{h}$	$s_{1,1+i}$ hours	$h'_{1,m}$	$h''_{1,m}$	$\alpha_1$
1	550	0	3	0	0	0
2	145	1.969	2	94	95	0.0614
3	5.1	2.138	5	88	88.01	0.8627
4	424	4.248	...	174.4	199	0.0074

$h'_1, h''_1, \alpha_1$  為函數  $h_1(X_1^{t+1})$  之參數。  
 $\bar{U}_1 = 0$  表水庫 1 無水力發電廠。

表(3) 流量及邊界條件

i	$y_i^t, \text{Vk}, \text{Mm}^3/\text{h}$	$\alpha_i^0, \text{Mm}$	$\alpha_i^t, \text{Mm}$
1	0.6228	225	225
2	0.2304	73	73
3	0.2196	2.5	2.5
4	0.9576	212	212

各水庫之最初及最終蓄水量、天然流量如表(3)。

發電方程式：

$$H_1(X_1^{t-1}, U_1^t) = 2.4525h_1(X_1^{t-1}) U_1^t$$

$$h_1(X_1^{t-1}) = h_1'' + /h_1' - h''$$

$$[1 - \exp(\alpha_1 X_1^{t-1})]$$

電力需求量  $D_n = \alpha^k \bar{D}$ ， $\bar{D}$  為尖峯需求量 (1600 MWH)。  $\alpha^k$  值如表(4)所示。

假設  $C(S^k) = (S^k)^3$

令  $X_1^t$  之起始值為

$$\alpha_i^t = \alpha_i^{t-1} + (\alpha_i^t - \alpha_i^0)/K \quad \forall i, k$$

經過 823 次之疊代計算即可得最佳解，但 700 次疊代計算後之誤差，已小於 1%。

如果設定之精度不同，則所需之疊代數亦異。

表(4)  $\alpha^k$  值

Hour	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
1	0.67	0.77	0.74	0.79	0.77	0.79	0.73
2	0.66	0.74	0.715	0.76	0.75	0.75	0.71
3	0.65	0.71	0.70	0.73	0.73	0.72	0.69
4	0.68	0.71	0.695	0.71	0.71	0.70	0.67
5	0.71	0.71	0.69	0.70	0.68	0.68	0.66
6	0.74	0.73	0.73	0.75	0.67	0.72	0.65
7	0.77	0.76	0.76	0.79	0.66	0.75	0.64
8	0.82	0.79	0.80	0.84	0.70	0.79	0.66
9	0.87	0.81	0.84	0.89	0.74	0.82	0.69
10	0.92	0.87	0.89	0.94	0.80	0.85	0.71
11	0.97	0.91	0.95	1.0	0.86	0.87	0.72
12	0.93	0.87	0.91	0.94	0.92	0.85	0.74
13	0.90	0.83	0.87	0.89	0.99	0.83	0.77
14	0.87	0.82	0.86	0.88	0.92	0.81	0.74
15	0.85	0.81	0.85	0.87	0.87	0.78	0.72
16	0.88	0.85	0.89	0.90	0.87	0.80	0.71
17	0.91	0.87	0.94	0.94	0.85	0.82	0.70
18	0.87	0.86	0.91	0.90	0.87	0.80	0.71
19	0.84	0.84	0.89	0.87	0.90	0.78	0.72
20	0.85	0.85	0.86	0.85	0.87	0.77	0.725
21	0.87	0.87	0.83	0.82	0.84	0.75	0.73
22	0.83	0.83	0.85	0.81	0.85	0.77	0.75
23	0.81	0.80	0.88	0.79	0.87	0.78	0.77
24	0.79	0.77	0.83	0.78	0.83	0.75	0.71

由表(5)知，開始時代價應大量減少，隨疊代次之增加，每次疊代後之代價減少量應減少，因此取適當之精度，可以減少疊代次數。

表(5) 目標函數值

疊代數	代價 (Cost)
0	3739040
1	628486
2	463926
10	139749
50	75374
100	34311
150	22865
200	16858
250	13400
300	1122
350	9777
400	8813
450	8153
500	7694
600	7150
700	6917
823	6856

(二) 大甲溪水庫系統之操作

1. 大甲溪流域系統概況<sup>(5,6,10,31)</sup>

大甲溪發源於中央山脈雪山及南湖大山，上游幹流為南湖溪，至太保久與伊克丸溪匯合後稱大甲溪，西流橫貫臺中縣，於臺中港之北方注入臺灣海峽，全長約140公里，流域面積1,236平方公里。本流域上游德基埧址集水面積514平方公里，佔流域面積40%，石岡埧為本溪下游用水之控制點，集水面積1,061平方公里，佔流域面積85%。德基至石岡60公里間，平均坡降為1：60可利用之落差達一千餘公尺，水力發電為全省之冠。大甲溪共有五座串聯水庫：德基、青山、谷關、天輪、石岡，前四座由臺電控制，設有發電機於用電尖峰時間放水。德基水庫之興建以電力之開發為主，惟其具有調節大甲溪流之功能，對下游各標的用水之供應貢獻很大。下游灌溉用水，公共給水及工業用水均由石岡埧供應。

各水庫中以德基、谷關、石岡為主要之操作水

庫，其中德基水庫容量最大(175 MCM)，其他為調整池，天輪埧容量最小，加上引水隧道容量亦小，故常發生大量溢洪。

2. 大甲溪水庫系統操作模式<sup>(5,6,31)</sup>

大甲溪流域，月流量分配變化甚大，5月至10月為豐水期，其逕流量約佔全年流量之77%，枯水期(11月至4月)之流量僅佔全年流量之23%。

為使水庫操作方便，及供應枯水期之水量，每年自10月初開始操作，至翌年9月底止，為一年之操作週期。並設定於9月底(10月初)時水庫之蓄水量為滿庫狀態。

本水庫系統為串聯式水庫系統，其運轉以供應尖峰電力負載為主要目標，但近年來臺灣電力充沛，為欲配合下游各標的用水之需求，在不影響運轉計畫，儘量調配增加放水量，以應所需。

(1) 流量預測：

大甲溪流域之流量站，大都已經廢除，而且記錄不全，上下游流量記錄常有矛盾之處。德基水庫之進水量主要以松茂站之流量為依據，至於其他水庫之天然流量，則以臺電之迴歸式求之。

首先消除流量之季節性，本研究採用三種方法：

$$(A) X_j = (Q_j - \bar{Q}_j) / SD_j$$

$$(B) X_j = Q_j - Q_j^{-1}$$

$$(C) X_j = \ln Q_j - \ln \bar{Q}_j$$

$Q_j$  表第  $i$  年第  $j$  時期之流量

$\bar{Q}_j$  表第  $j$  時期之平均流量

$SD_j$  表第  $j$  時期流量之標準偏差

原始記錄及轉換後之資料之時序列圖、ACF圖、及 PACF 圖(圖(12)~圖(15))由圖可知原始資料具有週期性，經過 A、B、C 三種方法轉換後，可以消除其季節性。但旬流量經過 B 法轉換後，在  $\rho_{36}$  呈現負相關。

此三種方法中，以上述 A、C 兩種方法較佳，其 ACF 及 PACF 很快收斂為零，以 AR(1) 模式或 ARMA(2, 1) 模式即可代表其特性，並通過各種檢定。

而 B 法會減少樣本之數目(如以旬計，則減少 36 個)，且其 ARMA 模式無法通過  $\lambda^2$  檢驗及殘差自相關係數檢驗，檢驗結果及流量預測如表(6)及圖(16)(a)至(c)、圖(17)(d)至(f)，並參閱符號說明。

本研究中 ARMA 模式參數之求取及檢定，係使用臺大機械系 TRSK 2 程式。

本文採用 AR(1) 模式，預測 1971 年、1977 年及 1980 年之月流量與旬流量。由表(7)及圖(16)、(17)得知預測時間愈長，誤差較大。

在枯水期(11月至4月)可以得到較佳之預測值，而豐水期流量變化很大，加上颱風等因素不易得到準確之結果。

圖(12)至圖(15)及下表中之符號說明：

DD 7 為松茂站旬流量記錄。

SDA 7 為松茂站旬流量記錄經過 A 法轉換後之資料。

IDA 7 為松茂站旬流量記錄經過 B 法轉換後之資料。

LDA 7 為松茂站旬流量記錄經過 C 法轉換後之資料。

(2) POA 於大甲溪水庫系統之運用

設大甲溪水庫系統自天輪以上僅有水力發電單一標的，至石岡開始有其他標的之用水如圖(18)。

目標函數可以定為：

$$\min \sum_{i=1}^N (U_i^s - D^i)^2 \times W_1 - E^i \times W_2$$

$U_i^s$  為 i 時段，石岡壩之放水量。

$D^i$  為 i 時段，下游各標的需水量之總和。

$E^i$  為 i 時段，各水庫之總發電量。

$W_1, W_2$  為權重，如以發電為主，則增加  $W_2$ ，減少  $W_1$ ，反之則增加  $W_1$ ，減少  $W_2$ 。

限制式為：

$$X_j^i = X_j^{i-1} + q_j - U_j - EP_j^i$$

$$x_j^0 = \alpha_j^0, \quad x_j^N = \alpha_j^N$$

$$SL_i \leq x_i^f \leq scap_i$$

$EP_i^j$  為第 j 個水庫於 i 時段之蒸發量。

$SL_j$  為第 j 個水庫之最小呆容量。

本文採用 AIT 所提供之流量資料 POA 模式計算比較與傳統方法操作之效益。

因  $W_1$  與  $W_2$  之取法不同，會得到不同之結果。

本文以 1960 年 10 月至 1961 年 9 月之資料代入計算，無論  $W_1$  與  $W_2$  取何值，所得之目標函數值，均較傳統之操作方法為佳，參閱表(8)及表(9)。

更由圖(19)及圖(20)圖可知當  $W_1, W_2$  取不同之值時，可得到不同之結果，操作基準線亦異。

其中以德基水庫之調節能力最強，天輪水庫之操作基準線變化最小，假如將天輪之水位保持在滿庫狀態，當可得到較多之發電，且對下游之需水量無不良之影響。

本模式中  $W_1, W_2$  之大小，可影響收斂速度，其大小應與精度互相配合。

表中所列之 E 值，尚須乘以一係數，始為真正之發電量。

表(6) ARMA 模式檢驗表

資料	模式	參數	RRS	$\lambda^2$ -Test	AIC	SSM + SSA	F-Test
SAD 7	AR(1)*	$\phi_1 = 0.6517$	269.41	19.037	-312.67	99.998	F = 0.1768
	ARMA(2,1)	$\phi_1 = 0.4407$ $\phi_2 = 0.1435$ $\theta_1 = -0.2044$	269.19	25.152	-306.72	99.976	< $F_{0.05}(2.501) = 19.500$
LDA 7	AR(1)*	$\phi_1 = 0.6870$	104.97	17.607	-787.72	99.999	F = 0
	ARMA(2,1)	$\phi_1 = 0.4624$ $\phi_2 = 0.1568$ $\theta_1 = -0.2213$	104.97	20.123	-781.73	99.996	< $F_{0.05}(2.501) = 19.500$
IDA 7	ARMA(2,1)	$\phi_1 = 0.2670$ $\phi_2 = 0.1567$ $\theta_1 = -0.2740$	$3.182 \times 10^7$	32.811	5216.5	100.00	



表(7) 預測流量與記錄流量之比較

運算 方式	年 代	項 目 方 法	預測流量與記錄流量之 相 關 係 數		總 流 量		
			預測一年	逐期預測	記錄流量	預測一年	逐期預測
旬	1971	標準化	0.68338	0.79178	2466.55	2842.98	2714.15
		對數化	0.65036	0.75039	2466.55	2257.17	2141.77
	1977	標準化	0.89048	0.87993	2502.47	2844.73	2640.19
		對數化	0.88787	0.88357	2502.47	2253.06	2195.43
	1980	標準化	0.77803	0.83629	1895.40	2847.43	2548.41
		對數化	0.78394	0.83714	1895.40	2255.94	1975.19

## 六、結論與建議

本研究之動態操作模式，具有即時操作效果，假如實際流量與預測流量不符，則重新預測流量，修正放水量，在實際執行上較現行水庫操作方更具彈性。

### (一)結論：

1. ARMA模式於枯水季，預測效果良好，於豐水季，因有颱風因素，預測較不準確。

2. ARMA模式對短期之流量預測較為準確，預測時間愈長，則誤差愈大，本研究以預測一年為目標。

3. POA模式可有效運用於長期之水庫操作，亦可運用於短期之水庫操作。

4. POA模式收斂速度與起始值之假定有密切之關係，起始值愈接近最佳解，則收斂速度愈快。

5. 以本模式求得之解答，較現行使用之模式為佳，且能得到較多之發電量。

6. POA模式為動態規劃模式之一，所求得之最佳解為局部最佳 (Local Optimum)，無法證明為整體之最佳解 (Global Optimum)，故可設定數組不同之起始值，得到不同之解答，而選用其最佳者。

### (二)建議：

1. 大甲溪流域現存之流量站甚少，各水庫之入

流量均係由台電之迴歸式求出，缺少實測之記錄，故建議應於適當之地點，增設流量站，以應所需。

2. POA模式起始值之設定，可先由傳統操作規線及其它動態規劃模式求出之解答，做為 POA 模式之起始值，以增加收斂速度。

3. 各水庫應訂出短期操作基準線，使水資源充分利用。

## 參考文獻

1. 王如意：「臺灣集水區月河川流量模擬之研究」，農業工程學報，第廿卷第4期，民國63年12月。
2. 易任：「德基、石門及曾文水庫長期距乾旱頻率分析之比較研究」，臺大農工系，民國65年5月。
3. 李劍青、郭金棟、張玉田：「臺灣河川月流量預報模式之研究」，土木水力，第5卷3期，民國67年11月。
4. 王如意：「水文序率模式之推定及其應用於臺灣河川流量模擬之研究」，臺灣水利第27卷第2期，民國68年6月。
5. 水資會：「水力發電與灌溉用水之配合研究工作報告」(甲項目)，民國69年7月。
6. 水資會：「濁水溪及大甲溪各水庫配合下游運用工作報告」，民國70~73年。
7. 易任、胡文章、朱健行：「應用數理規劃建立水庫運用基準線配合農業用水之研究」，農發會，民國71年6月。
8. 徐享崑：「水庫集水區系統入流量模擬與預測」成功大學土木研究所，博士論文，民國72年12月。

9. 郭振泰、楊德良、陳鴻震、鄧志浩、鄭銘欽：「序率線性規劃模式應用於翡翠水庫運轉之研究」，臺大土木研究所水利組，第7303號報告，民國76年3月。
10. 王如意、易任：「應用水文學」（下冊），國立編譯館，民國73年9月，第2版。
11. 黃永達：「線性系統分析」，中央圖書出版社，民國74年6月（修訂版）。
12. 萬象：「串聯水庫系統優選操作模式之研究」，臺灣大學農業工程研究所水利組，碩士論文，民國74年6月。
13. Box, G. E., and G. M. Jenkins: "Time Series Analysis: Forecasting and Control" San Francisco: Holden Day, 1976.
14. Bras, R. L., R. Buchanan, and K. C. Curry: "Real time adaptive closed loop control of reservoirs with the High Aswan Dam as a case study" W. R. R. 19(1), 33-52, 1976.
15. David, A. W., Chattergy: "Introduction to Nonliner Optimization: A Problem Solving Approach" Elsevier North-Holland, Inc. 1978.
16. Dreyfus, E. S.: "The Art and Theory of Dynamic Programming", Academic Press, Inc. 1977.
17. Hipel, K. W., A. I. McLeod, W. C. Lennox: "Advance in Box-Jenkins Modelling 1: Model Construction" W. R. R. 13(3): 567-77, 1977.
18. Howson, H. R. and N. G. F. Sancho: "A New Algorithm for the Solution of Multi-state Dynamic Programming Problems", Math. Program., 8, 104-116, 1975.
19. Loucks, D. P., J. R. Stedinger, and D. A. Haith: "Water Resource Systems Planning and Analysis." Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.
20. Lucas, N. J. D. and P. J.: "Short-Term Hydroelectric Scheduling Using the Progressive Optimality Algorithm" W. R. R. 21(9), 1456-1458, 1985.
21. Mariño, M. A. and B. Mohammadi: "Multi-purpose Reservoir Operation (Part 1 and part 2)" J. Hydrol. 69. 1-28, 1984.
22. Mariño, M.A., and H. A. Loaiciga: "Dynamic Model for Multi-reservoir operation" W. R. R. 21(5), 619-630, 1985.
23. Mariño, M.A., and H.A. Loaiciga: "Quadratic Model for Reservoir Management: Application to the Central Valley Project" W. R. R. 21(5), 631-641, 1985.
24. McLeod, A. I., K. W. Hipel, and W. C. Lenox: "Advance in Box-Jenkins Modeling, 2: Application," W. R. R. 13(3) 577-86, 1977.
25. Papoulis. A: "Probability, Random Variables, And Stochastic Process."
26. Pereira, M.V.F., G.C. Oliveira, C.C.G. Costa, and J. Kelman: "Stochastic Streamflow Models for Hydroelectric Systems," W.R.R. 20(3), 379-390, 1984.
27. Rao, R. A., and R. L. Kashyap: "Stochastic Modeling of River Flows." I. E. E. E. Trans Automatic Control. AC-19(6): 874-81, 1974.
28. Rodriguez-Iturbe, I. and R.L. Bras: "Random Functions and Hydrology" Addison-Wesley, Inc. 1985.
29. Salas, J. D. Boes, and R. A. Smith: "Estimation of ARMA Models With Seasonal Parameters" W. R. R. 18(4), 1006-10, 1982.
30. Salas, J. D., J. W. Delleur, V. Yevjevich, and W.L. Lane: "Applied Modeling of Hydrologic Time Series" Littleton, Colo. Water Resources Publications. 1980.
31. Tingsanchali, T, S. Selvalingam, and A. Arbbahirama: "Optimum Water Resources Utilization Study Ta Chia River Basin", Final Report, The Taiwan Power Company. ROC. 1979.
32. Turgeon, A.: "Optimal operation of a multi-reservoir power Systems With stochastic Inflow", W. R. R. 16(2), 275-283. 1980.
33. Turgeon, A.: "Optimal Short-term Hydro scheduling from the Principle of Progressive Optimality", W. R. R. 17(3), 481-486, 1981.
34. Wu S. M. and S. M. Pandit: "Time Series and System Analysis with Application", John Wiley & Sons, Inc., 1983.
35. Yeh, W. W-G.: "Reservoir Management and Operation Models: A State-of-the-Art Review" W.R.R. 21(12), 1797-1818, 1985

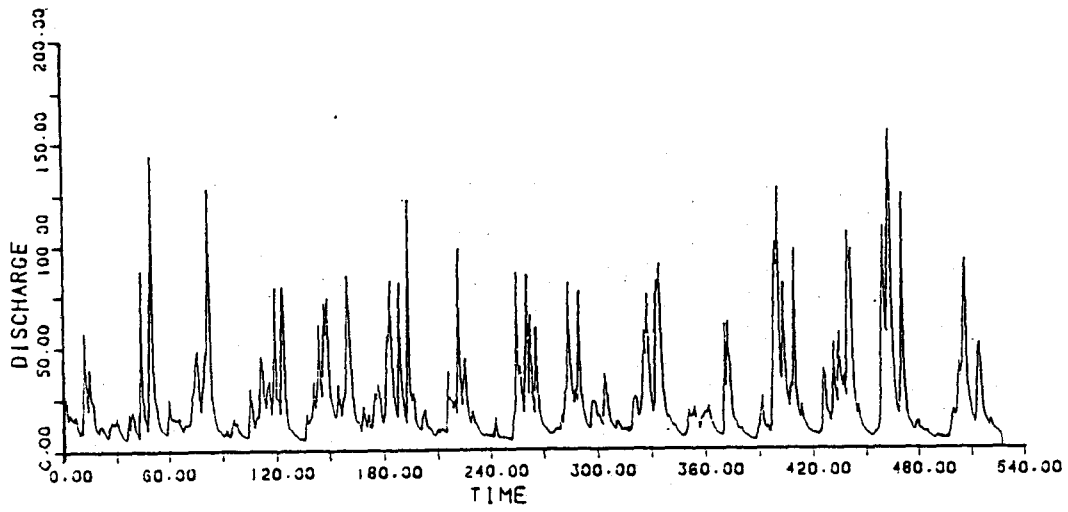
表(8) 放水量及發電量 ( $W_1 = 1000, W_2 = 10$ )

項目 月份	起 始 值			$W_1 = 1000$ $W_2 = 10$		
	放 水 量	需 水 量	差 額	放 水 量	需 水 量	差 額
10	43.864	47.637	- 3.773	59.235	47.637	11.598
11	35.043	41.476	- 6.433	41.747	41.476	0.026
12	38.060	40.736	- 2.676	40.747	40.736	0.011
1	11.439	23.554	- 12.115	33.800	23.554	10.246
2	37.359	27.196	10.163	28.530	27.196	1.334
3	43.105	37.243	5.862	44.874	37.243	7.631
4	53.726	34.921	18.805	35.794	34.921	0.873
5	103.848	35.398	68.450	82.179	35.398	46.781
6	96.371	33.483	62.888	95.901	33.483	62.418
7	40.259	47.068	- 6.809	48.095	47.068	1.027
8	72.550	47.523	25.027	64.704	47.523	17.181
9	95.394	47.779	47.615	95.950	47.779	48.171
E = 3312.9633				E = 3331.210		

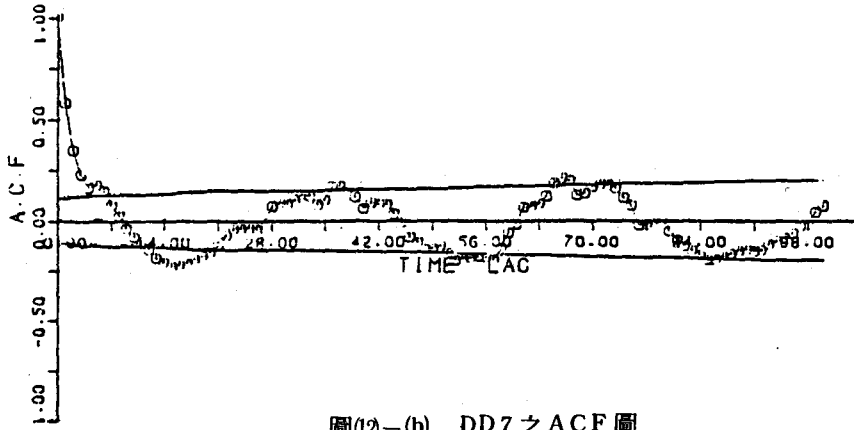
(當  $S > 0$  時, 令  $S = 0$ )

表(9) 放水量及發電量 ( $W_1 = 0, W_2 = 100$ )

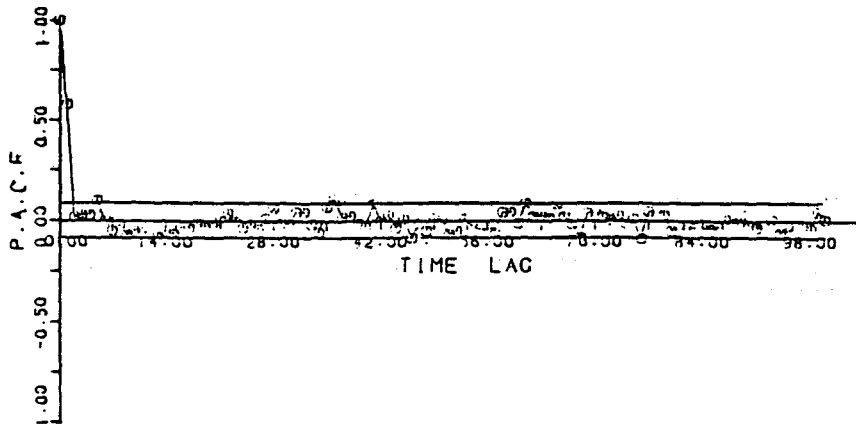
項目 月份	起 始 值			$W_1 = 0$ $W_2 = 100$		
	放 水 量	需 水 量	差 額	放 水 量	需 水 量	差 額
10	43.864	47.637	- 3.773	43.864	47.637	- 3.773
11	35.043	41.476	- 6.433	35.024	41.476	- 6.452
12	38.060	40.736	- 2.676	32.215	40.736	- 8.521
1	11.439	23.554	-12.115	16.280	23.196	- 7.274
2	37.359	27.196	10.163	19.326	27.196	- 7.870
3	43.105	37.243	5.862	46.423	37.243	9.180
4	53.726	34.921	18.805	56.583	34.921	21.662
5	103.848	35.398	68.450	84.499	35.398	49.101
6	96.371	33.483	62.888	80.937	33.483	47.454
7	40.259	47.068	- 6.809	39.894	47.068	- 7.174
8	72.550	47.523	25.027	96.837	47.523	49.314
9	95.394	47.779	47.615	118.629	47.779	70.850
E = 3312.9633				E = 3370.1455		



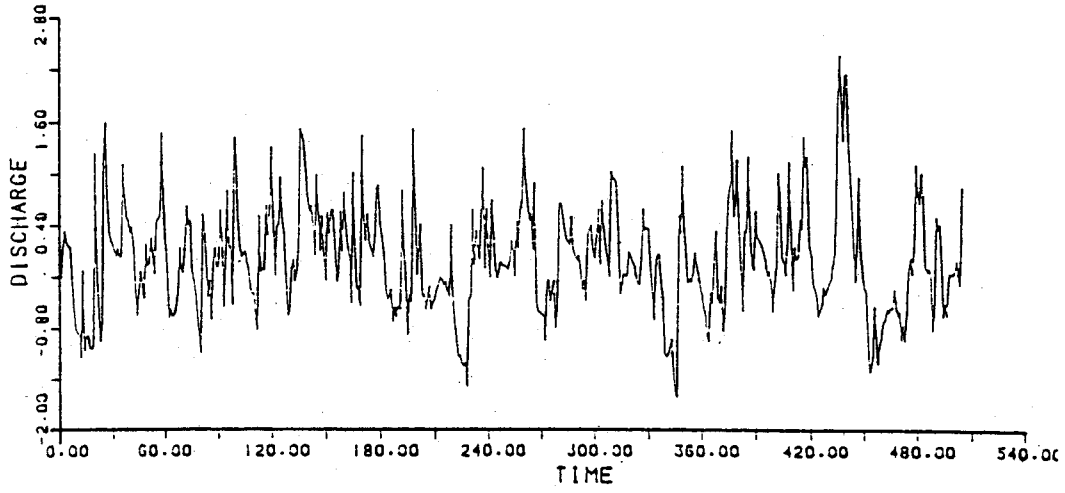
圖(12)-(a) DD7之時序列圖



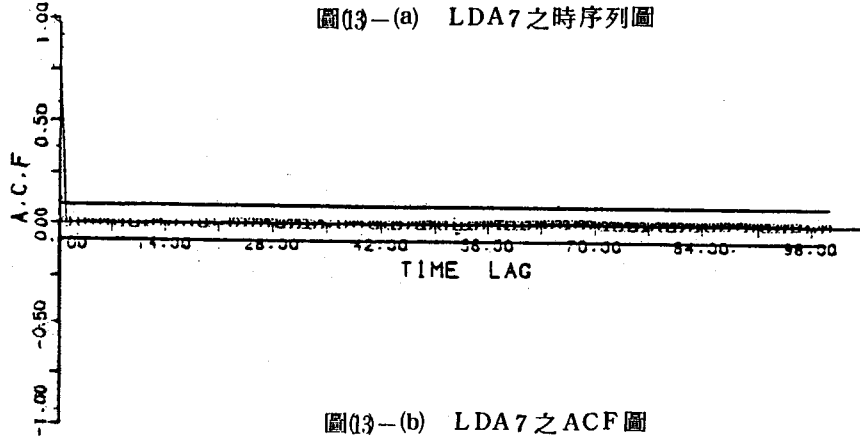
圖(12)-(b) DD7之ACF圖



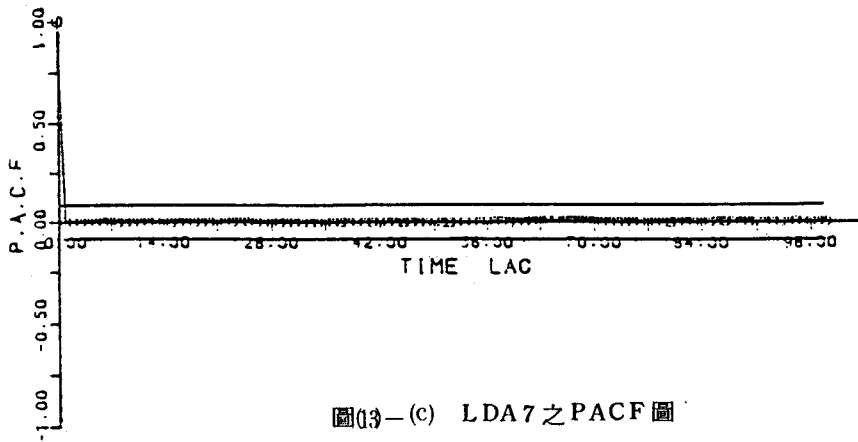
圖(12)-(c) DD7之PACF圖



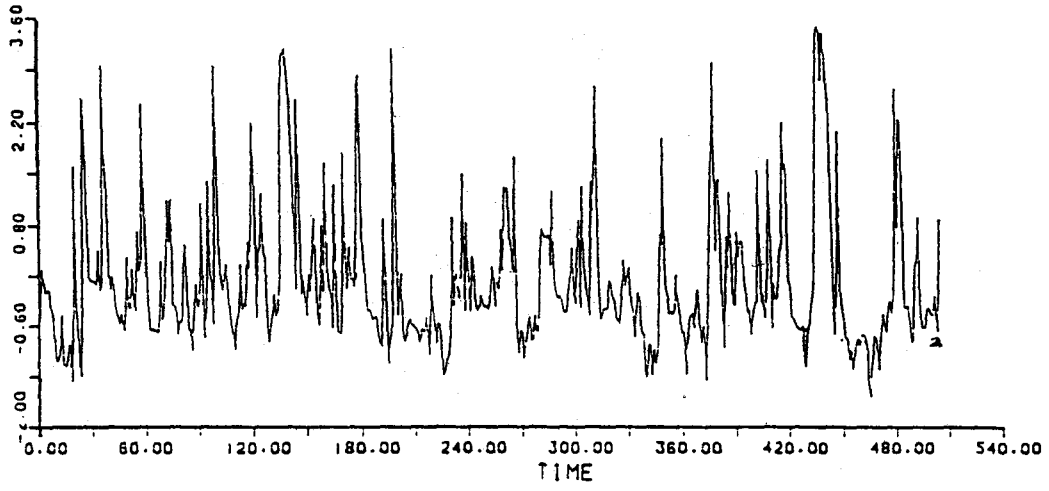
圖(13)-(a) LDA7之時序列圖



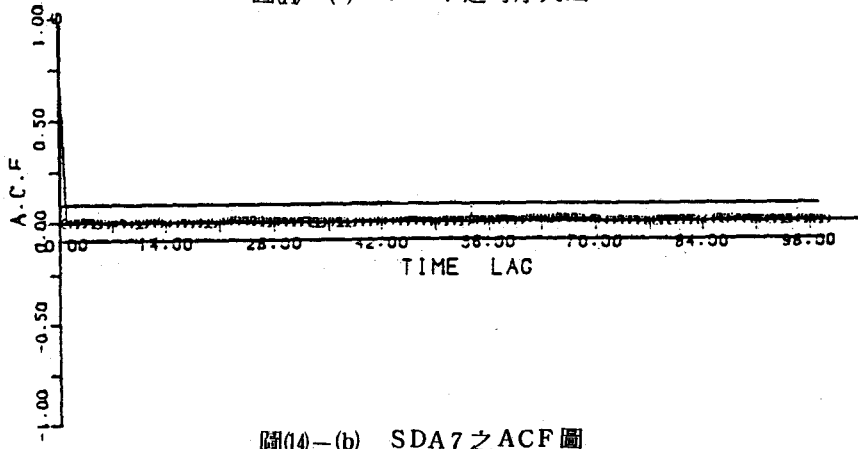
圖(13)-(b) LDA7之ACF圖



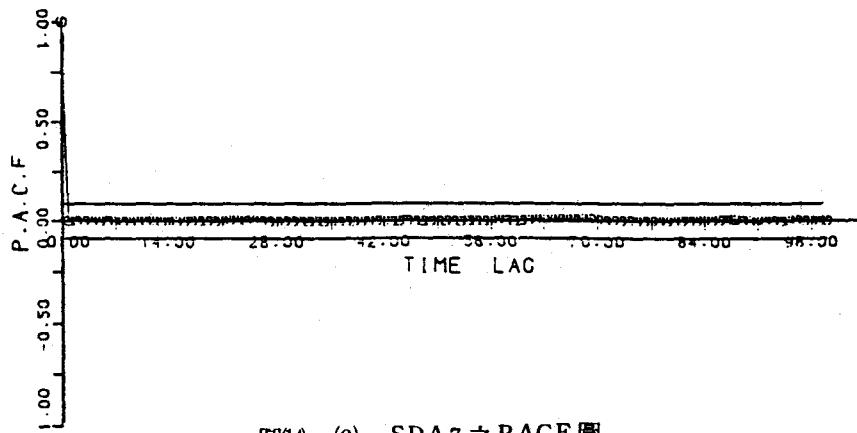
圖(13)-(c) LDA7之PACF圖



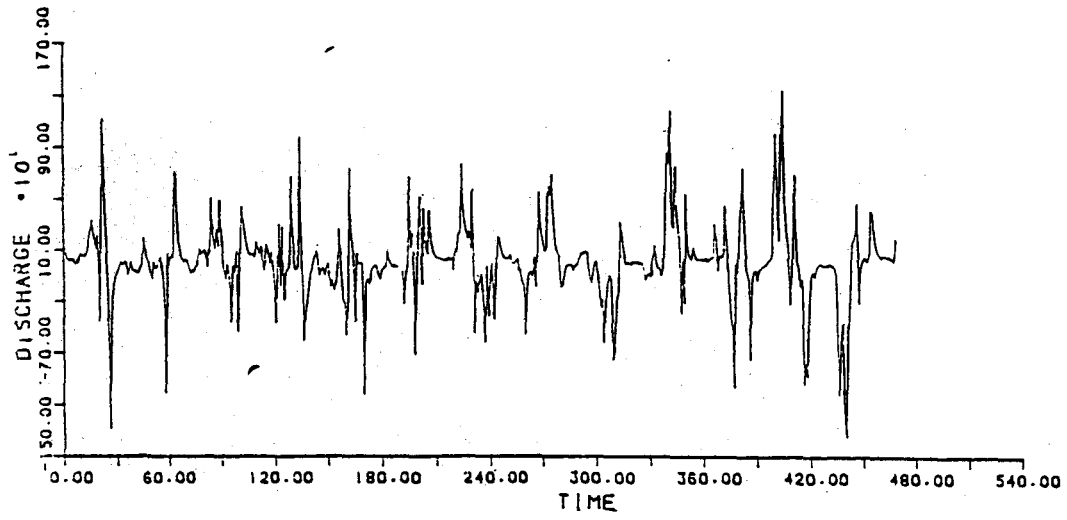
圖(14)-(a) SDA7之時序列圖



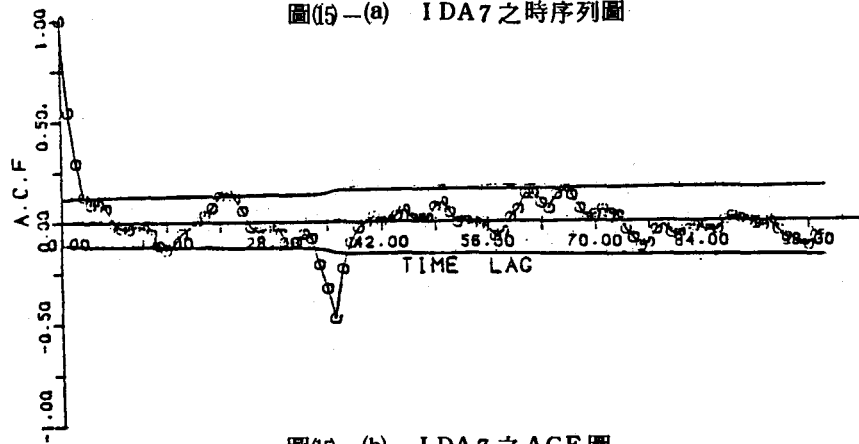
圖(14)-(b) SDA7之ACF圖



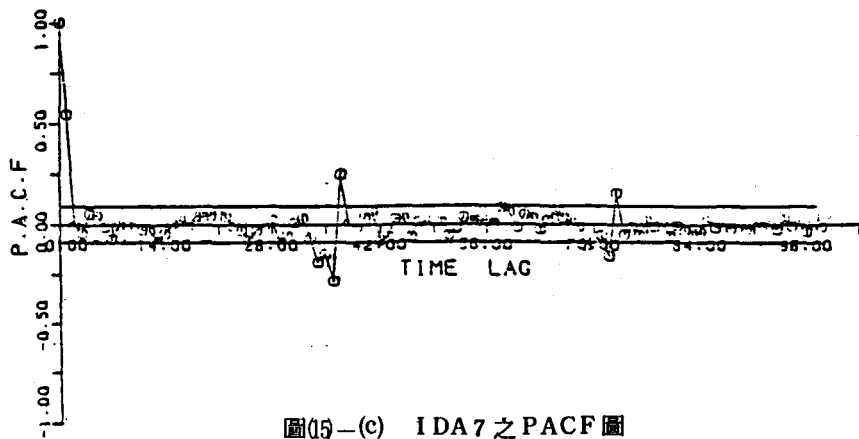
圖(14)-(c) SDA7之PACF圖



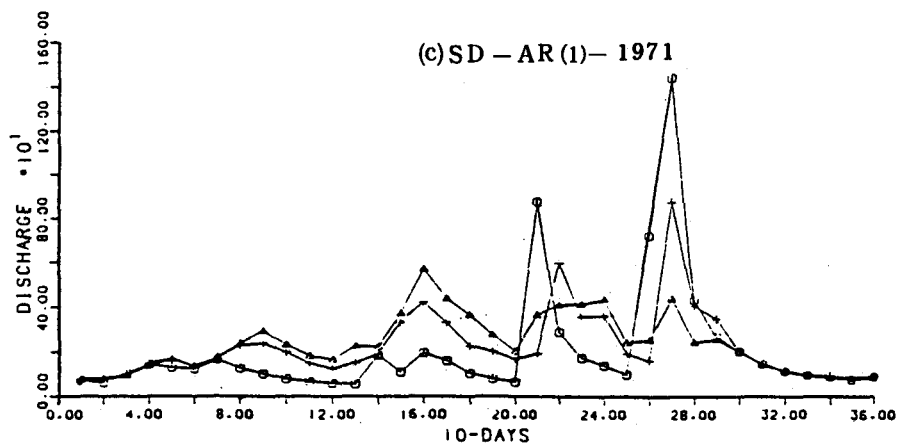
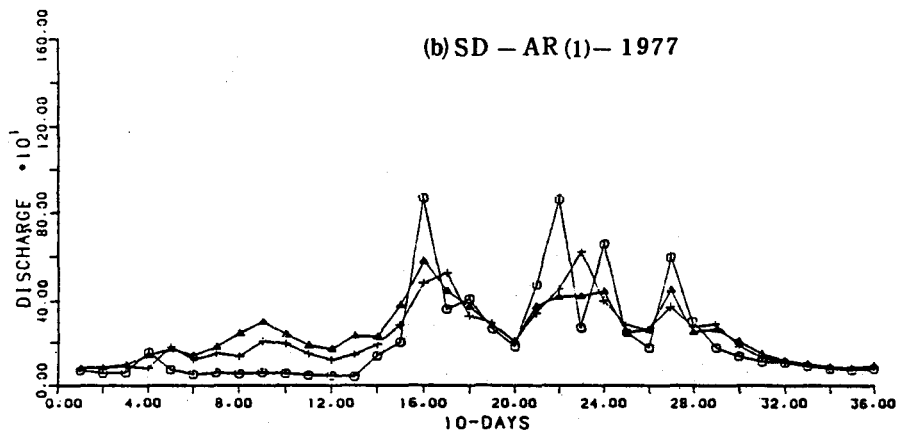
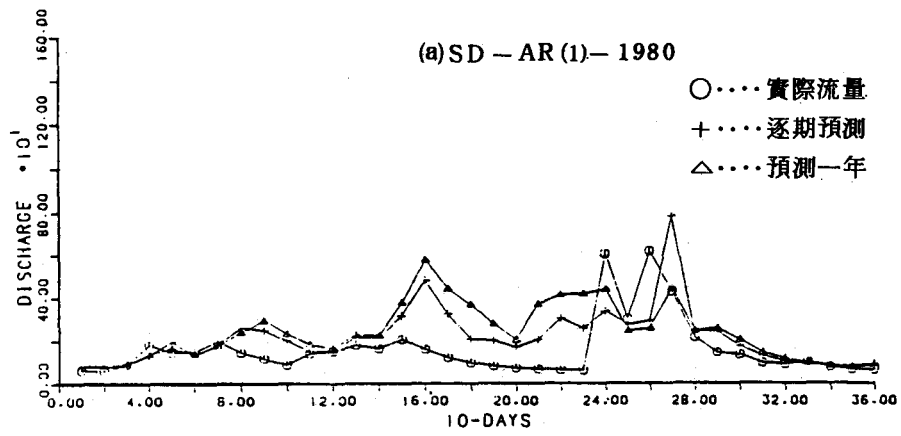
圖(15)-(a) IDA7之時序列圖



圖(15)-(b) IDA7之ACF圖

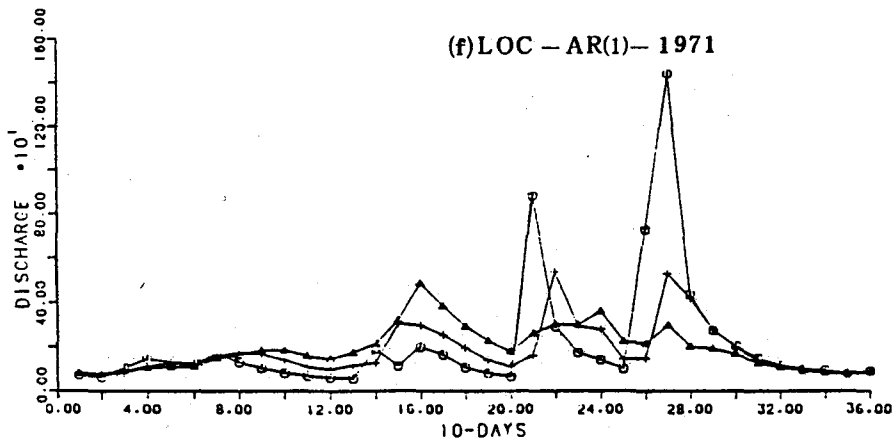
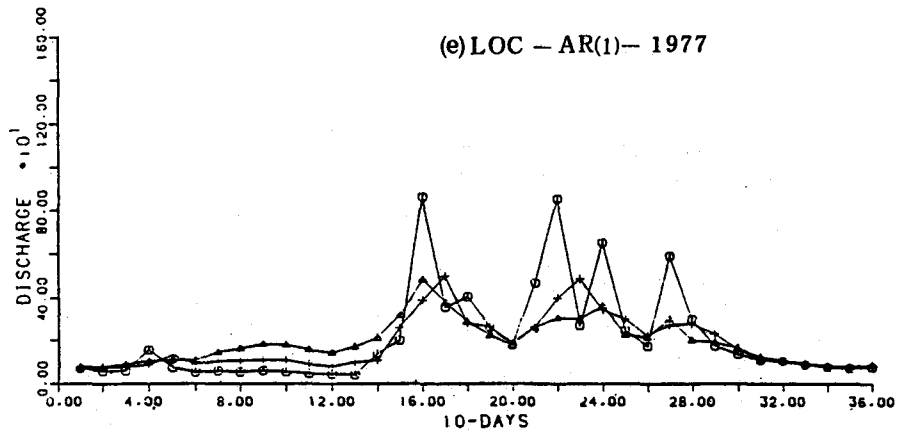
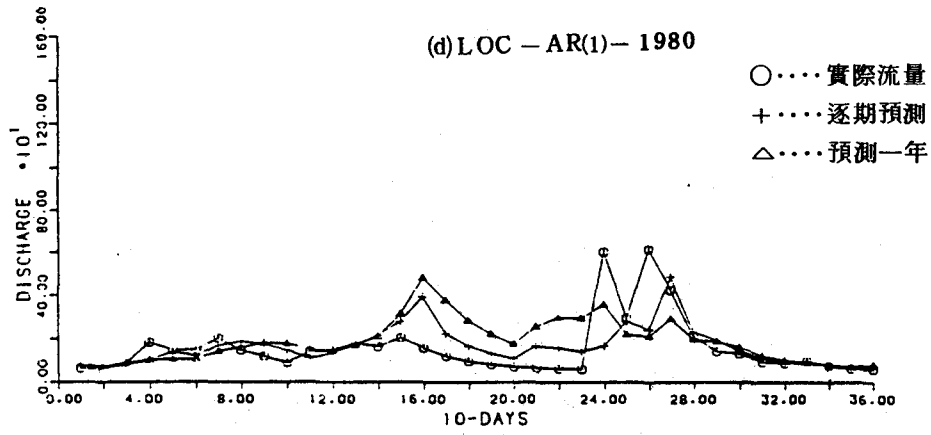


圖(15)-(c) IDA7之PACF圖

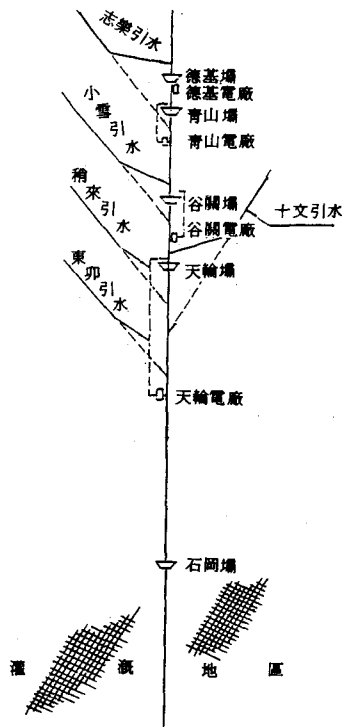


圖(16) 旬流量預測圖(1)

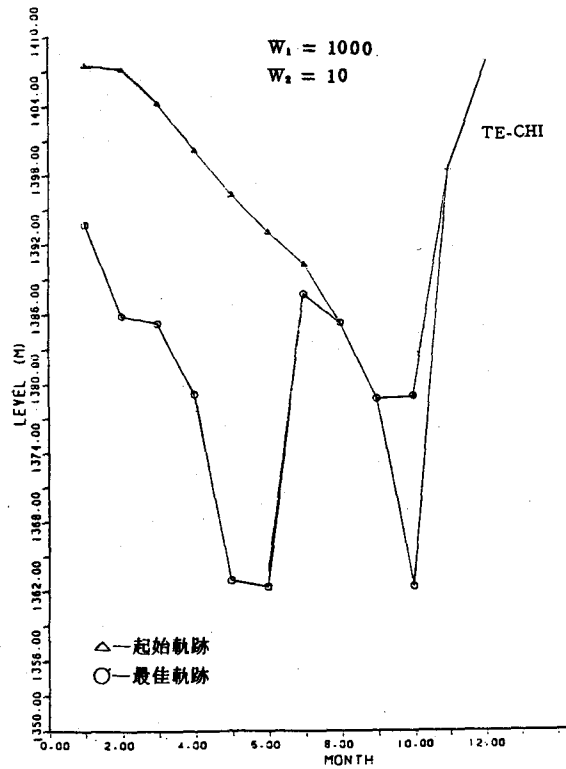




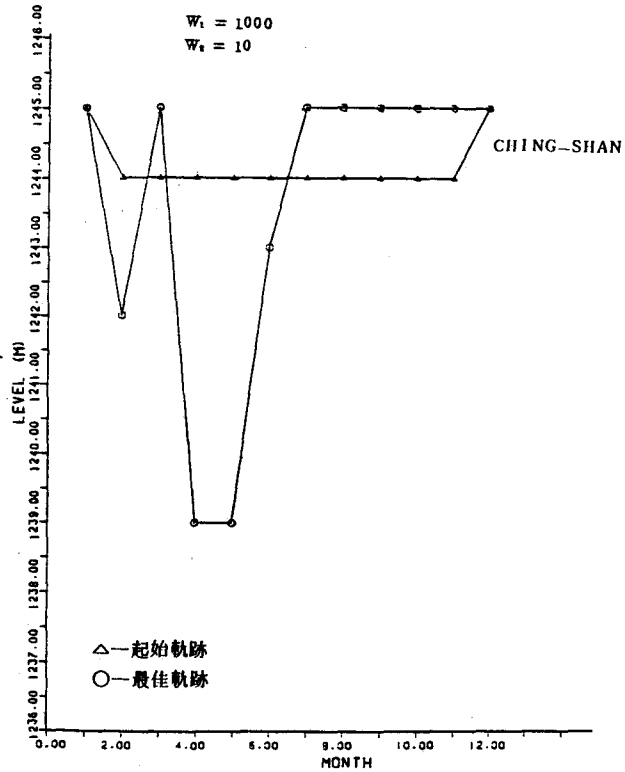
圖(17) 旬流量預測圖(2)



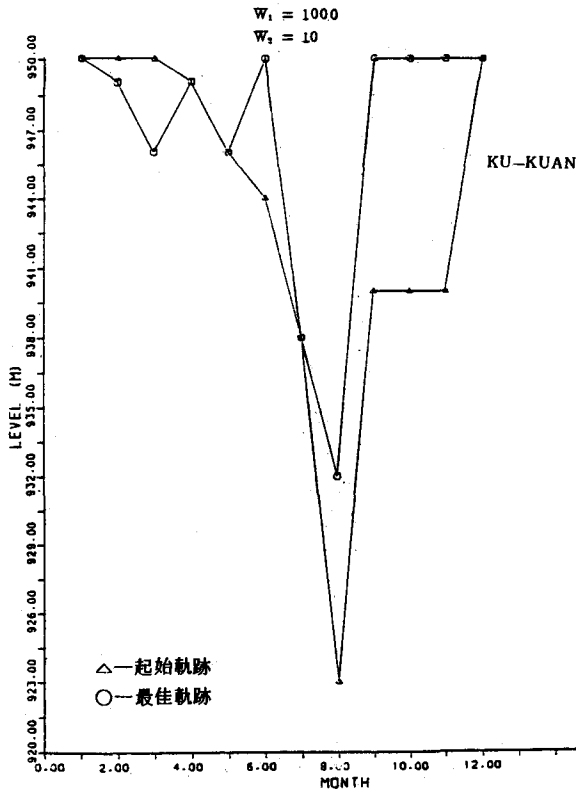
圖(18) 大甲溪水力系統示意圖



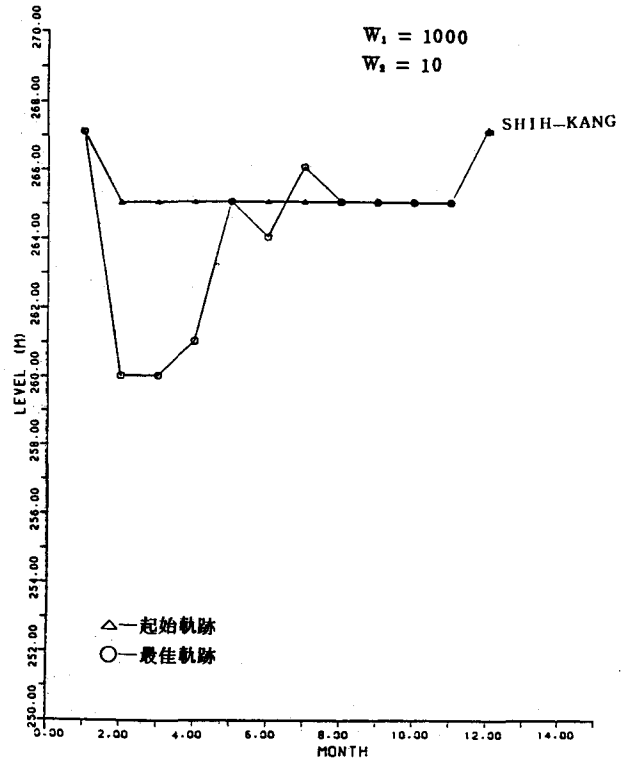
圖(19)-(a) 德基水庫操作基準線



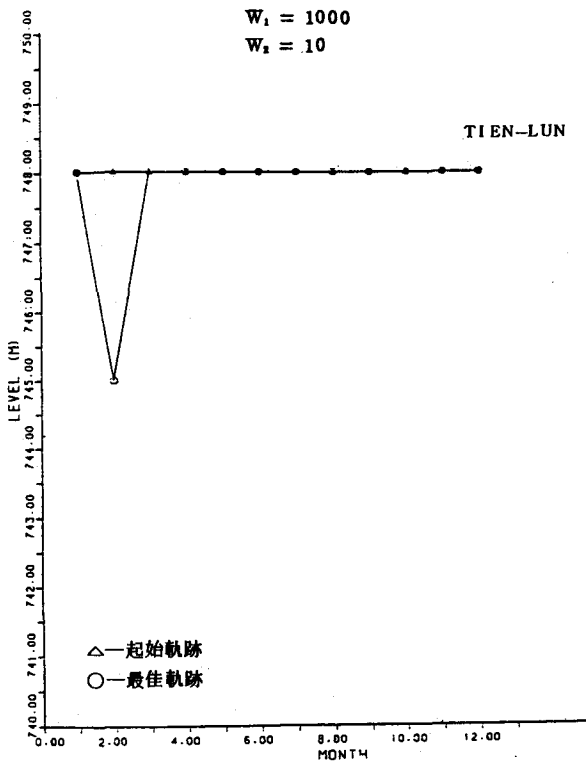
圖(19)-(b) 青山水庫操作基準線



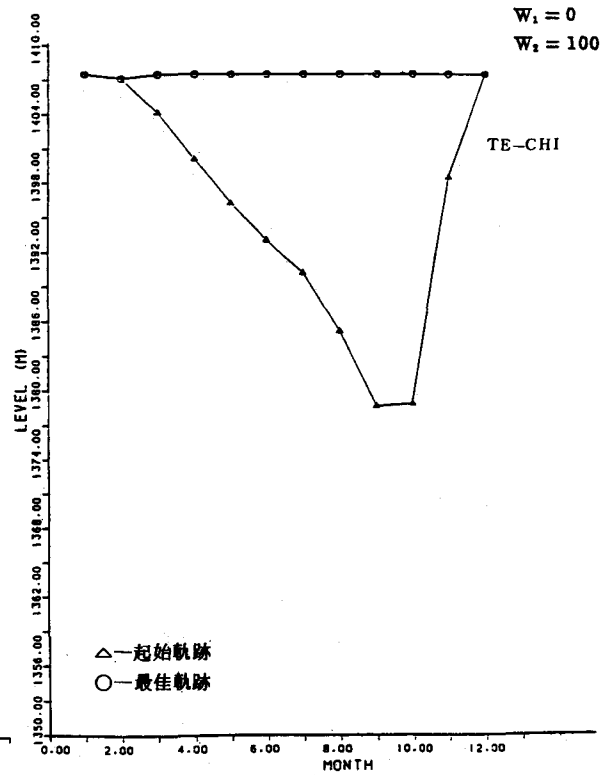
圖(19)-(c) 谷關水庫操作基準線



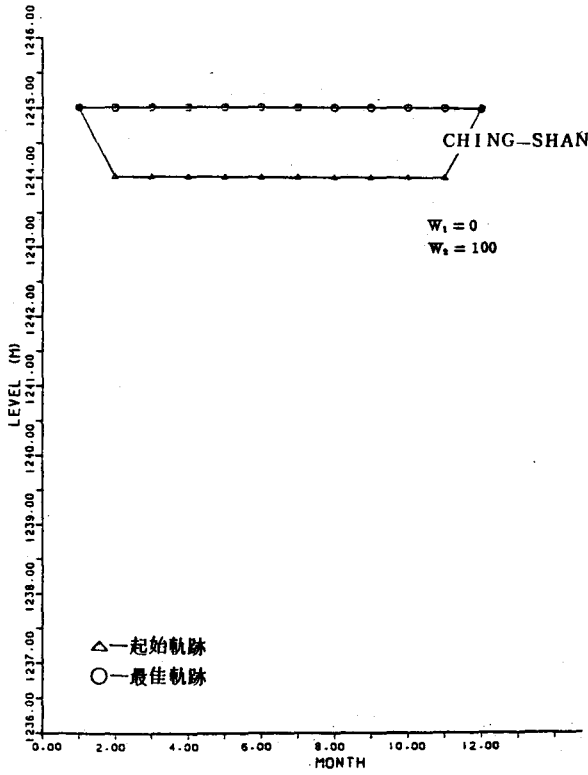
圖(19)-(e) 石岡水庫操作基準線



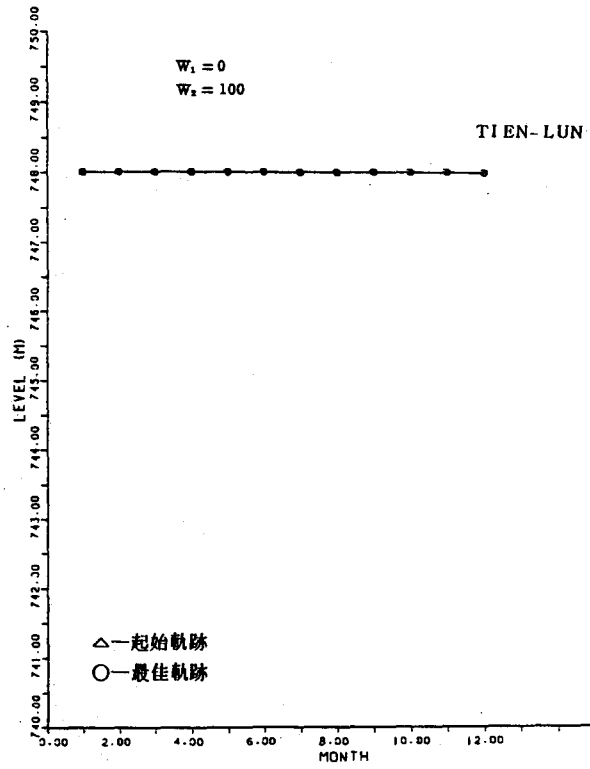
圖(19)-(d) 天輪水庫操作基準線



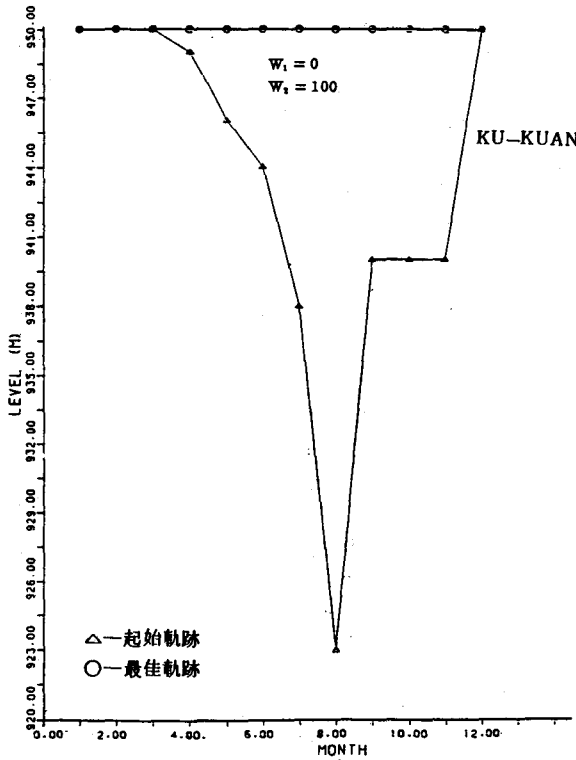
圖(20)-(a) 德基水庫操作基準線



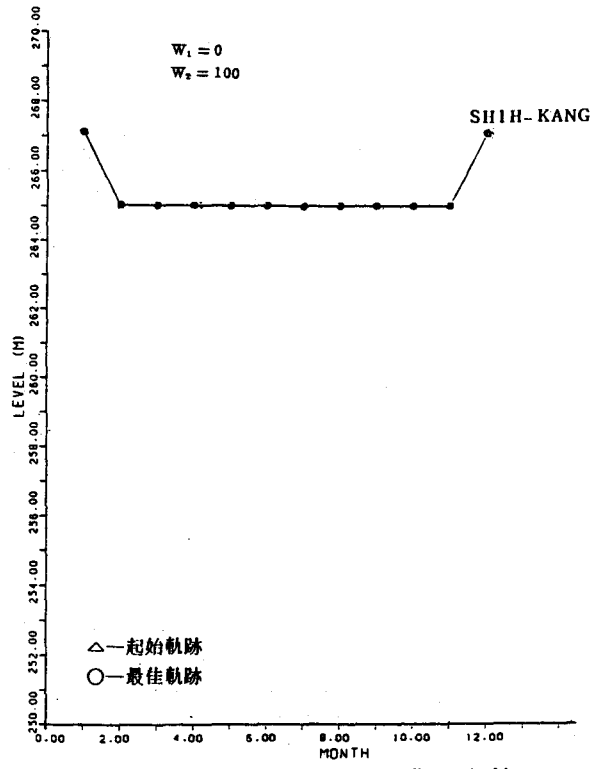
圖(2)-(b) 青山水庫操作基準線



圖(2)-(d) 天輪水庫操作基準線



圖(2)-(c) 谷關水庫操作基準線



圖(2)-(e) 石岡水庫操作基準線