

# 最佳參數維度分析應用於地下水 抽水量參數鑑定模式

## Optimum Dimension Analysis on Groundwater Pumpage Parameter Identification Model

國立臺灣大學農工系教授

曹 以 松

Yii-Soong Tsao

國立臺灣大學農工系碩士

黃 國 倫

Kuo-Lun Hwang

### 摘 要

地下水估算參數的準確性及其維度在地下水數值模式中具有重大意義。本文將以統計方法配合地下水參數鑑定模式對於地下水模式中以抽水井配置及抽水量為參數做一研究與分析。

本文採用邊界元素法 (Boundary Element Method) 為數值方法，因其對點 (Source)，沉 (Sink) 流之易於處理，且內域方向法 (Feasible Direction Method) 被應用於優選法中，而協方差 (Covariance) 分析被用來推估估算參數的可靠性，當參數維度增加時以最小平方方法 (Least Square Method) 表示的模式誤差將減小，而估算參數的誤差將增大，而減少了參數的可靠性。而估算參數的可靠性將可由協方差矩陣的模根 (Norm) 來判斷，如此我們便可以決定一最佳的參數維度。

### Abstract

The reliability and the dimensions of the ground-water parameters in estimating numerical model are very important. This paper presents a statistical method in conjunction with groundwater parameter identification model for the estimating of parameters namely the well locations and pumpage.

Boundary element method is the numerical method used, because it can solve sources and sinks problem at ease. In optimization method feasible direction method is used. Covariance analysis is also applied to estimate the reliability of the estimated parameters. As the dimension of unknown parameters are increased, the models error presents by least square criterion will generally decrease, but in the meantime the estimated parameter error will also increase, which reduces the reliability of the estimation of parameters. Norm of the covariance matrix can be used as criterion of the reliability of the estimates and to determine the optimum dimension in parameterization.

## 一、前 言

地下水在水資源中佔有一重要地位，其屬一種可再生性的水資源。倘不加以開發利用，實為一種資源的浪費。然而，若開發過度則又產生了，諸如：地下水位下降，地下水污染，地盤下陷……等問題。因此如何有效妥善地開發作永久之用，為從事地下水研究者全心全力加以注意的問題。

地下水之研究隨著電子計算機之發展而進步，因此地下水數學模式被發展來解析模擬地下水流場，其中經常使用的為有限差分法、有限元素法。而 Ligett 於 1977 年成功地將邊界元素法應用於地下水領域。而在傳統的正向求法中，參數的決定採用了試誤法來模擬，會浪費很多的計算時間與費用，有時也無法找到適當的參數結果。由於此因素，反向推求的參數鑑定採用了優選技巧配合數值方法來研究。反向推求的研究在國外重點均著重於流通係數(T) 與貯蓄係數(S)。國內之研究則著重於抽水量及抽水井配置之研究，雖起步較晚，但成就亦輝煌。

參數化維度直接受到觀測資料的質與量影響。而在現地理，觀測資料的數目常被限制且觀測的精度常受干擾所影響。若沒有控制參數維度則常會造成不穩定的現象 [Yakowitz and Duckstein, 1980] 在反向推求問題中參數的不穩定常會造成參數在沒有限制條件下產生偏大或偏小，有時且會失去物理意義；如對參數給予上下限的限制條件則參數值將被侷限在此範圍內。而此種不穩定的現象常可藉著減少參數維度而使其趨向穩定。一般都已認知到參數維度的增加將會減少模式誤差但參數值的不可定性却增加了。而此兩種誤差一般上可以被求得，我們可以據此而決定使各種誤差為最小，則到底參數維度為多少是最佳的。Emsellem and de Marsily [1971] 是第一個考慮最佳的區域模型。Yen and Yoon [1976] 更採用了統計判斷系統過程而決定了最佳的區域模型。Yhah et. al.[1978] 更表示了最佳參數化維度與觀測水頭之關係。而此種關係隨後也被 Yeh and Yoon [1981] 和 Yeh. et. al. [1983] 和 Kitanidis and Vomvoris [1983] 所繼續研究。

## 二、理論與公式推導

地下水限制含水層中若具有穩定性，非齊次性

且等向性之流場吾人可以如下控制方程式來描述它：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T \frac{\partial h}{\partial y} \right] = \sum_{k=1}^{NW} Q_k \delta(x-x_k) \delta(y-y_k) \dots \dots (1a)$$

邊界條件：

$$h(x,y) = h_1(x,y) \quad (x, y) \in \Gamma_1 \dots \dots (1b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} = q_1(x,y) \quad (x, y) \in \Gamma_2 \dots \dots (1c)$$

$\Gamma$  為流通係數， $Q_k$  為在座標  $(x_k, y_k)$  的抽水量， $h$  為管壓水頭， $q$  為水流梯度， $T$  地水流通參數。

(-) 地下水數值方法

一般為解此控制方程式，數值方法將被使用，如：有限差分法、有限元素法及邊界元素法。而本文所鑑定之參數包括了抽水井位置配置及抽水量，因為邊界元素法對於點 (Source)，沉 (Sink) 的特殊處理，所以本文採用了邊界元素法<sup>(1)</sup>，經由數值方法的處理，吾人將利用邊界節點為基點的方程式以矩陣表示如下：

$$[RN][h] = [RLN] \left[ \frac{\partial h}{\partial n} \right] + [LN][Q] \dots (2a)$$

而以區域內的點 (如觀測井位置) 為基點的方程式以矩陣表示如下：

$$[A][h] = [B] \left[ \frac{\partial h}{\partial n} \right] + [h_i] + [C][Q] \dots (2b)$$

$[RN]$ ,  $[RLN]$ ,  $[A]$ ,  $[B]$  均為由基點及邊界節點所構成的係數矩陣； $[LN]$ ,  $[C]$  為由抽水點與邊界節點及基點所構成的係數矩陣， $[h]$ ,  $\left[ \frac{\partial h}{\partial n} \right]$  代表邊界節點的水頭及水位梯度， $h_i$  為內部基點水頭。

將(2a)式代入(2b)式，消去  $\left[ \frac{\partial h}{\partial n} \right]$  項，矩陣重新組合得

$$[AA][h] = [h_i] + [CC][Q] \dots \dots \dots (3)$$

於正向求法中，吾人因知道所有參數值可利用(3)式求得各水頭。

(-) 參數鑑定模式

而反向推求數學模式中，吾人可以利用數值方法而將問題以有限制條件之優選法處理<sup>(1)</sup>，其目標函數可如下表示：

$$F = \bar{W}_1 [e_1(P_1 \dots P_L)]^T [e_1(P_1 \dots P_L)] + \dots + \bar{W}_m [e_m(P_1 \dots P_L)]^T [e_m(P_1 \dots P_L)] \dots (4)$$

$$e_j(P) = h^*_j - h_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \dots \dots (5)$$

$h_j^*$ ：為計算水頭值

- $h_j$  : 為觀測水頭值
- $\varepsilon_j$  : 為計算水頭與觀測水頭差
- $P$  : 參數值
- $L$  : 參數個數
- $m$  : 觀測井數目
- $\bar{w}_j$  : 非負的權重函數

將(4)式改寫成矩陣式：

$$F = [\varepsilon(P)]^T [w] [\varepsilon(P)] \dots\dots\dots (6)$$

上式  $w_{ij} = \bar{w}_j$ ，則參數推估模式可如下表示：

$$\min_P F = [\varepsilon(P)]^T [w] [\varepsilon(P)] \dots\dots\dots (7a)$$

$$P_l \leq P \leq P_u \dots\dots\dots (7b)$$

$P_l$  與  $P_u$  分別代表參數的上下限值，此限制條件為必需的以確保參數值合乎實際物理現象。

選擇一最初參數向量  $P^0$  則可將計算與觀測水頭誤差值  $\varepsilon_h$  以線性化表示：

$$\varepsilon_h(P) = \varepsilon_h(P^0) + \left[ \frac{\partial \varepsilon_h(P)}{\partial P} \right]_{P=P^0} (P - P^0) + HOT \dots\dots\dots (8)$$

此展開式的高階項 (HOT) 吾人將不予考慮，則買柯比係數矩陣 (Jacobian Coefficient)，

$\left[ \frac{\partial \varepsilon_h(P)}{\partial P} \right]_{P=P^0}$ ，可以由擾動係數法 (Influence coefficient Method)，感應方程式法 (Sensitivity Equation Method)，變分法 (Variational Method) 求得<sup>(1)</sup>。因此可將(8)式寫成：

$$\varepsilon_h = \varepsilon_h(P^0) + C(P - P^0) \text{ 或 } \varepsilon_h(P) = cd - D \dots\dots\dots (9)$$

上式  $C = \left[ \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial P} \right]$  為  $M \times L$  矩陣， $d = P - P^0$

$$D = -\varepsilon_h(P^0)$$

將(9)式代入(6)式則目標函數可表示成

$$F = (cd - D)^T w (cd - D) = d^T (C^T w C) d - 2d^T (C^T w) D + D^T w D$$

參數鑑定模式則可表示成

$$\min_P F = d^T (C^T w C) d - 2d^T (C^T w) D + D^T w D \dots\dots\dots (10a)$$

$$P_l \leq P \leq P_u \dots\dots\dots (10b)$$

( $\Rightarrow$ ) 參數可靠性及維度分析

今吾人已建立參數推估模式，但模式中需採用多少個參數將難以決定。吾人將利用估算參數的協方矩陣 (covariance matrix of the estimated parameters) 來決定最佳的參數維度，且可用以判斷參數之可靠性。估算參數的協方矩陣可以如下

表示：

$$COV(\varepsilon_P) = E[\varepsilon_P \varepsilon_P^T]$$

當目標函數滿足局部最小值時，由(10a)式

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial P} \Big|_{P^1} = 2(C^T w C) d - 2C^T w D = 0$$

$$\therefore d = P^1 - P^0 = (C^T w C)^{-1} C^T w D$$

$$\text{令 } C_w = w^{1/2} C, \varepsilon_{hw} = w^{1/2} \varepsilon_h$$

$$\text{則 } \varepsilon_P = -(C_w^T C_w)^{-1} (C_w^T \varepsilon_{hw})$$

而其估算參數的協方矩陣可以如下表示：

$$\begin{aligned} C_T &= COV(\varepsilon_P) = (C_w^T C_w)^{-1} C_w^T E (\varepsilon_{hw} \varepsilon_{hw}^T) C_w (C_w^T C_w)^{-1} \\ &= \sigma_w^2 (C_w^T C_w)^{-1} \\ &= \frac{F(P^0) (C_w^T C_w)^{-1}}{m - L} \end{aligned}$$

協方差矩陣中，其模根 (Norm) 定義如下：

$$\|CT\| = \left[ \sum_{ij} C_T^2 \right]^{1/2}$$

由此模根的值越小則參數可靠性愈大，且可用以尋找最佳維度。

( $\Rightarrow$ ) 範例

範例一：

有一區域圖一，缺少抽水井及抽水量資料，(實際上有一口抽水井於原點以  $-2\pi$  抽水)，今吾人在此區域設置了 8 口觀測井以觀測水位表，且吾人由鑽探資料及抽水試驗知道此區域為一受壓含水層且水力流通係數為 1，今吾人想藉此而知道此區域抽水井數目，位置及其抽水量。

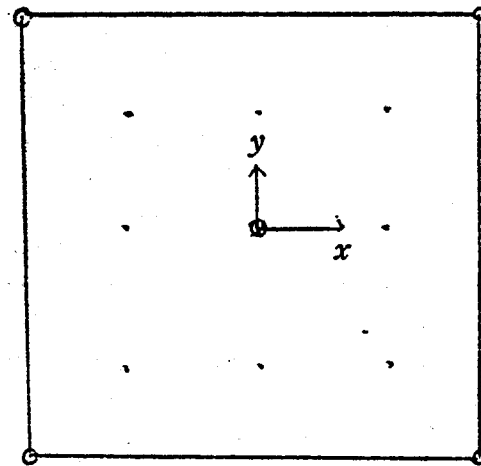


圖 1 範例一圖

- 觀測井
- 邊界節點
- ⊗ 抽水井

表 1 邊界節點資料

x	y	管 壓 水 頭
-10.0	-10.0	2.956
-10.0	10.0	2.956
10.0	10.0	2.956
10.0	-10.0	2.956

表 2 觀測井資料

x	y	管 壓 水 頭
-5.0	-5.0	2.2628643
0.0	-5.0	1.9162907
5.0	-5.0	2.2628643
-5.0	0.0	1.9162907
0.0	5.0	1.9162907
5.0	5.0	2.2628643
5.0	0.0	1.9162907
-5.0	5.0	2.2628643

今先假設有一口抽水井以  $-4.2832$  於  $(0.9, 0.9)$  位置抽水，經由參數推估模式 15 次疊代過程使用了 1.38CPU 時間計算出抽水井最佳位置  $(0.699 \times 10^{-5}, 0.699 \times 10^{-5})$  以  $-6.28310$  抽水，而最後的模式誤差為  $0.497911 \times 10^{-10}$ ，計算出估算

參數的協方矩陣的模根為  $0.27864066 \times 10^{-5}$ 。

再假設有二口抽水井分別以  $-4.2832$  及  $-1.0$  於  $(0.9, 0.9)$ ， $(4.0, 4.0)$  位置上抽水，經由參數推估模式使用了 14.064 CPU 時間，找到最佳抽水井位置  $(-0.01445, -0.145197)$ ， $(1.15096, 1.15148)$  分別以  $-6.20323$ ，及  $-0.08009$  抽水，而最後的模式誤差為  $0.448433 \times 10^{-6}$  估算參數的協方矩陣的模根為  $0.40913248 \times 10^{-1}$ 。

由假設 1 口及 2 口抽水井，吾人可以判斷出 1 口抽水井時其目標函數及協方矩陣的模根均較小，因此吾人可以斷言，以 1 口來模擬較為可靠，且比較此 2 例子在 2 口時其中之 1 口抽水量接近於零可能為多餘的。

今吾人為了解吾人所設定參數抽水井位置  $x$ ， $y$  及抽水量  $Q$ ，若吾人固定其中二參數改變另一參數，而不經由優選法以研究其目標函數及推估參數之誤差與實際誤差之情形。首先吾人固定  $Y$ ， $Q$  等於 0， $-2\pi$ ，改變  $X$  如表(3)及圖(2)。再則固定  $x$ ， $y$  等於 0，0 而改變  $Q$  如表(4)，及圖(3)。在改變  $x$  中，當  $x = 5$  時，因抽水井與觀測井重疊所以計算出之觀測井水頭負無限大，計算機無法處理，因此吾人給予一負很大的值。吾人可以發現在觀測井附近目標函數將受影響，所以抽水井位置的起始值非常重要，吾人可經由幾次試驗及各函數值很容易判斷出是否為最佳之抽水井位置。而在固定抽水井位

表 3：改變抽水井位置對模式誤差及推估參數的影響

X	Y	Q	模 式 誤 差 F	推 估 參 數 的 模 根	$\sqrt{\sum(P-P_{true})^2}$
1.0	0.0	-6.2832	0.08837403	1.599680241	1.0
2.0	0.0	-6.2832	0.398435107	8.776428117	2.0
3.0	0.0	-6.2832	1.110752489	18.91349073	3.0
5.0	0.0	-6.2832	170.2592503	16.36108496	5.0
9.0	0.0	-6.2832	2.325344005	4.91091773	9.0
0.0	0.0	-6.2832	$2.094145 \times 10^{-7}$	$1.250759769 \times 10^{-4}$	0.0

表 4：改變抽水量對模式誤差及推估參數的影響

X	Y	Q	模 式 誤 差 F	推 估 參 數 的 模 根	$\sqrt{\sum(P-P_{true})^2}$
0.0	0.0	-6.2832	$2.094145 \times 10^{-7}$	$1.250759 \times 10^{-6}$	0.0
0.0	0.0	-5.0	0.052338737	1.126769418	1.2832
0.0	0.0	-4.0	0.264995333	3.5277087141	2.2832
0.0	0.0	-2.0	0.933124152	2.534076	4.2832
0.0	0.0	0.1	2.072881258	1534.63	6.3832

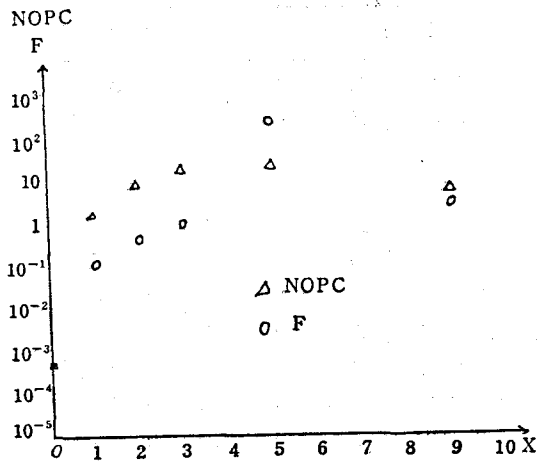


圖 2. 改變抽水井位置模式誤差及推估參數的影響

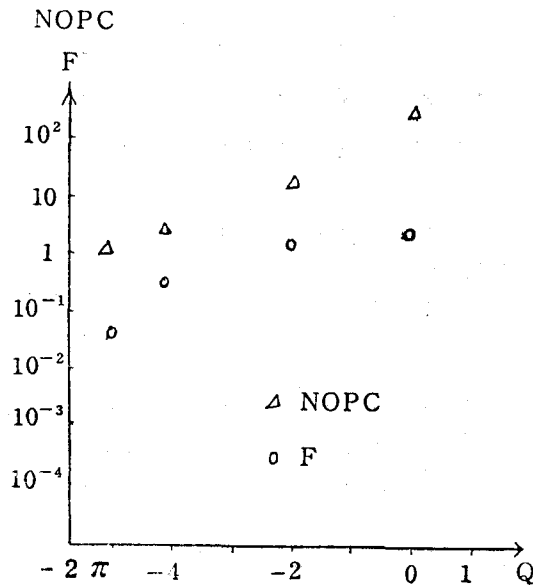


圖 3. 改變抽水量對模式誤差及推估參數的影響

置改變抽水量時，吾人可以發現抽水量由負變正時估算參數誤差變大。

範例二：

有一區域圖(4)，吾人不清楚此區域之抽水情形，而其邊界點如表 5，而吾人今僅有此區域測水位資料表(6)，且此區域為均勻受壓函水層，地下水流通係數為 1，今吾人分別假設一口、二口及三口經

由參數推估模式，吾人可以得到下面之結果表(7)圖(5)：

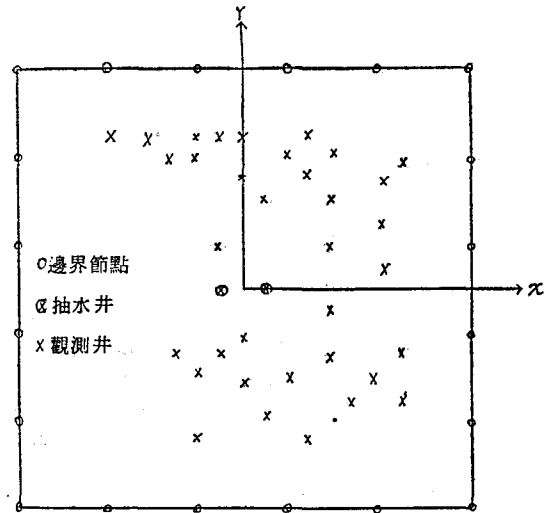


圖 4. 範例二抽水井、觀測井及邊界節點分佈圖

表 5. 範例二邊界節點資料

	x	y	已知水頭
1	-10.0	10.0	0.1427
2	-6.0	10.0	0.2177
3	-2.0	10.0	0.2593
4	2.0	10.0	0.2595
5	6.0	10.0	0.2174
6	10.0	10.0	0.1569
7	10.0	6.0	0.2187
8	10.0	2.0	0.2622
9	10.0	-2.0	0.2623
10	10.0	-6.0	0.2185
11	10.0	-10.0	0.1575
12	6.0	-10.0	0.2173
13	2.0	-10.0	0.2596
14	-2.0	-10.0	0.2589
15	-6.0	-10.0	0.2181
16	-10.0	-10.0	0.2325
17	-10.0	-6.0	0.1749
18	-10.0	-2.0	0.2860
19	-10.0	2.0	0.2474
20	-10.0	6.0	0.2314

表 6. 範例二觀測井資料

	x	y	觀測水頭		x	y	觀測水頭		x	y	觀測水頭
1	-3.0	-3.0	0.539737	13	2.0	-4.0	0.51839	25	6.1	1.0	0.42942
2	-2.0	-4.0	0.51839	14	3.0	7.0	0.351867	26	6.0	-4.0	0.372296
3	-2.0	-7.0	0.365571	15	3.0	5.0	0.432522	27	7.0	-3.0	0.355651
4	-2.0	6.0	0.409727	16	3.0	-7.0	0.351867	28	7.0	-5.0	0.315672
5	-1.0	2.0	0.724205	17	4.0	6.0	0.369942	29	7.0	6.0	0.293205
6	-1.0	-3.0	0.621038	18	4.0	4.0	0.448333	30	0.0	7.0	0.377382
7	0.0	5.0	0.481457	19	4.0	2.0	0.527926	31	-1.0	7.0	0.374352
8	0.0	-2.0	0.74385	20	4.0	-1.0	0.557495	32	-2.0	7.0	0.365571
9	0.0	-4.0	0.54908	21	4.0	-3.0	0.489372	33	-3.0	6.0	0.392018
10	1.0	4.0	0.540971	22	5.0	-5.0	0.37735	34	-4.0	7.0	0.334373
11	1.0	-6.0	0.42128	23	6.0	5.0	0.346184	35	-6.0	7.0	0.292633
12	2.0	6.0	0.409727	24	6.0	3.0	0.396261				

表 7. 範例二結果

抽水井數	起始參數值			計 算 結 果				
	x	y	Q	x	y	Q	模式誤差值	推估參數的模根
1	1.0	1.0	2.5	0.157732	0.0404507	1.95060	$0.644231 \times 10^{-3}$	$0.514836 \times 10^{-4}$
2	1.5	0.6	1.3	1.09042	-0.035246	0.98009	$3.15908 \times 10^{-4}$	$0.35278 \times 10^{-3}$
	-1.5	0.6	1.4	-1.07704	0.038916	1.02237		
3	1.2	0.0	0.8	1.04408	$0.24644 \times 10^{-2}$	0.96603	$0.19602 \times 10^{-4}$	15.76219438
	-1.2	-0.1	0.8	-0.974741	$0.963376 \times 10^{-2}$	1.02999		
	4.0	4.0	0.2	3.93524	3.92653	$-0.707 \times 10^{-3}$		

NOPC

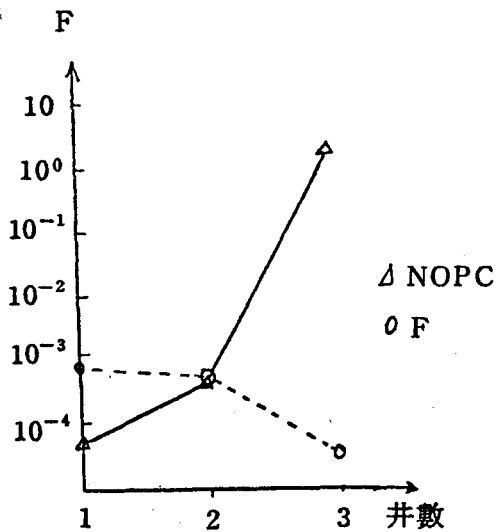


圖 5. 範例二結果

表 8、9、10，分別為假設 1、2、3 口抽水井時所計算出之協方差矩陣，吾人可以由表 7、9、10、圖 5 看出 2 口增至 3 口模式誤差值只改善一些，但在推估的參數誤差却加大很多，尤其在表 10 中與第 3 口抽水井有關之各係數第 3、6、9 列及 3、6、9 行均有偏大之情形，而以與第 3 口抽水井位置有關之係數 3、6、9 行與列加大更為明顯。因此可以判斷此例子以採用 2 口抽水井模擬最為恰當。

表9. 範例二假設 2 口抽水井估算參數的協方差矩陣

	x1	x2	y1	y2	Q1	Q2
x1	$0.127689 \times 10^{-3}$	$-0.118244 \times 10^{-3}$	$-0.745180 \times 10^{-5}$	$-0.893948 \times 10^{-5}$	$-0.436761 \times 10^{-4}$	$0.100080 \times 10^{-3}$
x2	$-0.118244 \times 10^{-3}$	$0.127184 \times 10^{-3}$	$0.678782 \times 10^{-5}$	$-0.749289 \times 10^{-5}$	$-0.672337 \times 10^{-5}$	$-0.518171 \times 10^{-4}$
y1	$-0.745180 \times 10^{-5}$	$0.578782 \times 10^{-5}$	$0.706699 \times 10^{-4}$	$-0.680010 \times 10^{-4}$	$0.316094 \times 10^{-5}$	$-0.665108 \times 10^{-5}$
y2	$0.893948 \times 10^{-5}$	$-0.749289 \times 10^{-5}$	$-0.680010 \times 10^{-4}$	$0.675224 \times 10^{-4}$	$-0.262117 \times 10^{-5}$	$0.683303 \times 10^{-5}$
Q1	$-0.436761 \times 10^{-4}$	$-0.672337 \times 10^{-5}$	$0.316094 \times 10^{-5}$	$-0.262117 \times 10^{-5}$	$0.184260 \times 10^{-3}$	$-0.187350 \times 10^{-3}$
Q2	$0.100080 \times 10^{-3}$	$-0.518171 \times 10^{-4}$	$-0.665108 \times 10^{-5}$	$0.683303 \times 10^{-5}$	$-0.187350 \times 10^{-3}$	$0.220154 \times 10^{-3}$

表10. 範例二假設 3 口抽水井估算參數的協方差矩陣

	x1	x2	x3	y1	y2	y3	Q1	Q2	Q3
x1	$0.121293 \times 10^{-4}$	$-0.559048 \times 10^{-5}$	$0.473093 \times 10^{-2}$	$-0.21922 \times 10^{-5}$	$0.703991 \times 10^{-6}$	$-0.391541 \times 10^{-2}$	$-0.44333 \times 10^{-5}$	$0.757463 \times 10^{-5}$	$0.110973 \times 10^{-5}$
x2	$-0.559048 \times 10^{-5}$	$0.826751 \times 10^{-5}$	$0.215754 \times 10^{-2}$	$0.147948 \times 10^{-5}$	$-0.137058 \times 10^{-5}$	$0.989218 \times 10^{-3}$	$-0.360883 \times 10^{-5}$	$-0.280775 \times 10^{-6}$	$-0.147319 \times 10^{-6}$
x3	$0.473093 \times 10^{-2}$	$0.215754 \times 10^{-2}$	$0.111355 \times 10^2$	$0.541099 \times 10^{-3}$	$-0.273286 \times 10^{-2}$	$-0.115309 \times 10^1$	$-0.653232 \times 10^{-2}$	$0.306963 \times 10^{-2}$	$0.317263 \times 10^{-3}$
y1	$-0.21922 \times 10^{-5}$	$0.147948 \times 10^{-5}$	$0.541099 \times 10^{-3}$	$0.16616 \times 10^{-4}$	$-0.135478 \times 10^{-4}$	$0.40948 \times 10^{-2}$	$0.125668 \times 10^{-5}$	$-0.35986 \times 10^{-5}$	$-0.698528 \times 10^{-6}$
y2	$0.703991 \times 10^{-6}$	$-0.137058 \times 10^{-5}$	$-0.273286 \times 10^{-2}$	$-0.135478 \times 10^{-4}$	$0.138168 \times 10^{-4}$	$0.287502 \times 10^{-3}$	$-0.163664 \times 10^{-5}$	$0.32467 \times 10^{-5}$	$0.383942 \times 10^{-6}$
y3	$-0.391541 \times 10^{-2}$	$0.989218 \times 10^{-3}$	$-0.115309 \times 10^1$	$0.40948 \times 10^{-2}$	$0.287502 \times 10^{-3}$	$0.111556 \times 10^2$	$-0.274848 \times 10^{-2}$	$-0.181793 \times 10^{-2}$	$0.142526 \times 10^{-2}$
Q1	$-0.44333 \times 10^{-5}$	$0.360883 \times 10^{-5}$	$-0.653232 \times 10^{-2}$	$0.125668 \times 10^{-5}$	$-0.163664 \times 10^{-5}$	$-0.274848 \times 10^{-2}$	$0.141708 \times 10^{-4}$	$-0.101951 \times 10^{-4}$	$-0.482516 \times 10^{-6}$
Q2	$0.757463 \times 10^{-5}$	$-0.280775 \times 10^{-6}$	$0.306963 \times 10^{-2}$	$-0.35986 \times 10^{-5}$	$0.32467 \times 10^{-5}$	$-0.181793 \times 10^{-2}$	$-0.101951 \times 10^{-4}$	$0.114070 \times 10^{-4}$	$-0.997304 \times 10^{-6}$
Q3	$-0.110973 \times 10^{-5}$	$-0.147319 \times 10^{-6}$	$0.317263 \times 10^{-3}$	$-0.695828 \times 10^{-6}$	$0.383942 \times 10^{-6}$	$0.142526 \times 10^{-2}$	$-0.482516 \times 10^{-6}$	$-0.997304 \times 10^{-6}$	$0.162218 \times 10^{-5}$

表 8. 範例二假設 1 口抽水井估算參數的協方矩陣

	x	y	Q
x	$0.208117 \times 10^{-4}$	$0.148141 \times 10^{-6}$	$-0.763814 \times 10^{-5}$
y	$0.148141 \times 10^{-6}$	$0.100248 \times 10^{-4}$	$-0.13548 \times 10^{-6}$
Q	$-0.763814 \times 10^{-5}$	$-0.135480 \times 10^{-6}$	$0.460102 \times 10^{-4}$

(四) 結論建議

1. 在此所舉的例子其參數個數均有限，且觀測井資料均沒有受到干擾，其多出之抽水井抽水量均接近於零。若參數很多時及受干擾時則不可能一一的模擬它，因此更能顯現出參數維度分析重要性。

2. 最佳抽水井位置參數的尋找將受到觀測井的影響，吾人可從表(3)，圖(2)知抽水井無法直接通過觀測井。因此在給予參數起始值時，最好能事先判斷觀測資料再給予起始值。

3. 實際抽水量與推估抽水量相差是負值時，則估算參數的協方差矩陣的模根將會變大。

4. 由推估參數的協方矩陣係數知觀測井數目對於參數鑑定的可靠性將很有幫助，因此吾人可再經由估算參數協方差矩陣的模根而判斷最佳的參數維度。

5. 本文並未討論干擾所造成的影響，若進一步研究，可以利用統計方法加以列入考慮。

參考文獻

1. 曹以松、黃國倫「邊界元素法配合優選法應用於地下水參數鑑定反向推求抽水量」，臺大農工所，民國75年。
2. 曹以松、林松青「邊界積分方程法在地下水抽水量反向推求之應用」，臺大農工所，民國74年。
3. 曹以松、許榮庭「參數鑑定在地下水抽水量反向推求之應用」，臺大農工所，民國74年。
4. 曹以松、林鍾洋「二維邊界積分方程法用於含水層海水入侵」，臺大農工所，民國74年。
5. WILLIAM W-G YEH & Young S. Yoon "Aquifer Parameter Identification with Optimum Dimension in Parameterization" W. R. R. 17 (3), 1981.
6. Emsellem, Y., and G. de Marsily "An Automatic Solution for the Inverse Problem", W. R. R., 9(5), 1973.
7. Yeh, W. W-G, and Y. S. Yoon, "Parameter Identification with Optimum Dimension in Parameterization", W. R. R. 17(3), 1981.

8. Yeh, W. W-G., Y. S. Yoon, and K. S. Lee., "Aquifer Parameter Identification with Krigingland Optimum Parameterization", W. R. R. 19(1) 1983.
9. Yakowitz, S., and L. Duckstein, "Instability in Aquifer Identification: Theory and Cas Studies", W. R. R. 16(6), 1980.
10. Cooley, R. L., "A Method of Estimating Parameters and Assessing Reliability for Models of Steady State Ground Flow, 1, Theory and Numerical Properties", W. R. R., 13(2), 1977.
11. Cooley, R. L., "A Method for Estimating Parameters and Assessing Reliability for Models of Steady State Groundwater Flow, 2, Application of Statistical Analysis", W. R. R. 15(3), 1979.
12. Cooley, R. L. "Incorporation of Prior Information on Parameters into Nonlinear Regression Groundwater Flow Models, 1, Theory", W. R. R. 18(4), 1982.
13. Cooley, R. L., "Incorporation of Prior Information on Parameter into Nonlinear Regression Groundwater Flow Models, 2, Applications", W. R. R. 19(3), 1983.
14. Nien-Sheng Hsu, "Optimum Experimental Design for Parameter Identification of a Groundwater System", Ph. D. Thesis, University of California Los Angeles, 1984.
15. Brebbia C. A. "Boundary Element Techniques", 1984.
16. Liggette, J. A. and P. L-F Liu, "The Boundary Intergral Equation Method for porous Media Flow", 1983.
17. William, W-G YEH, "Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Inverse Problem", W. R. R. 22(2), 1986.
18. Khurshid Alimohammed Afimiwala, "Computer Program for Optimization Including Application", M. S. Thesis, Univ. of New York, 1973.