

有限元素法與邊界元素法聯合運用之研究

Research on the Joint Application of the Finite Element Method and the Boundary Element Method

中原大學土木及水利系所主任

中華顧問工程司水及環境工程部工程師

邱 金 火

張 仁 德

Kin-Forie Chiou

Jen-Ter Chang

摘 要

有限元素法及邊界元素法各有其應用之優劣點，如何聯合運用兩法之優點來解流動問題及如何降低電子計算機運算所需之容量，乃是本文研究之主要目的。本文建立一聯合運用此兩種方法以解流動問題之程式架構。有限元素法部份使用八點等參數元素，求解時使用前推法 (frontal method) 以減少計算容量。邊界元素法以二次元素方法離散以配合有限元素法。最後以一受限地下水層中，部份滿足達西定律，部份為非達西流為例，用本文建立之程式求解，結果令人滿意。

Abstract

The finite element method and the boundary element method have their relative advantages and drawbacks in their applications. How to join these two methods and how to reduce the needed capacity of computer computation are the aim of this study.

In this study a program frame is developed to join these two methods to solve the flow problem. In the portion of the finite element method, the variation of a function is represented by the eight-noded isoparametric element, and in order to reduce the needed capacity of computer computation the solution is solved by using the frontal method. In order to match with the finite element method, the variation of a function of the portion of the boundary element method was discretized by the quadratic element.

Finally, an example of confined groundwater flow which partially satisfies the Darcy law and partially satisfies the non-Darcy law is performed by the developed program. The result of this example is satisfactory.

一、前言

自然界中很多物理現象，其行為常可用某些數學方程式與條件描述，假如能解得這些方程式，那麼將可以了解並預測這些物理現象。然而因為這些方程式，常常不容易求出其正確解(exact solutions)，因此只得利用數值方法，求出其近似解。

隨着電子計算機迅速的發展，數值解析方法也越來越受重視，無論是設計、模擬、預測等，無一不和數值解析方法發生了密切的關係。數值方法之一的有限元素法 (finite element method) 在工程問題上的應用，已經相當的廣泛，它有下列主要特性：(1)對於不規則邊界容易處理；(2)適合處理非線性 (nonlinear) 或非均質 (non-homogeneous) 問題；(3)所需解的矩陣常常為帶寬對稱矩陣；(4)對於無限域及奇異點 (singular point) 問題處理困難；(5)輸入資料龐大，常要花不少人力，來校對資料正確與否。

邊界元素法 (boundary element method) 為近年來才被重視的一種有效的數值解析方法，以目前發展出來的情形來看，它具有下列六點主要特性：(1)適合處理均質及線性問題；(2)能將問題所在領域維度 (dimension) 降低一次，即轉換到邊界上求解；(3)適合處理無限域及奇異點問題；(4)輸入資料很少；(5)所需解的矩陣為滿矩陣；(6)基本解 (fundamental solution) 不易求得，使用範圍有限，尚待發展。

從上面二種方法的主要特性看來，此兩種方法各有優劣。一般對於某些問題均假設在一定的領域中滿足某些控制方程式，再就其適用的情形，來選取適當的數值方法以解控制方程式，然對一連續領域中，若有不同的控制方程式，如果僅運用一種有限元素法來解，則可能造成在運算時間及計算機容量上的浪費，假如能適當的聯合運用有限元素法及邊界元素法之特有優點，則不但可以減少許多計算機所需容量及運算時間，並且可以得到更令人滿意的結果。

有限元素法與邊界元素法聯合運用之有關論文至今仍非常少，在 Brebbia⁽¹⁾ 一書中提到在1974年 Chen and Mei 曾利用邊界積分法的概念，與有限元素法結合，解決波浪在無限域的問題，1977年 Zienkiewicz, Kelly and Bettess⁽²⁾，對邊界法及有限元素法的聯合運用有較詳細的整

理與探討，而後到 1983年 Beer⁽³⁾ 對無限域中彈力或部分彈力部分塑性提出論文，同年 Liggett and Liu⁽⁴⁾ 利用線性元素 (linear element) 及直接組合此兩種方法，解地下水中有不同控制方程式的問題。本文針對一連續領域中，部分滿足勢能定理 (potential theory)，部分為非線性之問題，利用有限元素法其對解非線性問題的優點及邊界元素法其對解勢能問題的優點，來建立一聯合運用之程式架構，以解一連續領域中，有不同支配方程式的邊界值問題。其中邊界元素法部分以殘權法 (weighted residual methods) 導得；而有限元素法部分則利用前推法 (frontal method) 運算，使得此架構能適合於小型計算機。

二、有限元素法

2-1 有限元素法之建立

1856年達西 (Darcy) 經由實驗提出，在飽和土壤中水流的速度與水頭差有關，將其對一維的實驗結果，推廣至二維，可得下列關係式：

$$\vec{V} = -K\nabla\phi_0 \quad (2-1-1a)$$

$$\phi_0 = \frac{P}{\rho g} + Z \quad (2-1-1b)$$

其中 \vec{V} 為流速； K 是土壤之滲透係數； ϕ_0 是管壓水頭 (piezometric head)； ∇ 是梯度運算符號 (gradient operator)； P 為壓力水頭； Z 為位置水頭； ρ 為水之密度； g 是重力加速度。

假設流體和土壤的壓縮性很小，可忽略不計，則由連續方程式 (equation of continuity) 可得

$$\nabla \cdot (K\nabla\phi_0) = 0 \quad (2-1-2a)$$

若 K 在各方向均一樣則

$$K\nabla^2\phi_0 = 0 \quad (2-1-2b)$$

$$\text{上式 } \nabla^2\phi_0 = \frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2} \quad (2-1-2c)$$

x, y 為卡氏座標系統之方向變數

如圖 2-1 所示，假設流動在一連續領域 D 內滿足控制方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (2-1-3a)$$

及在邊界 S 上滿足

$$K \frac{\partial \phi_0}{\partial n} - \bar{q}_0 = 0 \quad \text{在 } S_2 \text{ 上} \quad (2-1-3b)$$

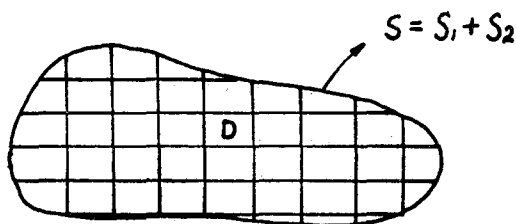
$$\phi_0 - \bar{\phi}_0 = 0 \quad \text{在 } S_1 \text{ 上} \quad (2-1-3c)$$

$\bar{q}_0, \bar{\phi}_0$ 為已知值； S_1, S_2 為部分邊界，且 $S = S_1 +$

S_2 ; \mathbf{n} 為邊界法線方向之單位向量。將領域 D 分為 m 個四邊形元素，由殘權法中的葛拉金法 (Galerkin method) 可將 (2-1-3a) 寫成

$$\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] N_I dA = 0 \quad (2-1-4)$$

A 為領域面積； N_I 為形狀函數 (shape function)， ϕ 為 ϕ_0 之近似值。設每一元素上的 ϕ 值可用四邊形 8 點等參數元素 (isoparametric element) 節點上之函數值表示如圖 2-2 所示



- D : 領域
- S_1 : 滿足 $\phi_0 - \bar{\phi}_0 = 0$
- S_2 : 滿足 $K \frac{\partial \phi_0}{\partial n} - \bar{q}_0 = 0$

圖 2-1 有限元素法領域示意圖

即
$$\phi = \sum_{j=1}^8 N_j \phi_j \quad (2-1-5)$$

ϕ_j 表節點上未知數之值，將 (2-1-5) 式代入 (2-1-4) 式得

$$\sum_{j=1}^8 \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \phi_j N_I dA = 0 \quad (2-1-6)$$

部分積分一次得

$$\sum_{j=1}^8 \left[\iint_A \left(K \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \phi_j dx dy - \left(JK N_I \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j dy + JK N_I \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j dx \right) \right] = 0 \quad (2-1-7)$$

因 $V = K \frac{\partial \phi}{\partial n}$ ，故 (2-1-7) 可寫成下式

$$\sum_{j=1}^8 \left[\iint_A K \left(\frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \phi_j dA - \int_{s_1} K \frac{\partial \phi}{\partial n} N_I ds_1 \right]$$

$$= \int_{s_2} V N_I dS_2 \quad I = 1 \sim 8 \quad (2-1-8)$$

由 (2-1-8) 式知 $I = 1 \sim 8$ ，故對於每一個元素，可建立 8 個方程式，又恰有 8 個未知數，故可用矩陣方式表為

$$[d]_{8 \times 8} [\phi]_{8 \times 1} = \{f\}_{8 \times 1} \quad (2-1-9a)$$

$$d_{IJ} = \iint_A K \left[\frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial N_J}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial N_J}{\partial y} \right]$$

$$dA - \int_{s_1} K \frac{\partial N_I}{\partial n} N_J ds_1 \quad (2-1-9b)$$

$$f_I = \int_{s_2} V N_I ds_2 = \int_{s_2} N_I q_A ds_2 \quad (2-1-9c)$$

d_{IJ} 表示 $[d]$ 係數矩陣之元素 IJ ； f_I 表示 $\{f\}$ 向量矩陣之元素 I 。

2-2 前推法 (frontal method)

為了要使建立的程式能適用於中小型電子計算機，故不採用直接疊加 (2-1-9a) 式成總係數矩陣，然後再用解聯立方程組之方法求解，而係使用前推法求解，此法係一方面疊加 (2-1-9a) 式，同時一方面解方程組，兩個過程交互進行。前推法最早由 Iron⁽⁵⁾ 在 1970 年提出，可解係數矩陣為對稱之聯立方程組，而後經由 Hood⁽⁶⁾ 修改成可解非對稱之係數矩陣，此方法最大的優點是可以讓容量較小的計算機也可執行有限元素法的求解演算，當然相對的，此種方法所花費的運算時間也較長。此法之基本原理是利用高斯消去法及有限元素法勁度矩陣 (stiffness matrix) 組合的特性^(7,8)。其主要步驟如下：(1) 先就使用計算機容量大小，和問題中元素分割情形及元素勁度矩陣大小，定下一適當的運算空間；(2) 在運算空間內順序組合元素的勁度矩陣，直到充滿運算空間為止；(3) 對運算空間中，組合完成的矩陣，判定對角線上那幾個自由度 (degree of freedom) 的係數 (d_{II})，已完成疊加，即不再受到其他元素勁度矩陣的影響；(4) 尋找已完成疊加之自由度係數所在該列係數之最大值為軸 (pivot)。利用高斯消去法，消去為軸的那一行，並將該列提出，存至計算機中的另一檔案；(5) 逐次消去已完成疊加之係數，最後運算空間內，僅存未完成疊加之係數；(6) 繼續將其他元素的勁度矩陣加入運算空間內，直到充滿為止；(7) 反覆 (3)(4)(5) 之過程，直到所有元素都組合完成，且係數均被消去，存入另一檔案中，則最後可得一解。(8) 依此方法由檔案中反向取各列係數，代入求得之解，則依次可得各未知數之解。

三、邊界元素法

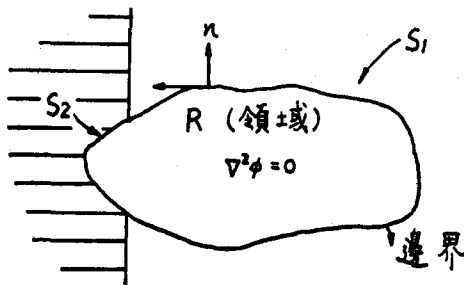
3-1 邊界元素法公式之建立

(1) 控制方程式：

$$\nabla^2 \phi_0 = 0 \quad \text{in } R \quad (3-1-1)$$

邊界條件 $\phi_0 = \phi_A$ 在 S_1 上；

$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = q_A$ 在 S_2 上 (見圖 3-1)； n ：法線方向 (normal direction)



$$S = S_1 + S_2$$

$\phi = \phi_A$ 在 S_1 上

$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = q_A$ 在 S_2 上， n 為法線方向

圖 3-1 邊界元素法定義圖

(2) 邊界元素方程式

利用殘權法可將 (3-1-1) 式轉化為

$$\iint_A \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) w dA = 0 \quad (3-1-2)$$

w 為權函數， ϕ 為 ϕ_0 之近似值， A 為面積將 (3-1-2) 式部分積分兩次

$$\iint_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \phi dA = \int_S \phi \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_S w \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (3-1-3)$$

S 表邊界，且 $S = S_1 + S_2$ ，取 w 為任一函數，但需滿足

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\delta_I \quad (3-1-4)$$

δ_I 為點 I 的 Dirac delta 函數即 w 為自由空間格林函數 (free space Green function)⁽⁷⁾

令 $\frac{\partial w}{\partial n} = q^*$ ， $\frac{\partial \phi}{\partial n} = q$ ， $w = \phi^*$ 代入 (3-1-3) 式

$$\text{得 } -C_I(\phi_I) = \int_{S_2} \phi q^* ds - \int_{S_1} \phi^* q ds \quad (3-1-5)$$

上式中 $C_I = 1$ 若點 I 在領域內

$C_I = 1/2$ 若點 I 在平滑邊界上

$C_I = 0$ 若點 I 在領域外

將點 I 推移到邊界上，並把邊界離散化成 m 個元素共有 n 個節點則可得

$$C_I(\phi_I) + \sum_{k=1}^m \int_{S_k} \phi q^* ds = \sum_{k=1}^m \int_{S_k} \phi^* q ds \quad (3-1-6)$$

S_k 表邊界上第 k 個元素，對邊界上之元素取三點二次等參數線性元素 (quadratic form)

則 ϕ ， q ， x 及 y 可用形狀函數表為

$$\phi(\xi) = N_1 \phi_I + N_2 \phi_{I+1} + N_3 \phi_{I+2}$$

$$q(\xi) = N_1 q_I + N_2 q_{I+1} + N_3 q_{I+2} \quad (3-1-6a)$$

$$x = N_1 x_I + N_2 x_{I+1} + N_3 x_{I+2}$$

$$y = N_1 y_I + N_2 y_{I+1} + N_3 y_{I+2} \quad (3-1-6b)$$

其中 $N_1 = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)$ ， $N_2 = 1 - \xi^2$ ，

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi(\xi+1)$$

N 為形狀函數， ξ 為自然座標 (natural coordinates)

將 (3-1-6) 式代入 (3-1-5) 式得

$$C_I \phi_I + \sum_{k=1}^m [h_I^1 k, h_I^2 k, h_I^3 k] \begin{pmatrix} \phi_I \\ \phi_{I+1} \\ \phi_{I+2} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m [g_I^1 k, g_I^2 k, g_I^3 k] \begin{pmatrix} q_I \\ q_{I+1} \\ q_{I+2} \end{pmatrix} \quad (3-1-7)$$

$$h_I^1 k = \int_{S_k} N_1 q^* ds$$

$$h_I^2 k = \int_{S_k} N_2 q^* ds$$

$$h_I^3 k = \int_{S_k} N_3 q^* ds$$

$$g_I^1 k = \int_{S_k} N_1 \phi^* ds$$

$$g_I^2 k = \int_{S_k} N_2 \phi^* ds$$

$$g_I^3 k = \int_{S_k} N_3 \phi^* ds$$

$$(3-1-7a)$$

$$(3-1-7b)$$

$$C_I \phi_I + [\bar{H}_{I1}, \bar{H}_{I2}, \dots, \bar{H}_{In}] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

$$= [G_{I1}, G_{I2}, \dots, G_{In}] \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad (3-1-8)$$

其中

$$\bar{H}_I \ell = h_I^3 k + h_I^1 k, k+1$$

$$G_I \ell = g_I^3 k + g_I^1 k, k+1 \quad (\ell = 2k+1)$$

$$H_I \ell = h_I^1 k + h_I^3 m$$

$$G_{I\ell} = g_{I1} + g_{I3} \quad (\ell = 1)$$

$$H_{I\ell} = h_{I2}^2$$

$$G_{I\ell} = g_{I2k} \quad (\ell = 2k)$$

$$\text{因爲 } I = 1 \sim n$$

$$k = 1 \sim (m-1)$$

且將點 I 推至邊界上則由 (3-1-8) 式得

$$\sum_{I=1}^n H_{IJ} \phi_J = \sum_{I=1}^n G_{IJ} q_J$$

$$H_{IJ} = \bar{H}_{IJ} \quad (I \neq J)$$

$$H_{II} = \bar{H}_{II} + C_I \quad (I = J)$$

$$[H]_{m \times n} \{\phi\}_{n \times 1} = [G]_{m \times n} \{q\}_{n \times 1} \quad (3-1-9)$$

當點 I 所在的邊界不為平滑時, $C_I \neq 1/2$, 但若有均勻勢 (uniform potential) 作用於

全部邊界上時, 對角線上之元素值可由非對角線上之各元素值計算之, 即

$$H_{II} = -\sum_{I \neq J} H_{IJ}$$

將已知之邊界條件代入 (3-1-9) 式得

$$(3-1-10)$$

$$[A]_{n \times n} \{X\}_{n \times 1} = [B]_{n \times 1}$$

[A] 為各邊界條件未知之係數矩陣

{X} 為每一點上之未知邊界條件

[B] 為已知邊界條件乘以對應係數之常數矩陣

將 (3-1-10) 式解得後, 則每一節點上兩邊界條件均成已知, 代入 (3-1-7) 式可求得領域內任一點 I 值。

表 3-1 邊界元素法例題結果比較

(數學解析解—數值解) $\times 10000$

點	數學解析解 [9]	文 獻 結 果 [9]			本 文 方 法 結 果		
		M=8	M=16	M=32	M=8	M=16	M=32
1	0.0835	-82	-15	-1	-82	-14	0
2	0.2378	-45	15	0	-44	15	0
3	0.3559	70	-5	0	70	-5	0
4	0.4199	83	8	1	81	7	0
5	0.4356	93	8	1	90	7	1
6	0.4969	94	-3	1	94	-4	0
7	0.6282	-27	24	1	-31	21	0
8	0.8479	-85	-17	2	-87	-19	0
9	2.7846	77	47	24	43	27	5
10	2.3607	344	-13	9	295	-35	-6
11	1.5774	-240	100	8	-285	74	-6
12	0.5539	-485	-82	24	-504	-103	-4
13	-2.6637	-285	36	-18	317	89	15
14	-1.9734	318	-37	-9	-363	-20	0
15	-1.5610	-10	15	-6	9	30	0
16	-1.3683	-115	-17	-3	-110	-13	5

3-2 數值技巧 (numerical scheme)

由 (3-1-4) 式知 w 為自由空間之格林函數，即為邊界元素法中之基本解 (fundamental solution)，表示在無限域中某一源點 I 有一單位擾動，在無限域中各點 (觀測點) 之反應，此反應為觀測點與源點 I 距離 r 之函數。

$$\text{取 } W = \phi^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (8) \quad (3-2-1)$$

$$\text{則 } q^* = \frac{\partial \phi^*}{\partial n} = \frac{-1}{2\pi} \frac{\eta}{r^2} \quad (3-2-2)$$

η , r 如圖 3-2 所示。 r 為源點至觀測點之距離； η 為源點至觀測點所在元素之垂直距離。

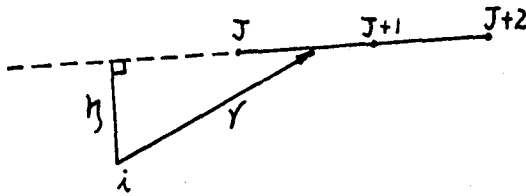


圖 3-2 η 、 r 之示意圖

因高斯積分法 (Gaussian quadrature) 之基本形態為

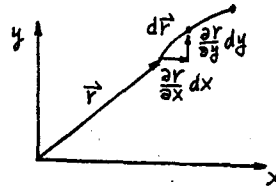
$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{m=1}^k f(\xi_m) w_m \quad (3-2-3)$$

式中 ξ_m 為高斯積分點， w_m 為相對應之加權值， m 為積分點號。將 q^* 代入 (3-1-7a) 式中，積分部分採用高斯積分則可得

$$\begin{aligned} h^1_{iK} &= \int_{S_K} N_i q^* ds = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\ &\quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \right) \frac{ds}{d\xi} d\xi \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{-1}^1 \xi (\xi - 1) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} d\xi \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^k \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \xi_m \\ 0 \\ (\xi_m - 1) \frac{\eta}{r_m^2} w_m & I \neq J \\ 0 & I = J \end{cases} \end{aligned}$$

r_m 為點 I 至積分點之距離， $dr/d\xi$ 如圖 3-3 所示，同理

$$h^2_{iK} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^k \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y), (ds)^2 = (dr)^2 \\ &= \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi^2 \end{aligned}$$

圖 3-3 曲線邊界之幾何定義

$$\begin{aligned} (1 - \xi_m^2) \frac{\eta}{r_m^2} w_m & \quad I \neq J \\ 0 & \quad I = J \end{aligned} \quad (3-2-3b)$$

$$h^3_{iK} = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^k \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \xi_m \\ (\xi_m + 1) \frac{\eta}{r_m^2} w_m & I \neq J \\ 0 & I = J \end{cases}$$

將 ϕ^* 代入 (3-1-7b) 式中得

$$\begin{aligned} g^1_{iK} &= \int_{S_K} N_i \phi^* ds = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^k \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \ln r_m w_m \quad I \neq J \end{aligned} \quad (3-2-4a)$$

同理

$$\begin{aligned} g^2_{iK} &= \frac{-1}{2\pi} \sum_{m=1}^k \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\quad (1 - \xi_m^2) \ln r_m w_m \quad I \neq J \end{aligned} \quad (3-2-4b)$$

$$\begin{aligned} g^3_{iK} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^k \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \xi_m \\ &\quad (\xi_m - 1) \ln r_m w_m \quad I \neq J \end{aligned} \quad (3-2-4c)$$

當點 I 與點 J 位於 K 元素上時， $g^1_{iK}, g^2_{iK}, g^3_{iK}$ 有奇異點 (singular point) 產生，使用直接積分法，導得如下公式：

(i) 當點 I 在元素的第一點上時

$$(i) \begin{array}{ccc} \xi = -1 & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ j & j+1 & j+2 \end{array}$$

(L 為元素實長)

$$r_1 = 0 \quad r_2 = L/2 \quad r_3 = L$$

由 (3-1-6b) 式知

$$\begin{aligned} r &= N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3 & r &= N_2(L/2) + N_3 L \\ r &= \frac{L}{2}(1 + \xi) & \xi &= \frac{2r}{L} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^1_{JK} &= \int_0^L \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \frac{1}{2\pi} \ell_n \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{L}{6} \ell_n L + \frac{17}{36} L^2 \right) \quad (3-2-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^2_{JK} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^L (1 - \xi^2) \ell_n \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{5}{9} L - \frac{2}{3} L \ell_n L \right] \quad (3-2-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^3_{JK} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \ell_n \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{36} L - \frac{L}{6} \ell_n L \right) \quad (3-2-7) \end{aligned}$$

(ii) 當點 I 位於點 j + 1 時

$$\begin{array}{ccc} \xi & -1 & 0 & 1 \\ \cdot & \text{-----} & \cdot & \text{-----} & \cdot \\ j & & j+1 & & j+2 \\ r_1 & = -\frac{L}{2} & r_2 = 0 & r_3 = \frac{L}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} r &= N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3 \\ &= N_1 \left(-\frac{L}{2} \right) + N_3 \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$r = \frac{L\xi}{2} \quad \xi = \frac{2r}{L}$$

$$\begin{aligned} g^1_{J+1,K} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \ell_n \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{L}{6} \ell_n \frac{L}{2} + \frac{L}{18} \right) \quad (3-2-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^2_{J+1,K} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} (1 - \xi^2) \ell_n \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{2}{3} L \ell_n \frac{L}{2} + \frac{8}{9} L \right) \quad (3-2-9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^3_{J+1,K} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \ell_n \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{L}{6} \ell_n \frac{L}{2} + \frac{L}{18} \right] \quad (3-2-10) \end{aligned}$$

(iii) 當點 I 位於點 j + 2 時

$$\begin{array}{ccc} \xi & = -1 & 0 & 1 \\ \cdot & \text{-----} & \cdot & \text{-----} & \cdot \\ j & & j+1 & & j+2 \\ r_1 & = L & r_2 = L/2 & r_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} r &= N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3 = N_1 L + N_2 \frac{L}{2} \\ &= \frac{L}{2}(1 - \xi) \end{aligned}$$

$$\xi = \left(1 - \frac{2r}{L} \right)$$

$$\begin{aligned} g^1_{J+2,K} &= \frac{-1}{2\pi} \int_L^0 \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \ell_n r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{L}{36} - \frac{L}{6} \ell_n L \right) \quad (3-2-11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^2_{J+2,K} &= \frac{-1}{2\pi} \int_L^0 (1 - \xi^2) \ell_n r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{5}{9} L - \frac{2}{3} L \ell_n L \right) \quad (3-2-12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^3_{J+2,K} &= \frac{-1}{2\pi} \int_L^0 \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \ell_n r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{L}{6} \ell_n L + \frac{17}{36} L^2 \right) \quad (3-2-13) \end{aligned}$$

3-3 邊界條件之處理：

邊界元素法，在邊界上每一點有二自由度，即 ϕ 與 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ ，在兩相鄰元素之共用節點上， ϕ 值必為連續，而 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 值與元素之法線方向有關。以逆時針方向為元素編排之順序，則在共用節點上，若 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 屬前面元素者定為 $(\frac{\partial \phi}{\partial n})_B$ ，屬後面元素者定為 $(\frac{\partial \phi}{\partial n})_A$ ，如此就邊界上某一點已知的情形來說，共有五種情形。

$$(1) \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_B, \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_A$$

$$(2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_B, \phi$$

$$(3) \phi, \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_A$$

$$(4) \phi \text{ 已知且在平滑邊界上}$$

$$(5) \phi \text{ 已知且在非平滑邊界上(sharp corner)}$$

對於上述五種情形中，前面四種情形，在程式中處理並不困難，第五種 $(\frac{\partial \phi}{\partial n})$ 不連續情形，處理上較無一定的方法，本文利用該點及其周圍點之 ϕ 值，假設 ϕ 值的分佈情形，進而求得 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 之關係式，以解決 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 不連續之問題，此法雖為近似法，然得出之解答，相當令人滿意。其方法如下：

$$\text{設 } \phi = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 \quad (3-3-1)$$

上式 a, b, c, d, e 為待定之係數。

假若 ϕ 值在圖3-4 所示之點1至點5 爲已知，則將點1至點5 之座標值和 ϕ 值代入(3-3-1) 式中，可求得 a, b, c, d, e 之值，再將 (3-3-1)式對 x 及 y 微分得

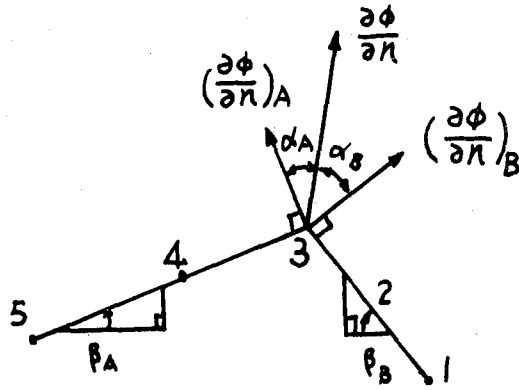


圖 3-4 非平滑邊界示意圖

$$\frac{\partial y}{\partial x} = b + 2dx \quad (3-3-2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = c + 2ey \quad (3-3-2a)$$

$\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 之法線方向爲

$$\vec{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{\frac{\partial \phi / \partial x}{\sqrt{(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial y})^2}} \vec{i} + \frac{\frac{\partial \phi / \partial y}{\sqrt{(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial y})^2}} \vec{j}}{\quad} \quad (3-3-3)$$

$$\cos \alpha_B = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x} \sin \beta_B + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \beta_B}{\sqrt{(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial y})^2}}$$

$$\cos \alpha_A = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial x} \sin \beta_A + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \beta_A}{\sqrt{(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial y})^2}}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_B = \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos \alpha_B \quad (3-3-4a)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos \alpha_A \quad (3-3-4b)$$

由(3-3-4a), (3-3-4b)兩式適當的取代(3-1-9)中之 $\{q\}$, 建立 (3-1-10) 式進而解得點3 (參看圖3-4) 上之 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 值, 然後再將解得之 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 值代入(3-3-4a)及(3-3-4b) 兩式, 即可得 $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_B$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_A$

之值。

3-4 數值算例:

1979年 Rizzo 等人 [9] 利用改良高斯積分法, 解下述問題:

$$\text{領域 } D = \{(x, y): 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 0.475\}$$

(見圖 3-5)

$$\text{控制方程式 } \Delta^2 \phi = 0 \quad (x, y) \in \Omega$$

$$\text{邊界條件 } \phi(0, y) = 0, 0 \leq y \leq 0.475$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(\frac{1}{2}, y) = 0, 0 \leq y \leq 0.475$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\phi(x, 0.475) = \sin \pi x \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{其數學解析解爲 } \phi(x, y) = \frac{\cosh \pi y \sin \pi x}{\cosh 0.475 \pi}$$

[9]

Rizzo 等之結果, 與本文方法之比較, 列於表 3-1 所示, 其中各節點位置如圖3-5 所示, 表中點1至8 點爲 ϕ 值, 點9至點16 爲 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 值。表中所示誤差爲 (解析解 - 數值解) $\times 10^4$, 共有3 種情形分別爲, 在邊界上取4, 8, 16個元素, 由結果顯示, 當元素取較多時, 本文所用之方法較正確。

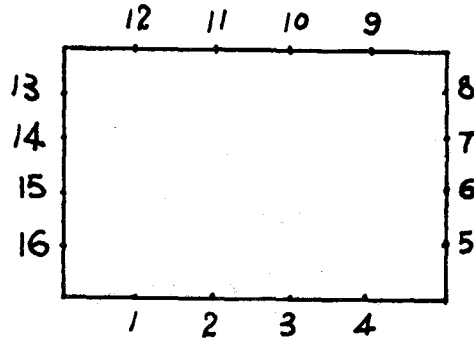


圖 3-5 邊界元素法算例示意圖

四、有限元素法及邊界元素法組合之建立

4-1 組合方程式之建立

考慮一領域 D, 且該領域分爲兩部份, $D = F + B$, F 爲使用有限元素法求解部份, B 爲使用邊界元素法求解部份, 如圖4-1 所示, 圖中 b_n 表邊界元素法部份邊界點上 ϕ 爲已知; b_q 表邊界元素法部份邊界點上 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 爲已知; f_n 表有限元素法部份邊界點上 ϕ 爲已知; f_q 表有限元素法部份邊界點

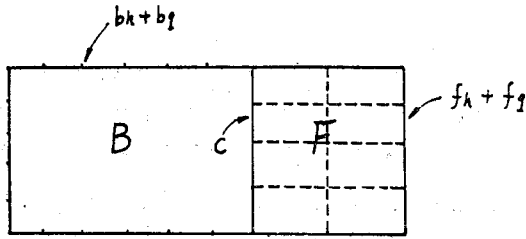


圖 4-1 有限元素法及邊界元素法組合示意圖

上 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 為已知；C 表有限元素法與邊界元素法交界部份 (interface)。邊界元素法部份，由 (3-1-9) 式及邊界條件得

$$[H_q, -G_n, -G_c, H_c] \begin{Bmatrix} \phi_{bq} \\ \frac{\partial \phi_{bh}}{\partial n} \\ \frac{\partial \phi_{bc}}{\partial n} \\ \phi_{tc} \end{Bmatrix} = [G_q, -H_h] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_{tq}}{\partial n} \\ \phi_{th} \end{Bmatrix} \quad (4-1-1)$$

(4-1-1) 式左邊為未知，右邊為已知。有限元素法部份，由 (2-1-9a) 式及邊界條件得

$$[-F_c, D_c, D_q, D_i] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial n} \\ \phi_{tc} \\ \phi_{tq} \\ \phi_i \end{Bmatrix} = [F_t, -D_h] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_{tq}}{\partial n} \\ \phi_{th} \end{Bmatrix} \quad (4-1-2)$$

此處

$$Q_{tc} = -K_f \int_{sc} N_i \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -K_f [E] \left\{ \frac{\partial \phi_{tc}}{\partial n} \right\} = [F_c] \left\{ \frac{\partial \phi_{tc}}{\partial n} \right\} \quad (4-1-2a)$$

$$E_{ij} = \int_{sc} N_i N_j ds; [F_c] = -K_f [E] \quad (4-1-2b)$$

$$\text{同理 } Q_{tq} = -K_f \int_{sq} N_i \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -K_f [E] \left\{ \frac{\partial \phi_{tq}}{\partial n} \right\} = [F_t] \left\{ \frac{\partial \phi_{tq}}{\partial n} \right\} \quad (4-1-2c)$$

K_f 為有限元素部份之滲透係數
在交界部份必須滿足下列兩條件：

(1) 適合性 (compatibility) :

$$\phi_{bc} = \phi_{tc} \quad (4-1-3)$$

且兩種方法所使用之形狀函數一致。

(2) 連續性：

交界部份通過任一邊界元素之流量，要等於相

對應之有限元素的邊界反向量之流量。

$$K_b \frac{\partial \phi_{bc}}{\partial n} = -K_f \frac{\partial \phi_{tc}}{\partial n} \quad (4-1-4)$$

K_b 為應用邊界元素法部份之滲透係數

假設在邊界元素部份共有 N_b 點，在有限元素部份共有 N_f 點，兩者交界部份有 N_c 點，一般邊界上每一點，二條件中須有一已知方能解，然在交界部份點上，二條件均為未知，故由 (4-1-1) 式知，其可建立 N_b 個方程式，但有 $N_b + N_c$ 個未知數，由 (4-1-2) 式知其他也可建立 N_f 個方程式，但有 $N_f + N_c$ 個未知數。由 (4-1-3) 式，(4-1-4) 式知可再建立 $2N_c$ 個方程式，故可得 $N_b + N_f + 2N_c$ 個方程式，得解 $N_b + N_f + 2N_c$ 個未知數。若是將 (4-1-1) 至 (4-1-4) 各式直接組合，則成爲一龐大的聯立方程組，因邊界元素法爲滿矩陣，故解此大矩陣，電子計算機必須要有較大的容量空間才行。

現將有限元素部份，使用前推法來處理，逐次將疊加完成之係數消去，最後保留與交界部份之邊界點有關之係數，可得到 $-N_c \times N_c$ 之勁度矩陣，其關係式可由下式表示

$$[D]_{N_c \times N_c} \{\phi\}_{N_c \times 1} = [F_c]_{N_c \times N_c} \left\{ \frac{\partial \phi_{tc}}{\partial n} \right\}_{N_c \times 1} + \{T_t\}_{N_c \times 1} \quad (4-1-5)$$

$\{T_t\}$ 爲常數矩陣

由 (4-1-1)，(4-1-3)，(4-1-4) 及 (5-1-5) 式組合可得

$$\begin{bmatrix} H_q & H_c & -G_h & -G_c \\ 0 & D_c & 0 & F_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{bq} \\ \phi_{bc} \\ \frac{\partial \phi_{bh}}{\partial n} \\ \frac{\partial \phi_{bc}}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_b \\ T_f \end{Bmatrix} \quad (4-1-6)$$

$$\{T_b\} = [G_q, -H_b] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_{bq}}{\partial n} \\ \phi_{bh} \end{Bmatrix} \quad (4-1-6a)$$

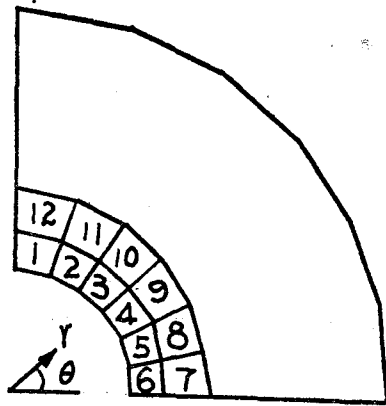
$$[F_c] = -[E] \left(K_f \frac{\partial \phi_{tc}}{\partial n} = \frac{-\partial \phi_{bc}}{\partial n} \right) \text{ 令 } K_b = 1 \quad (4-1-6b)$$

(4-1-6) 式即爲有限元素法與邊界元素法聯合運用所須解之交聯矩陣。

4-2 兩法聯合運用之算例：

以上述方法解一個二維穩定熱傳問題，如圖 4-2 所示

領域 $D = \{(r, \theta), 3 \leq r \leq 10, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$



有限元素共12個四邊形元素
邊界元素共16個元素

圖 4-2 有限元素法與邊界元素法聯合運用示例圖

控制方程式 $\Delta^2 T = 0 \quad (r, \theta) \in \Omega$

邊界條件：

$$T(3, \theta) = 100 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$T(10, \theta) = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$q(r, 0) = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad 3 \leq r \leq 10$$

$$q(r, \frac{\pi}{2}) = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad 3 \leq r \leq 10$$

表 (4-1) 勢能流有限元素法與邊界元素法組合運用結果比較

節點位置 (x, y)	數學解 析解 (1)	數值解 (2)	相對誤差 %	
1	2.4749, 2.4749	87.1955	87.0082	0.21
2	2.8284, 2.8284	76.1014	75.6687	0.57
3	3.1820, 3.1820	66.3213	66.0027	0.48
4	3.5355, 3.5355	57.5700	57.3761	0.34
5	3.8891, 3.8891	49.6536	49.4287	0.45
6	4.2426, 4.2426	42.4264	42.2354	0.45
7	4.5962, 4.5962	35.7780	35.6184	0.45
8	4.9498, 4.9498	29.6227	29.4917	0.44
9	5.3033, 5.3033	23.8922	23.7876	0.44
10	5.6569, 5.6569	18.5316	18.4516	0.43
11	6.0104, 6.0104	13.4961	13.4390	0.42
12	6.3640, 6.3640	8.7485	8.7123	0.41
13	6.7175, 6.7175	4.2577	4.2428	0.35

T代表溫度； q代表熱流量

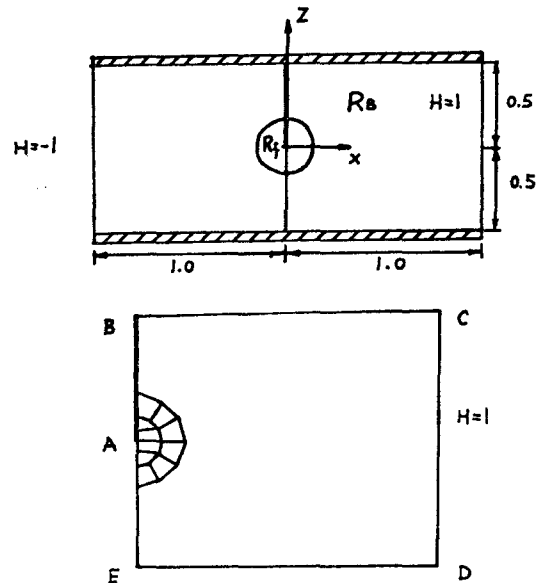
其解析解〔2〕為 $T = -83.06 \ln r + 191.25$

對於領域的元素分割如圖4-2所示，有限元素部份，共分12個四邊形8節點元素，邊界元素共分16個元素，在兩個弧上各取6元素，在兩邊各取2元素，求得45°半徑上13點值與解析解比較，如表4-1所示，其中1—4點為有限元素法區域，5—13點為邊界元素法區域。

五、達西及非達西流動算例

5-1 前言：

在第三節曾經用邊界元素法求解一算例，然後再和數學正確解 (exact solution) 及 Rizzo 等人之數值解比較，顯示邊界積分法效果良好，同時也驗證有關邊界元素法電子計算機程式的正確性。第四節又舉一熱傳問題，說明有限元素法與邊界元素法聯合運用的算例，這兩個算例皆是以拉氏方程式為控制方程式，本節將把兩方法的聯合運用，應用到達西及非達西流中，此乃兩方法聯合運用最主要目的之一。



R_f 表非達西流區域使用有限元素法

R_b 表達西流區域使用邊界元素法

有限元素共分10個四邊形元素

邊界元素共分15個元素

圖 5-1 達西——非達西流算例

5-2 有限元素法解非達西流：

一般地下水之流動皆假設其滿足達西定律即

$$\vec{v} = -K \nabla \phi \quad (5-2-1)$$

然在某些特殊情況下，流速加快，應用達西定律，就產生了相當大的誤差，為了改進誤差且保持達西定律的形式，1901年 Forchheimer [4] 建議一非線性的關係式，即

$$\nabla \phi = -(a + b |\vec{v}|) \vec{v} \quad (5-2-2)$$

a、b 為實驗所得之常數

若採用 Forchheimer 之關係式，則由(5-2-1)式及(5-2-2)式知，k 為 \vec{v} 之函數，即

$$K(v) = 1 / (a + b |\vec{v}|) \quad (5-2-3)$$

由此非達西流之控制方程式可寫為

$$\nabla \cdot (K(v) \nabla \phi) = 0 \quad (5-2-4)$$

由(2-1-8)式知

$$\iint_{A_e} \sum_{j=1}^8 K(v) \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA \phi_j$$

$$- \iint_{s_1} \sum_{j=1}^8 K(v) \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j ds_1 \phi_j$$

$$= \iint_{s_2} v N_i ds_2 \quad (5-2-5)$$

(5-2-5) 式為非線性，解非線性方程式，採用反覆替代 (iteration) 的方法，其程序如下：

(1) 假設初值 $V = v_{ass}$

$$\nabla \cdot (K(v) \nabla \phi) = K(v_{ass}) \nabla^2 \phi = 0 \quad (5-2-6)$$

(2) 利用有限元素法，對(5-2-4)式解得 ϕ_{cal} ，

並利用對形狀函數直接微分求得 $(\nabla \phi)_{cal}$ ，

再利用(5-2-2)式求得 v_{cal} 。

(3) 計算所有點上 V 之假設值及其計算值之相對

誤差， $|v_{cal} - v_{ass}| / v_{ass}$ ，若相對誤差在所定的範圍內，則完成解答。

(4) 若相對誤差不在所定的範圍內，則重新假設新 v_{ass} 值為舊的 v_{ass} 及 v_{cal} 之平均值。

(5) 再回到步驟(1)重新求解，直到收斂為止。

5-3 數值算例：

今以一受限地下水為例，當地下水流經一板樁 (sheet pile) 時，靠近板樁尖端部份，速度變化甚大，故其附近為非達西流，如圖5-1所示，若取(5-2-2)式中之 a 值為 0.938，b 值為 0.179，即

$$\nabla \phi = -(0.938 + 0.179 |\vec{v}|) \vec{v}$$

$$K(v) = (0.938 + 0.179 |\vec{v}|)^{-1}$$

對此問題以板樁尖端為圓心，半徑 0.14142 以內為有限元素之分割區域，共分為十個四邊形元素，其他邊界部份為邊界元素法之區域，共分為十五個元素，求解得沿板樁上之解答如表 5-1 所示。

在表中前半部為全部考慮均為達西流之解與解析解之比較，結果顯示 $Z = 0.01414$ 時誤差較大，其主要原因，因為其靠近奇異點 (板樁尖端) 的關係，該處實際變化相當大，故數值解較不易正確描述出來。至於考慮部份達西流及部份為非達西流之數值結果也列於表 5-2 之後半部，其結果與表列解析解有較大之出入，此乃因基於上述之 a，b 值及考慮部份為非達西流之故。

表 5-1 地下水流經板樁之算例結果

	達 西 流			達西—非達西流
	解 析 解 [2]	數 值 解	相 對 誤 差 %	數 值 結 果
元素分割情形 (有限+邊界) 沿板樁節點位置	10+15=25			10+15=25
Z =				
0.01414	0.1096	0.10272	6.30	0.13836
0.04243	0.1869	0.18323	1.96	0.22506
0.14142	0.3225	0.32131	0.37	0.36244
0.28284	0.4159	0.41514	0.18	0.44644
0.50000	0.4614	0.45992	0.32	0.48754

六、結 論

本研究有下列五點結論：

(1)邊界元素法近年來發展迅速，因其僅需對邊界分割，故輸入資料減少很多，在求領域內部點之解，不必分割領域，利用邊界值反求即可得，尤其只需求內部少數幾點之值時，此法更具效用。由於此法能將問題單純化，故特別適用於小型電子計算機。

(2)對於勢能問題，本文利用邊界元素法，導得一二次分佈直線形元素之計算機程式，並能處理不同形式之邊界條件，效果良好。

(3)本研究很成功地把前推法介入解有限元素法之過程，因此大大地減少電子計算機運算所需之容量，使得邊界元素法及有限元素法之聯合應用亦能在容量較小的個人電腦運算，更增加其應用的潛力及可行性。

(4)在聯合使用有限元素法及邊界元素法時，本文是採用隱性法 (implicit method)，使二區域充分產生交聯性 (interaction)，對於有不同變數之二區域，使用隱性法較難，因邊界上之關係式不易建立。

(5)本文建立聯合使用有限元素法及邊界元素法之程式架構，但邊界元素法部份之控制方程式必須是拉氏方程式，同時所考慮之邊界值問題之領域必須是具有相同變數而具不同控制方程式之連續領域才可應用。

參 考 文 獻

1. C. A. Brebbia
"The boundary element method for engineers"
pentech press London 1978.
2. O. C. Zienkiewicz, D.W. Kelly and P. Bettess
"The coupling of the finite element method and boundary solution procedures" Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 11 355-376(1977).
3. G. Beer
"Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics"
Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 19 567-580 (1983).
4. James A. Liggett and Philip L. --F. Liu
"Boundary integral equation method for porous media flow".
5. B. M. Lrons
"A frontal solution program for finite element analysis" Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 2 5-32 (1970).
6. P. Hood
"Frontal solution program for unsymmetric matrices" Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 10 379-399(1976).
7. E. Alarcon, A. Martin and F. Paris
"Boundary element in potential and elasticity theory" Computer and Structure Vol. 10 351-362 (1979).
8. Michael D. Greenberg
"Application of Green's functions in science and engineering" prentice-Hall Inc. 1971.
9. Graeme Fairweather, Frank J. Rizzo and J. Shippy
"On the numerical solution of two-dimensional potential problems by an improved boundary integral equation method" J. of computer Physics 31 96-112 (1979).

專營工木、水利、建築等工程

森業營造有限公司

地址：苗栗市府東路7巷8號1F

電話：(037) 335029