

主渠道含側入流之理論分析

Theoretical Analysis of Water Surface Profiles in a Main Channel with Lateral Inflow

淡江大學教授兼所長

施 清 吉

Ching-chi Shih

摘 要

主渠道含側入流的水面線之擾動解可以擾動 ϵ 的漸近展開式表示，擾動值用以代表側入流的相對大小。當擾動值趨近於零時，漸近展開式簡化為主渠道無側入流時的水面線，擾動解以此時的流況為基礎解，由此可產生各種不同階次的近似解，近似解的大小等級決定於擾動值的次方，而且此時臨界深度與正常深度的比值為控制各階近似解的主要參數。在控制斷面上第一階近似解等於0，而後沿計算方向遞增，極限值為 $2/3\alpha^3$ 。比較階梯方法與擾動方法兩種不同方法計算的結果後，吾人發現由基礎解與第一階近似解組成的漸近展開式相當準確，流況為次臨界流時擾動值可高至1左右，而流況為超臨界流時擾動值必須小於0.1。

Abstract

The perturbation method is utilized to analyze water surface profiles of steady flow in a main channel with lateral inflow, which can be represented by an asymptotic expansion in terms of the perturbation term ϵ denoting the relative magnitude of lateral inflow. As the perturbation term ϵ tends to infinitesimal small, the asymptotic expansion reduces to water surface profiles of the channel flow without lateral inflow, which is treated as the basic solution to generate the successive approximations in the perturbation solution. However, the successive approximations are dominated by the ratio of the critical depth to the normal depth of the basic solution. The first approximation is an increasing function in the computation direction starting with 0 at the control section and tends to $2/3\alpha^3$. Results of the asymptotic expansion consisting with the basic solution and the first approximation are found in good agreement with those obtained by the step method; for the case of the subcritical flow the value of perturbation term ϵ can be as high as 1, but for the supercritical flow the value must be less than 0.1.

一、引言

一般而言任何加置於河川或渠道上的水利設施都會導致流況的變化，流況含蓋的項目頗多，其中以水位的變化為主。本論文探討主渠道含側入流 (Lateral inflow) 時的水位變化。由於側入流流入主渠道後導致明顯的能量損失，同時側入流輸入的動量適巧垂直於主流方向，沿流動方向並未輸入任何動量。因此主渠道含側入流時的水面線分析適宜於採用動量法則，與一般無側入流時的分析並沒有差異，唯一不同的地方就是沿流動方向流量不再保持不變。如果基於局部性變化的觀點，摩擦力可略而不計同時渠道坡度也可視為水平，在這種假設與情況下，主渠道含側入流時的水面線可直接由控制方程式 (Governing equations) 積分而得。若渠道坡度與摩擦力必須予以考慮，吾人無法直接積分求得分析解 (Analytical solution)。一般常用的方法是將以微分為主的控制方程式轉換成差分式 (Difference equation)，而後再計算水面線，這就是一般俗稱的階梯方法 (Step method)。階梯方法極適宜於使用電子計算機，將計算的結果列成表格或圖，然而階梯方法只能針對某一單獨的問題提供個別的結果，無法提供分析解。本論文嘗試從另一角度來探討主渠道含側入流時的水面線，將水面線分析視為屬於擾動問題 (Perturbation problem^{2,3})，以主渠道無側入流時的流況為水面線的漸近情況 (Asymptotic state)；由此水面線的變化可用漸近展開式 (Asymptotic expansion) 表示。漸近展開式是由不同階次的近似解組成的，而各項的大小等級 (The order of magnitude) 決定於側入流的相對大小。

由於主渠道含側入流時的控制方程無法直接積分，吾人姑且以階梯方法所得的結果為依據，來分析擾動解 (Perturbation solution) 的準確度。吾人先利用階梯方法計算主渠道無側入流時的水面線，而再與其通解比較以了解階梯方法的特性。

二、理論分析

如圖一所示，有一側入流 (Lateral inflow) 沿主流渠道的岸邊流入，與主流混合後再沿主流的流向自左向右流，假設匯集側入流後的主流為定流量 (Steady flow)，其水面線 (Water surface profile) 的微分方程式為⁴

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{S_0 - S_f - \frac{2Q'}{gA'^2} \frac{dQ'}{dx'}}{1 - Fr^2} \dots\dots\dots(1)$$

式中 y' ：垂直深度 (Vertical depth)，
 x' ：縱向流動距離 (Longitudinal distance)，座標軸零點設於控制斷面上 (Control section)，
 S_0 ：渠底縱向坡度 (Longitudinal channel bottom slope)，
 S_f ：能量線坡度 (Energy line slope)，
 Q' ：主流量 (Discharge of main channel)，
 A' ：流動面積 (Flow area)，
 Fr ：Froude 數。

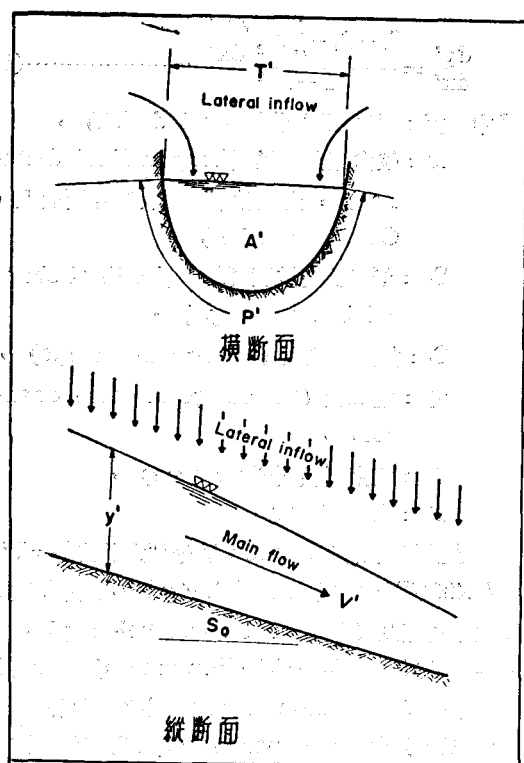
能量線坡度與 Froude 數分別定義為 $S_f = V'^2/n^2/1.486^2/R'^{4/3}$ 與 $Fr = V'/\sqrt{gD'}$ ，式中 V' 為斷面平均速度 (Sectional mean velocity)，即 $V' = Q'/A'$ ， n 為粗糙度 (Roughness)， R' 為水力半徑 (Hydraulic radius) 定義為流動面積除以濕潤邊 (Wetted perimeter) P' ， D' 為水力深度定義為流動面積除以頂寬 (Top width) T' 。

假設側入流量非常小，使主渠道內的流量 Q' 沿流動方向 x' 的變化得以一線性型函數式表示，即

$$Q' = Q_0' (1 + \epsilon \frac{x' S_0}{y_{0n}'}) \dots\dots\dots(2)$$

式中 ϵ 為一極微小的擾動項 (Perturbation term)，即 $\epsilon \ll 1$ 。當擾動值 ϵ 趨近於零時，主渠道內的流況簡化為無側入流時的流況，此時的流況吾人均於右下註腳加 '0' 以示別於其他情況的流況；其實右下註腳 '0' 代表第零階近似解或基礎解 (參閱式(7))。所以此時的流量與深度分別以 Q_0' 與 y_{0n}' 表示，而對應的正常深度 (Normal depth) 或均勻流深度 (Uniform flow depth) 以 y_{0n}' 表示；再者此時的臨界深度 (Critical depth) 以 y_{0c}' 表示。其次，吾人再假設寬矩形渠道，水力半徑可以深度計；同時能量線坡度以 Chezy 公式推估，式中 Chezy 常數 C 視為定值。在這些假設下，由式(1)與(2)吾人可得一無因次微分方程式，即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 1 - 2\epsilon \alpha^2 y}{y^3 - \alpha^3 - 2\epsilon \alpha^2 x} \dots\dots\dots(3)$$



圖一 主渠道含側入流示意圖

式中 $y = \frac{y'}{y_{0n}}$ (4)

$x = \frac{x'S_0}{y_{0n}}$ (5)

$\alpha = \frac{y_{0c}}{y_{0n}}$ (6)

式(3)適用於主渠道含側入流時的水位；而等號右邊分子與分母的第三項， $-2\epsilon\alpha^3y$ 與 $-2\epsilon\alpha^3x$ 代表側入流的因素。如果無側入流，式(3)就簡化為一般常用的微分方程式。此外三次方的出現是由於寬矩形渠道與 Chezy 常數視為定值的假設。雖然整數次方的出現較易於分析，然而側入流的因素却使式(3)無法直接積分以求得通解 (General solution)。

一般而言，由式(3)來分析主渠道含側入流時的水面線，都須利用數值分析的方法，以求得在各種情況下的數值解 (Numerical solution)。分析解 (Analytical solution) 的尋求必須仰賴其他的假設；如上述若側入流非常小，即 $\epsilon < 1$ ，則主渠道內的流況必定非常接近於無側入流時的流況，但兩者並不完全相同。因此吾人可利用主渠道無側入時的流況做為第零階近似解 (The zeroth or-

der approximation)；由此利用擾動方法 (Perturbation method) 尋求各階次的近似解，則分析解即可由這些近似解組合而成。由於高階次的近似解完全決定於低階次的近似解，故吾人通常稱第零階近似解為基礎解，而此階近似解就是主渠道無側入流時的水面線。其次由於式(3)的次方都是整數，而且其間的運算只包含基本的代數運算。所以在主渠道含側入流時吾人採用擾動項的多項式來表示水面線的漸近展開式 (Asymptotic expansion)，即

$$y(x;\epsilon) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2(x) + \dots (7)$$

式中 y 的右下註腳正代表近似解的階次，近似解只是 x 的函數，而其大小等級 (The order of magnitude) 由擾動項 ϵ 的次方表示。相鄰兩項的比值適巧等於擾動值 ϵ 。式(7)顯示主渠道含側入流時的水面線是由許多不同階次的近似解組合而成。理論上漸近展開式包含愈高階次的近似解，準確度 (Accuracy) 就愈高誤差就愈小。然而由於相鄰兩項的比值等於擾動值 ϵ ，所以當擾動值趨近於非常小時，漸近展開式的組成只須函蓋少數的低階近似解就足够了。一般而言都以基礎解與第一階近似解為主。

將式(7)及其導函數代入式(3)的微分方程式，並比較等號左、右兩邊含擾動項的同次項，吾人就可得一組不同大小等級的微分方程式 (大小等級以擾動項 ϵ 的次方表示，示於微分方程式的左邊)，則最低兩階的微分方程式分別為

$$\epsilon^0: \frac{dy_0}{dx} = \frac{y_0^3 - 1}{y_0^3 - \alpha^3} \dots\dots\dots (8)$$

$$\epsilon^1: \frac{dy_1}{dx} + \frac{3y_0 \frac{dy_0}{dx} - 3y_0^2}{y_0^3 - \alpha^3} y_1 =$$

$$\frac{2x\alpha^3 \frac{dy_0}{dx}}{y_0^3 - \alpha^3} - \frac{2\alpha^3 y_0}{y_0^3 - \alpha^3} \dots\dots\dots (9)$$

式(8)與(9)分別為第零階與第一階近似解的微分方程式，同樣地比較擾動項 ϵ 的高次方，吾人可得其他高階近似解的微分方程式。只有第零階近似解的微分方程式是屬於均勻型 (Homogeneous)，其餘的均為非均勻型 (Nonhomogeneous)。第零階近似解的邊界條件為在控制斷面上，深度 y_0 必須等於已知深度 y_g ($y_g = y_g' / y_{0n}'$)，其他的近似解均須等於零。無論流況是屬於次臨界流 (Subcritical flow) 或超臨界流 (Supercritical flow)

), 座標軸 x 的零點均設於控制斷面上。

描述基礎解或第零階近似解的微分方程式為式(8), 此式可直接積分求得通解, 其結果為

$$x = y_0 - (1 - \alpha^3) \left\{ \frac{1}{6} \ln \left[\frac{y_0^2 + y_0 + 1}{(y_0 - 1)^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left[\frac{2y_0 + 1}{\sqrt{3}} \right] - C_0 \right\} \dots (10)$$

式中 C_0 為積分常數, 須由在控制斷面上的已知深度 y_g 求得。控制斷面設於座標軸的零點上, 即 $x=0$, 所以由式(10), 吾人得知

$$C_0 = \frac{1}{6} \ln \left[\frac{y_g^2 + y_g + 1}{(y_g - 1)^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left[\frac{2y_g + 1}{\sqrt{3}} \right] - \frac{y_g}{1 - \alpha^3} \dots (11)$$

式(11)顯示如果在控制斷面上的已知深度接近於主渠道無側入流時的正常深度或參數 α 的值等於 1 (參閱式(6)), 積分常數 C_0 會趨近於無窮大。這是早在意料中, 由於主渠道無側入流時的微分方程式 (式(8)) 之解, 本來就不適用於臨界深度線 (Critical depth line) 的附近, 水面線的坡度極易變成無窮大。其次以主渠道無側入流時的正常深度所構成的正常深度線 (Normal depth line) 是水面線的漸近線。在正常深度線的附近水面線可非常非常趨近於正常深度線, 但兩者並不相交; 在此情況下, 雖然兩個斷面的水位差距可非常小, 但其間的距離却非常大。

除了積分常數 C_0 外, 示於式(10)大括弧內的函數即為一般俗稱的 Bresse 函數, 為一有理分數的積分, 為了易於書寫與說明, 吾人定義。

$$B(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\xi}{1 - \xi^3} = \frac{1}{6} \ln \left[\frac{\eta^2 + \eta + 1}{(\eta - 1)^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left[\frac{2\eta + 1}{\sqrt{3}} \right] \dots (12)$$

式(12)顯示第零階近似解或基礎解實際上就是 Bresse 函數, 是由對數函數與反正切函數所組成的。對數函數以 $\eta=1$ 為漸近線, 也就是當深度趨近於主渠道無側入流時的正常深度 y_{0n} , 對數函數趨近於無窮大。以近漸線為界限, η 的定義範圍分為兩部份: $1 > \eta > 0$ 與 $\eta > 1$ (參閱圖四)。無論 η 的值座落於那一個範圍, 對數函數為一單值函數。相反地反正切函數 $\tan^{-1}(2\eta+1)/\sqrt{3}$ 却為多值函數。

將上段所求得的第零階近似解 y_0 (參閱式(10))

及其導函數代入式(9), 同時以積分變數 dy_0 取代原來的積分變數 dx , 其間的關係為

$$dx = \frac{y_0^3 - \alpha^3}{y_0^3 - 1} dy_0 \dots (13)$$

首先求得均勻部份 (相當於等號右邊等於零) 之解 y_{1h} , 即

$$y_{1h} = \ln \left[\frac{y_0^3 - \alpha^3}{y_0^3 - 1} \right] \dots (14)$$

而後再由式(14)求非均勻部份之解, 利用這兩個解, 吾人就可求得第一階近似解

$$y_1 = \frac{y_0^3 - 1}{y_0^3 - \alpha^3} \left\{ 2\alpha^3(y_0 - x)B(y_0) + \alpha^3(1 - \alpha^3) \left[\frac{2}{3} \int_0^{y_0} B(\eta) d\eta - B(y_0)B(y_0) - \frac{2}{3} \frac{y_0^2}{1 - y_0^3} - \frac{2}{3} y_0 B(y_0) \right] - C_1 \right\} \dots (15)$$

式中含一 Bresse 函數的積分 $\int B(\eta) d\eta$, 定義為

$$\int^n B(\xi) d\xi = \frac{1}{6} \left\{ \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \ln(\eta^2 + \eta + 1) - (2\eta + 1) + \sqrt{3} \tan^{-1} \left[\frac{2\eta + 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} - \frac{1}{6} \left\{ (\eta - 1) \left[\ln(\eta - 1)^2 - 2 \right] \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(2\eta + 1)}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left[\frac{2\eta + 1}{\sqrt{3}} \right] - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{4}{3} (\eta^2 + \eta + 1) \right] \right\} \dots (16)$$

此外, 式(15)同樣地包含一積分常數 C_1 。此積分常數須由邊界條件求得。由於在控制斷面上的已知深度已經設定為第零階近似解或基礎解的邊界條件, 即在 $x=0, y_0=y_g$; 所以在控制斷面上, 第一階近似解必須等於零。故由式(15), 吾人得知

$$C_1 = 2\alpha^3 y_g B(y_g) + \alpha^3(1 - \alpha^3) \left[2 \int_0^{y_g} B(\eta) d\eta - B(y_g)B(y_g) - \frac{2}{3} \frac{y_g^2}{1 - y_g^3} - \frac{2}{3} y_g B(y_g) \right] \dots (17)$$

一般討論主渠道無側入流時的緩變流, 其水面線的分類均以坡度的性質與水面線座落的區域為依據⁵。坡度的性質視正常深度線 (Normal depth line)、臨界深度線 (Critical depth line) 的相互關係而定。其間的關係共有三種: 正常深度線高於臨界深度線、正常深度線低於臨界深度線, 兩線重疊。對應於上述的三種關係, 渠底坡度分別稱為緩坡 (Mild slope)、陡坡 (Steep slope) 與臨界坡 (Critical slope), 通常以 M 、 S 、 C

表示。此外，尚有渠底坡等於零的水平坡 (Horizontal slope) 與小於零的反坡 (Adverse slope)，分別以 H、A 表示。座落的區域是以正常深度線與臨界深度線為界線將渠底以上的空間分成三個或兩個區域。區域的編號順序自上而下，以阿拉伯數字表示，加註於所屬坡度性質的右下角，例如 M_1 型水面線，代表渠底坡度屬於緩坡，水面線在正常深度線之上。如果流況是屬於定量流而且渠道橫斷面與渠底坡度沿流動方向 x 均保持不變，則上述三條界線（渠底也視為界線）就變成三條相互平行的直線。然而如式(3)所示，本論文所探討的緩變流係主渠道含一側入流，同樣地也是屬於定量流，不過流量沿流動方向遞增而不是保持不變，參閱式(2)。因此，如果依據一般均勻流公式及臨界流公式來計算正常深度與臨界深度時，吾人將發現每一斷面的正常深度都不相同，同時臨界深度也不相同。在此情況下，只有渠底為一直線，而正常深度線與臨界深度線就不再是相互平行的直線了。可是由於本論文所探討的係一主渠流含一非常微小的側入流，以及為了便於分析起見，吾人不採用確實的正常深度線與臨界深度線（根據實際流量 Q' 計算而得）。臨界深度採用基礎解的臨界深度 y_{0e} ，再以此解的正常深度 y_{0n} 予以無因次化，臨界深度線就可以參數表示，參閱式(6)。此外，如果主渠道無側入流時，其水面線的微分方程就相當於式(8)；此時若水深趨近於臨界深度 y_{0e}' ，水面線的斜率趨近於無窮大，這正與基礎解 y_0 與第一階近似解 y_1 的斜率均以 $y_0^3 - \alpha^3$ 為分母相吻合，參閱式(8)與式(9)。其次，如來所知正常深度是基於流況為均勻流的假設，在此情況下，重力與摩擦力相互平衡。如果主渠道無側入流，水面線的斜率就須等於零。而今，主渠道含側入流，吾人同樣也以水面線的斜率等於零時的深度線做為正常深度線，則此深度可由式(3)求得。所以，由式(3)，吾人得知

$$y^3 - 1 - 2\epsilon\alpha^3 y = 0 \quad (18)$$

為了予以區別，符合式(18)的深度吾人就暫且稱之為終極深度 (Terminate depth) y_t ，以此構成的連線稱之為終極深度線 (Terminate depth line)，它是一直線而不是曲線。所以在判斷主渠道含側入流時的水面線是屬於那一類型時，吾人就以終極深度線取代正常深度線。

如式(18)所示，此式為一元三次方程式，根的性質決定於三次方程式的判別式。如果 $\epsilon < 1/27/32$

$/\alpha^3$ ，則式(18)有一個實根與兩個虛根。虛根不計，而實根等於

$$y_t = \left\{ \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{8}{27} \epsilon^3 \alpha^3 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} - \frac{8}{27} \epsilon^3 \alpha^3 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots (19)$$

另一方面，如果 $\epsilon \geq 1/27/32/\alpha^3$ ，則式(18)有三個實根，其中之一為

$$y_t = 2\sqrt{\frac{2\epsilon\alpha^3}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) \dots \dots \dots (20)$$

$$\text{式中 } \cos\phi = 1/2\sqrt{\frac{8}{27}\epsilon^3\alpha^3} \dots \dots \dots (21)$$

此根大於零。而另兩根 $2\sqrt{\frac{2\epsilon\alpha^3}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} + 120^\circ\right)$ 與 $2\sqrt{\frac{2\epsilon\alpha^3}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} + 240^\circ\right)$ 均小於零。

為了探討主渠道的水面線受側入流的影響，吾人以終極深度線與參數 α 為界線將渠底以上的空間分成不同的區域。討論的渠底坡度僅限於緩坡與陡坡兩種。如式(3)所示，主渠道含側入流時，其水面線的坡度視等號右邊各因子相互間的大小而定，代表主渠流的因子計有 $y^3 - 1$ 與 $y^3 - \alpha^3$ ，而側入流的因子為 $-2\epsilon\alpha^3 y$ 與 $-2\epsilon\alpha^3 x$ 。為了便於分析起見，吾人須首先了解主渠道無側入流時各因子的大小，而後再將側入流的因素予以考慮。其次， $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

w_0 與 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{w_i}$ 分別表示主渠道無側入流時與含側入流時的水面線坡度。再者，流況屬於次臨界流時，控制斷面設於下游，而流況為超臨界流則設於上游。控制斷面做為 X 座標的原點，所以流況為次臨界流時， $-2\epsilon\alpha^3 x$ 的值為正（大於零），參閱表一；相反地，流況為超臨界流時， $-2\epsilon\alpha^3 x$ 的值就變為負（小於零）。但是 $-2\epsilon\alpha^3 y$ 的值與流況無關，始終都是負的。那麼主渠道的水面線坡度受側入流的影響，就視主渠流的因子（未含側入流）與側入流的因子是否兩者都同時大於或者兩者都同時小於零，這兩種情況稱之為同向，否則就稱之為異向。以 M_1 型水面線為例，主渠道無側入流時 $y^3 - 1$ 的值與 $y^3 - \alpha^3$ 的值均大於零。但主渠流含側入流後 $y^3 - 1$ 的值與 $-2\epsilon\alpha^3 y$ 的值是異向，所以側入流使分子的值減小，參閱式(3)；另一方面， $y^3 - \alpha^3$ 的值與 $-2\epsilon\alpha^3 x$ 的值是同向，故側入流使分母的值增大。假設主渠流含側入流後水面線坡度仍然保持大於零，則側入流的淨效應就是使水面線坡度減

小。易言之，以同一斷面的水面線坡度而言，主渠道無側入流時的水面線坡度較含側入流時的陡，即 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{wo} > \left(\frac{dy}{dx}\right)_{wi} > 0$ 。除了 M_1 型水面線受側入流的這種淨影響外， S_1 型與 S_2 型的水面線坡度也受相同的影響，主渠道的水面線坡度因側入流的緣故變為較緩，參閱表一與圖十與圖十一。這參型的水面線坡度， y^3-1 的值與 $-2\epsilon\alpha^3y$ 的值都是異向，而 $y^3-\alpha^3$ 的值與 $-2\epsilon\alpha^3x$ 的值却是同向，

吾人才能判斷側入流的淨影響。相反地，如果所有因子的值都是同向，吾人就無法判斷側入流的淨影響。例如 M_2 型的水面線坡度， y^3-1 的值小於零， $-2\epsilon\alpha^3y$ 的值也小於零，兩個值是同向；另一方面分母的兩個值也是同向， $y^3-\alpha^3$ 的值大於零，而 $-2\epsilon\alpha^3x$ 的值也是大於零。假設主渠道無側入流與含側入流的水面線坡度都是小於零。側入流使分子與分母的絕對值都增加，因此吾人無法判斷側入流的淨影響。

表一 側入流對水面線坡度的影響

		次臨界流 M_1 $y>1>\alpha$	次臨界流 M_2 $1>y>\alpha$	超臨界流 M_3 $1>\alpha>y$	次臨界流 S_1 $y>\alpha>1$	超臨界流 S_2 $\alpha>y>1$	超臨界流 S_3 $\alpha>1>y$
y^3-1	↑ 主渠道 無側入流 ↓	>0	<0	<0	>0	<0	<0
$y^3-\alpha^3$		>0	>0	<0	>0	<0	<0
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{wo}$		>0	<0	>0	>0	<0	>0
$-2\epsilon\alpha^3y$	↑ 主渠道 含側入流 ↓	<0	<0	<0	<0	<0	<0
$y^3-1-2\epsilon\alpha^3y$		>0	<0	<0	>0	>0	<0
$-2\epsilon\alpha^3x$		>0	>0	<0	>0	<0	<0
$y^3-\alpha^3-2\epsilon\alpha^3x$		>0	>0	>0	>0	<0	>0
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{wi}$		>0	>0	>0	>0	<0	>0
側入流淨效應		變緩*	無**	無	變緩	變緩	無

* 指水面線坡度變緩

** 無肯定結論

三、結果與討論

主渠道含側入流時，水面線的演算除了可使用階梯方法 (Step method) 由微分方程式計算而得外，尚可由式(7)的擾動解求得，此解包含基礎解與第一階近似解，分別展示於式(10)與(15)。為了探討擾動解的特性與準確度，吾人首先分析階梯方法的準確度，而後再探討由擾動解與階梯方法所求得的兩水面線之間的差異，由此吾人可了解擾動解的特性

及適用的範圍。

(一) 階梯方法之準確度

如衆所週知，無論流況是次臨界流或是超臨界流，水面線的計算順序都是自控制斷面開始，同時座標軸 x 的方向始終都是順乎流動方向由上而下。然而由於控制斷面的位置視流況是屬於次臨界流或超臨界流而定。因此，利用階梯方法由微分方程式 (式(3)) 逐斷面求深度所引用的計算式因流況的不同而稍微不一致，分別展列於下：

$$\begin{aligned} \text{次臨界流: } & y_{(2)}^4 + 2\Delta xy_{(2)}^3 + [-4\alpha^3 - 4\epsilon\alpha^3(x_{(1)} + x_{(2)}) \\ & - 4\epsilon\Delta x\alpha^3]y_{(2)} - y_{(1)}^4 + 4\alpha^3y_{(1)}^3 + 4\epsilon^3\alpha(x_{(1)} + x_{(2)})y_{(1)} \\ & - 2\Delta x + 2\Delta x(y_{(1)}^3 - 1 - 2\epsilon\alpha^3y_{(1)}) = 0 \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{超臨界流: } & y_{(2)}^4 - 2\Delta xy_{(2)}^3 + [-4\alpha^3 - 4\epsilon\alpha^3(x_{(1)} + x_{(2)}) + 4\epsilon\Delta x\alpha^3]y_{(2)} \\ & - y_{(1)}^4 + 4\alpha^3y_{(1)}^3 + 4\epsilon\alpha^3(x_{(1)} + x_{(2)})y_{(1)} + 2\Delta x \\ & - 2\Delta x(y_{(1)}^3 - 1 - 2\epsilon\alpha^3y_{(1)}) = 0 \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

式中的斷面編號以右下註腳加刮弧表示，其順序是順乎計算方向，斷面(1)的流況為已知，而斷面(2)的流況為所求，斷面間距 Δx 為正。控制斷面設為座標軸的零點，故流況為次臨界流時， x 的值小於零；相反地，流況為超臨界流時， x 的值大於零

$$\text{次臨界流: } y_{(2)}^4 + 2\Delta x y_{(2)}^3 - 4\alpha^3 y_{(2)} - y_{(1)}^4 + 4\alpha^3 y_{(1)}^3 - 2\Delta x + 2\Delta x (y_{(1)}^3 - 1) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

$$\text{超臨界流: } y_{(2)}^4 - 2\Delta x y_{(2)}^3 - 4\alpha^3 y_{(2)} - y_{(1)}^4 + 4\alpha^3 y_{(1)}^3 + 2\Delta x - 2\Delta x (y_{(1)}^3 - 1) = 0 \dots\dots\dots (25)$$

由於擾動解是以主渠道無側入流時的基礎解及其導致的近似解所組成的。故由式(24)或(25)求得的解也是基礎解以 y_0 表示；此外，基礎解還可由式(10)求得，吾人以 y_0 表示之*。

由於式(22)、(23)、(24)與(25)均為四次方程式，含有四個根。為了求斷面(2)的深度，最適當的方法略述於下。以斷面(1)的深度為試差法(Try and error method)的開始值(Initial value)，依水面線的類型逐漸代入較深的 $y_{(2)}$ 值(大於斷面(1)的水深)或較淺的 $y_{(2)}$ 值(小於斷面(1)的水深)。疊代的間距(Step size of iteration)可經由適當的判斷而加以修正，使間距愈來愈小，直到所代入的深度 $y_{(2)}$ 能符合計算式的條件，即等號左邊的值等於零或等號左邊的絕對值小於即定的容許誤差。本文以水面線的最大變化幅度再除以10的十二次方做為容許誤差。以 M_2 與 S_2 兩型水面線而言，水深介於正常深度線與臨界深度線兩線之間，如果在控制斷面上的已知深度為臨界深度，則容許誤差定為 $|(1-\alpha)|/10^{12}$ ，即計算式的殘餘值須小於 $|(1-\alpha)|/10^{12}$ 。在利用試差法求(22)、(23)、(24)或(25)中的任一計算式之根時，若計算式的殘餘值小於或等於所設定的容許誤差，則所代入的 $y_{(2)}$ 值就為計算式的根；否則再以另一新的 $y_{(2)}$ 值代入計算式，直到計算式的殘餘值小於即定的容許誤差為止。在這種反覆代入的過程中，疊代的間距愈來愈小，但每次代入新的 $y_{(2)}$ 值時必須判斷是否超過對應的漸進線。計算式(22)與(23)是由微分方程式(3)轉換過來的，所以這兩計算式的漸進線即為 y_c ，參閱式(19)與(20)。其次計算式(24)與(25)是由描述主渠道無側入流時的演算式，因此這兩計算式的漸進線為 $y_{(2)}=1$ 。利用試差法求上述計算式的根，代入的 $y_{(2)}$ 值可以非常非常地接近漸進線，甚至落在漸進線上都不會發生計算上的困難，只不過超過漸進線的 $y_{(2)}$ 值失去了意義，主要的原

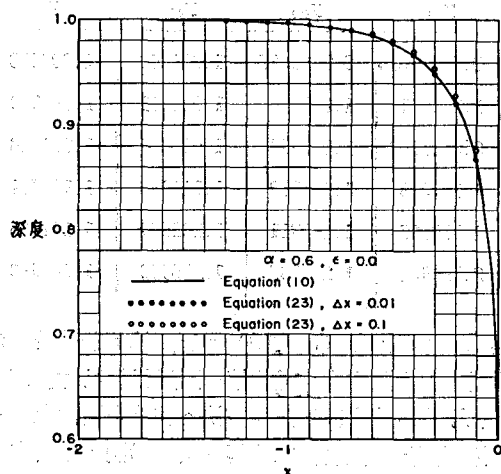
。式(22)與(23)為主渠道含側入流時水面線的計算式，所得的深度以 y 表示。主渠道無側入流時，則式(22)與(23)中的擾動值 ϵ 等於零，則式(22)與(23)分別簡化為：

因是階梯方法所引用的計算式都是多項式，而不是以漸進線為因子所組成的有理分數。所以若不計其他的因素，只要計算式的容許誤差設定為非常非常地小，利用階梯方法所求得的水面線應該是相當準確的。

使用階梯方法求得的水面線是否完全符合於對應的微分方程式直接積分的結果。這除了決定於試差法的容許誤差外，還須視階梯方法的斷面間距 Δx 而定。試差法的準確度極易控制，而間距 Δx 的影響較為複雜。為了探討式(22)與(23)的準確度，唯一的辦法就是比較分別由式(22)或式(23)與式(3)所得的結果。由於吾人無法獲得式(3)的通解，所以無法直接探討使用階梯方法解析主渠道含側入流時的準確度，但吾人可間接討論之。描述主渠道無側入流時的水面線變化如式(8)所述，此式的通解為Bresse函數，定義於式(10)；而使用階梯方法解式(8)的計算式為式(24)或(25)(視流況而定)。因此吾人可比較分別由式(10)與式(24)或(25)所得的結果，探討其間的差異以了解斷面間距 Δx 對準確度的影響，而後再引伸應用於主渠道含側入流的情況。主渠道無側入流時，使用階梯方法與直接積分而得的結果以不同的表示法展示於圖二與圖三，圖中實線代表直接積分的結果(即式(10))，而實心圓或空心圓所代表使用階梯方法由式(24)或(25)計算而得的結果。圖二與圖三分別為次臨界流與超臨界流的典型代表。圖二與圖三均顯示只有在控制斷面的附近斷面間距 Δx 的影響較大，遠離控制斷面的上或下游間距的影響幾乎可略而不計。易言之，控制斷面的附近必須採用較小的斷面間距 Δx ，其餘的斷面可採用較大的斷面間距。以本文的計算結果而言，數據顯示大約0.1以上的斷面間距會導致在控制斷面的附近較明顯的偏差，參閱圖二與圖三空心圓的分佈，最大的差異大致在0.01左右。其次，如果間距縮小為0.01，則分別由直接

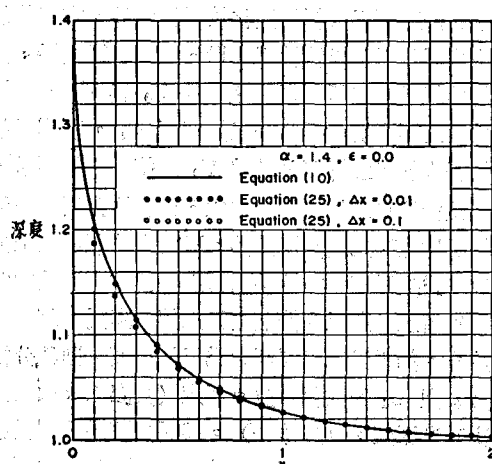
* 右下註腳第一個個指標為零，代表第零階近似解，而第二個右指標代表根據階梯方法或Bresse函數。

積分與由階梯方法而得的結果幾乎相互吻合，參閱實心圖的分佈。



圖二 M_2 型水面線

由此吾人得知如果在控制斷面的附近，斷面間距 Δx 採用 0.01，而其餘地方的斷面間距擴大為 0.1，則利用階梯方法求得的結果與直接積分的大致相差 0.01 以下。這也就是說主渠道含側入流時，使用階梯方法由式 (22) (或 (23)) 計算而得的水面線與由式 (3) 直接積分而得的結果，吾人預計其間的差異也在 0.01 以下。在而後的討論中，吾人就可以使用階梯方法由式 (22) (或 (23)) 計算而得的水面線做為基準來分析擾動解的特性。



圖三 S_2 型水面線

(一) 擾動解之探討

擾動解是由基礎解及其所導致的一系列近似解所組成的，參閱式 (7)，右下註腳代表近似解的階次

，而第零階近似解俗稱為基礎解，相當於主渠道無側入流的水面線。其次第一階近似解的函數關係式是以 Bresse 函數與其積分式為主，參閱式 (15) 與 (16)。以式 (15) 而言，如果參數 α 與積分常數不計，除了等號右邊大括弧的第一項包含自變數 x 的一次方外，第一階近似解完全決定於基礎解 y_0 。就這一點而言，第一階近似解好像與斷面位置的關係相當簡單明顯。其實並不然，由於第一階近似解完全視基礎解的大小而定，而基礎解的大小又視斷面位置而定，參閱式 (8) 或 (10)。因此第一階近似解與斷面位置的關係較為間接，同時較為不明顯。正如因為這種緣故，式 (7) 的擾動解是深受基礎解的控制。

基礎解可經由兩種不同的方式計算而得。一是利用式 (10) 的 Bresse 函數，二是利用階梯方法，由式 (24) 或 (25) 計算而得，兩者都是由已知位置使用試差法求得該斷面的水深。前節吾人業已指出由這兩種不同的方式所求得的基礎解彼此之間非常密合，參閱圖二與圖三，階梯方法的可靠性。然而在計算的程序上這兩種不同的方式却有相當大的差異。

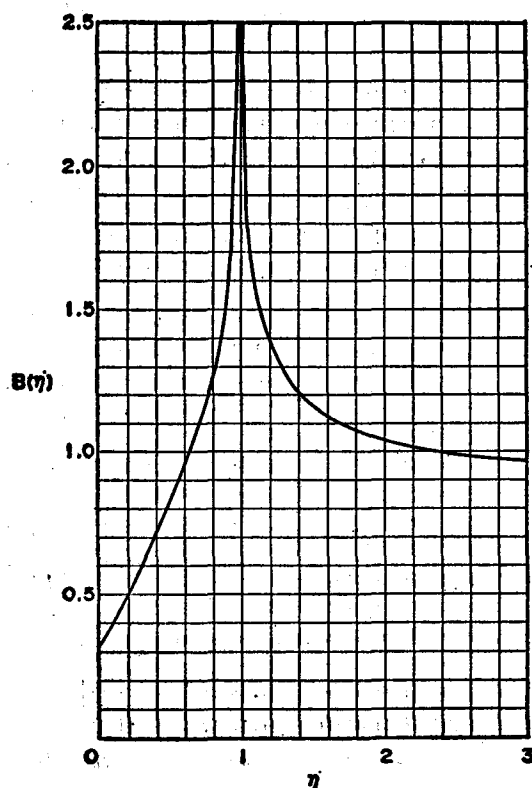
參閱式 (10) 與 (12)，吾人發現由式 (10) 所求得的基礎解完全受制於 Bresse 函數；此函數為一有理分數的積分式，被積函數為 $1/(1-\eta^2)$ ，故 Bresse 函數以 $\eta = 1$ 為漸近線，參閱圖四。因而利用試差法由式 (10) 求基礎解 y_0 時，必須要設法避免在計算上所謂的溢流現象，為此吾人需要設定一個基礎解 y_0 的最長值，以防在疊代過程中基礎解太靠近漸近線。在逐斷面的計算過程中，一旦發現該斷面的基礎解 y_0 已經足夠接近漸近線，就以此斷面的基礎解做為兩後斷面的基礎解了。為了易於說明起見，吾人姑且稱此斷面為終止斷面，該斷面上的深度稱為終止深度。由式 (10) 求基礎解 y_0 吾人是使用試差法，反覆代入直到式 (10) 的殘餘值小於容許誤差；在即定的容許誤差之下，終止斷面的位置及其深度受制於參數，如表二所示。

終止斷面與控制斷面間的基礎解 y_0 不是遞增就是遞減，視流況為次臨界流或超臨界流而定，超過了終止斷面，基礎解 y_0 就視為定值了。在終止斷面上由另一方式求得的基礎解 y_0 列於第 (4) 欄。此外，由基礎解 y_0 與 y_0 求得的第一階近似解 y_{10} 與 y_{11} 分別列於第 (5) 欄與第 (6) 欄。超過了終止斷面基礎解 y_0 仍然遞增或遞減，並不像基礎解一樣保持不變。基礎解 y_0 也是使用試差法由式 (24) 或

表二 在終止斷面上的各種解或深度

(1) 參數 α	(2) x	(3) y_{ob}	(4) y_{os}	(5) y_{1b}	(6) y_{1s}	(7) y_{pb}	(8) y_{ps}	(9) y
0.4	-1.2	0.9944851	0.9962858	0.0381766	0.03975675	0.9983027	1.001352	1.000238
0.6	-1.1	0.9969839	0.9981914	1.333174	1.377931	1.010316	1.011971	1.011850
0.8	-0.7	0.9981706	0.9993495	0.3182630	0.3331050	1.029997	1.032660	1.031948
-1.2	1.0	1.001799	1.001365	1.124646	1.127023	1.114263	1.114068	1.114751
-1.4	2.2	1.003851	1.003618	1.800597	1.799507	1.183911	1.183569	1.181775
-1.6	3.8	1.005702	1.005553	2.711844	2.709991	1.276887	1.276552	1.269312

(25)求得的，但是在疊代的過程中並不會碰到上述的困難——溢流現象，吾人可以一直反覆代入，只不過大於1的基礎解失去了物理意義。表二的第(3)與(4)欄顯示以基礎解本身的大小而言，這兩種不同的方式所求得的確實相差無幾；但是以與1之間的差值而言，這又另當別論了，第一階近似解正受此影響。



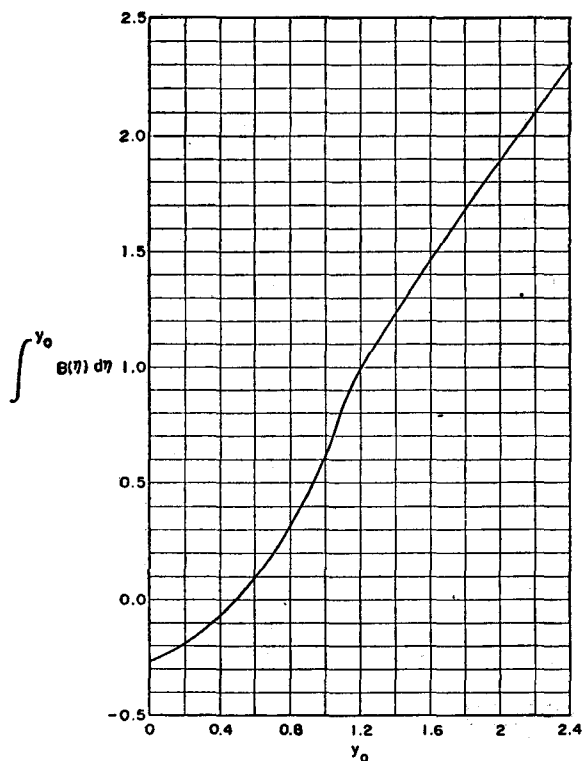
圖四 Bresse 函數

若基礎解採用式(10)，則由式(19)求得的第一階近似解以 y_{1b} 表示，右下註脚分別代表第一階近似解

與 Bresse 函數（即式(10)）。相反地，若基於式(24)或(25)，則由此方式求得的第一階近似解以 y_{1s} 表示，在下註脚 's' 表示階梯方法。在終止斷面上第一階近似解的列值於表二的第(5)與第(6)欄，由於在此斷面上不同方式求得的基礎解並不相同，所以對應的第一階近似解也不相同。如果以差異發生在那一個有效數字而言，基礎解的差異發生在第三個有效數字（自左邊起算），却導致第一階近似解的差異發生在第二個有效數字。

式(19)為 Bresse 函數的積分式，其結果展示於圖五。窄看之下，式(19)也同樣含一漸近線 $\eta = 1$ 。其實並不然，當 η 趨近於1時，自然對數 $\ln(\eta - 1)$ 趨近於無窮大，但是 $(\eta - 1)$ 却趨近於0，而後者的速率遠較前者快，所以當 $\eta \rightarrow 1$ 時， $(\eta - 1) \ln(\eta - 1)$ 的極限是存在的。除了在 $\eta = 1$ 的附近圖五顯示式(19)的變化較為複雜外，在其他的地方式(19)幾乎呈現線性型遞增。參閱式(10)與(15)，擾動解的組成還包括兩個積分常數 C_0 與 C_1 。在控制斷面上擾動解必須等於已知深度 y_s ，利用這個條件吾人即可求得積分常數 C_0 之值。一般而言，除非是由於水利結構物的設置，使在控制斷面上的已知深度並不為臨界深度外，通常在控制斷面上的流況均為臨界流。在控制斷面上的已知深度是加置於基礎解上，所以在控制斷面上第一階近似解必須等於0。如果以臨界深度做為已知深度，則積分常數 C_0 與 C_1 的值視參數 α 而定（實際上 α 代表無因次臨界深度，參閱式(6)），其間的關係分別展示於圖六與表三。圖六顯示積分常數 C_0 的變化頗類似 Bresse 函數，實際上積分常數 C_0 與 Bresse 函數間的關係為

$$C_0 = B(\alpha) - \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \dots \dots \dots (26)$$



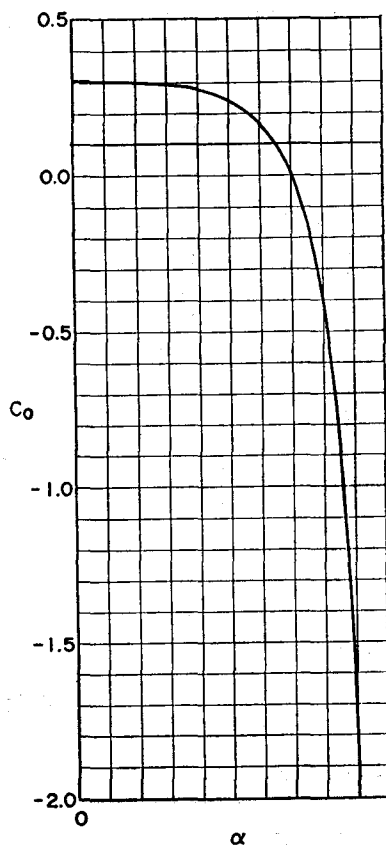
圖五 Bresse 函數之積分式

圖六即為式(20)的展示。參閱式(11)與(20)，積分常數 C_0 還包括有理分數 $1/(1-\alpha^3)$ 。無論在控制斷面上的已知深度是否為臨界深度或其他的深度，如果流況趨近於臨界流（即參數 α 接近於 1），則積分常數 C_0 會趨近於無窮大。其次，由於積分常數 C_1 可為正也可為負，加上變化的幅度太龐大，不適於圖示說明所以列於表三，此積分常數之所以變化懸殊與參數 α 息息相關，參閱式(17)。

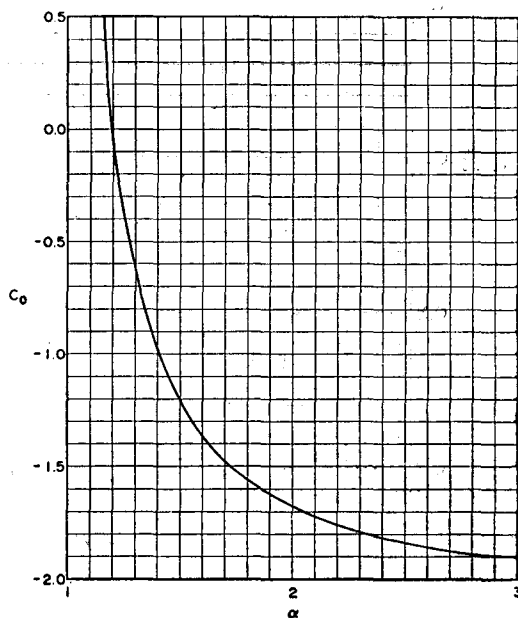
為了易於分析擾動解的特性，吾人就流況為次臨界流或超臨界流，分別探討於下。

1. 流況為次臨界流：

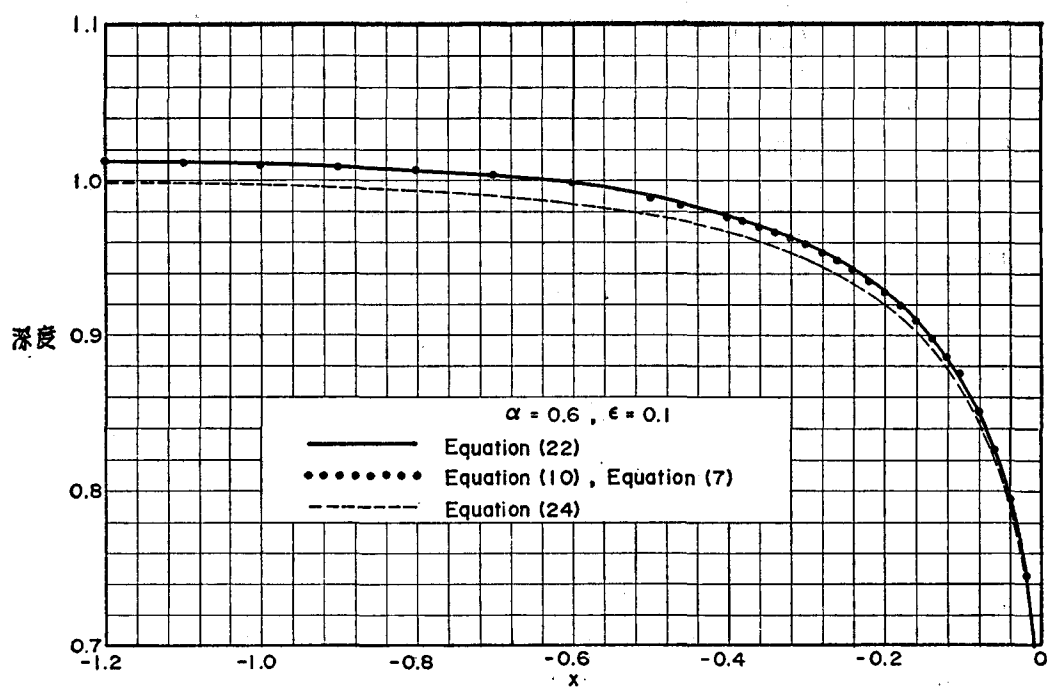
擾動解的典型代表（ $\alpha=0.6$ ）展示於圖七、圖八、圖九與圖十（擾動值 ϵ 分別等於 0.1、0.5、1.0、2.0）。圖中的實線代表利用階梯方法由式(20)求得的水面線，靠近控制斷面的附近，斷面間距 Δx 採用 0.01，遠離控制斷面則擴大為 0.1；虛線代表由式(10)求得的基础解 y_{0b} ，相當於主渠道無側入流時的水面線。如前段所述，基礎解可經由兩種不同的方式求得，利用式(10)或(24)，前者在計算的過程中必須預防數值溢流，而後者却無此必要。因此引用式(10)求基礎解 y_{0b} 時，吾人定義了終止斷面



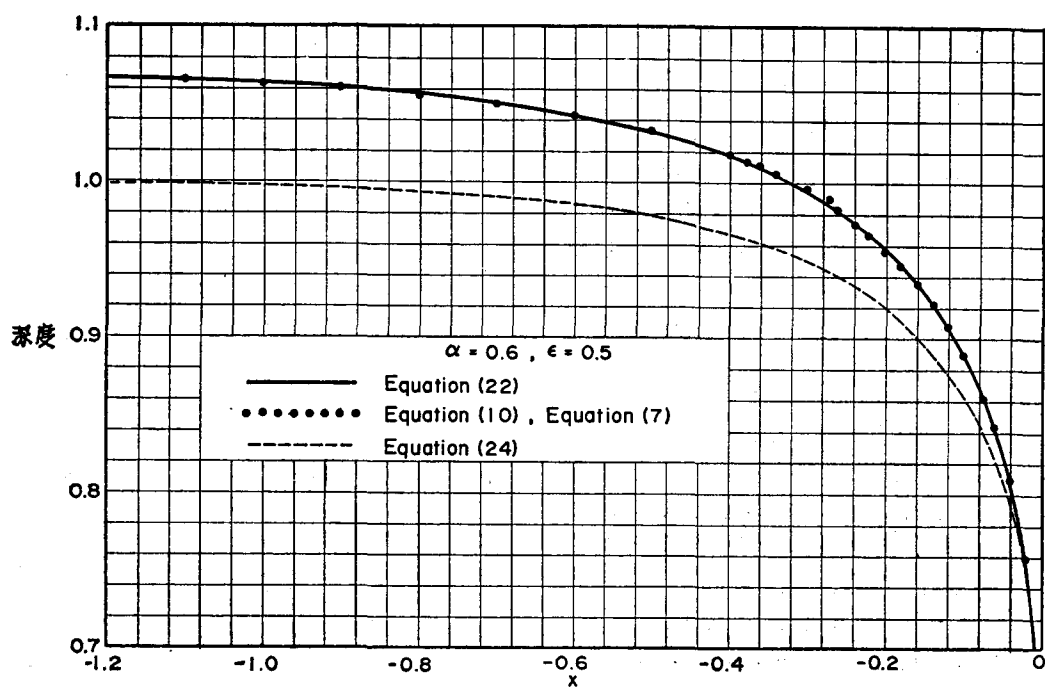
圖六 積分常數 C_0



圖六 積分常數 C_0



圖七 次臨界流之擾動解



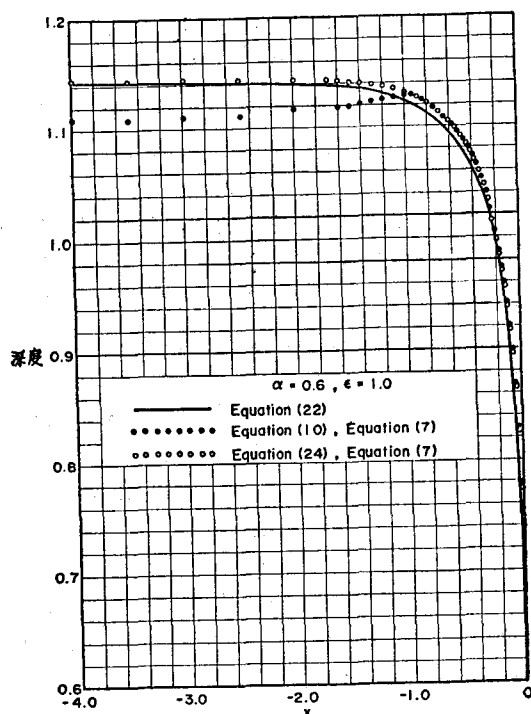
圖八 次臨界流之擾動解

表三積分常數 C_1

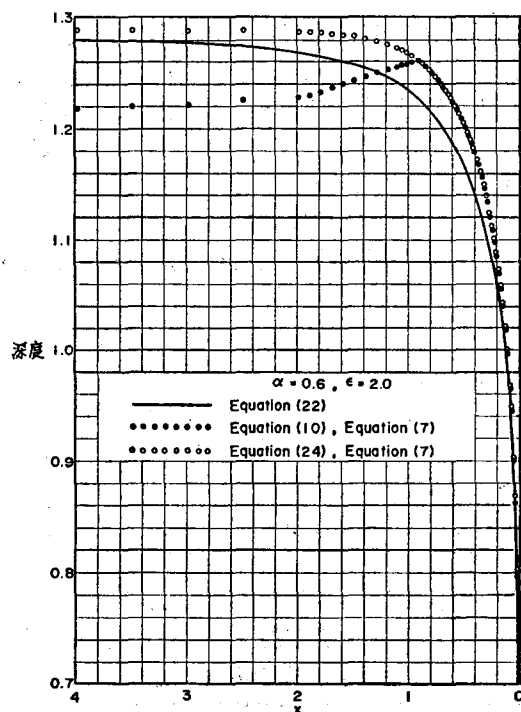
α	C_1	α	C_1
0.1	- 0.0002708038	1.6	26.62684
0.2	- 0.002142813	1.7	35.62271
0.3	- 0.006943750	1.8	47.02508
0.4	- 0.01468428	1.9	61.33025
0.5	- 0.02110024	2.0	79.11125
0.6	- 0.01058852	2.1	101.0257
0.7	0.05991438	2.2	127.8243
0.8	0.3008390	2.3	160.3593
0.9	1.023998	2.4	199.5942
0.98	2.949372	2.5	246.6131
1.04	4.180829	2.6	302.6209
1.1	4.954839	2.7	369.0042
1.2	7.088664	2.8	447.2416
1.3	10.11899	2.9	539.0160
1.4	14.21005	3.0	646.1757
1.5	19.61061		

用以克服這個困難，超過了終止斷面基礎解 y_{0s} 就假設為不變了。表二列出了在終止斷面上各種不同性質的深度，計有 y_{0b} 、 y_{0s} 、 y_{1b} 、 y_{1s} 、 y_{pb} 、 y_{ps} 與 y 。表二顯示在終止斷面上由不同方式求得的基礎解 y_{0b} 與 y_{0s} 差異相當微小，連帶地根據這兩個不同的基礎解分別由式(15)求得的第一階近似解 y_{1b} 與 y_{1s} ，以及而後分別由式(7)計算而得的擾動解 y_{pb} 與 y_{ps} 相互之間幾乎都沒有明顯地差異。然而吾人還得考慮另一個因素，那就是超過了終止斷面，基礎解 y_{0b} 是假設保持不變的，但另一個基礎解 y_{0s} 却不然。基礎解 y_{0s} 是使用試差法由式(24)求得的，在疊代的過程中並不會碰到數值溢流的現象，吾人可以一直反覆代入，只要基礎解 y_{0s} 的值不大於 1 就可以。在這種情形下，吾人將發現基礎解 y_{0b} 與 y_{0s} 對第一階近似解的影響相當不一致。參閱表四的第(2)與(3)欄，雖然基礎解 y_{0b} 與 y_{0s} 的值幾乎相同，只有千分之幾的差異而已，但是第(5)欄的第一階近似解 y_{1s} 幾乎是另一個近似解 y_{1b} (第(4)欄)的兩倍。參閱式(15)吾人發現此式包含因子 $(1 - y_0^3)$ ，以這個因子而言，兩個本身幾乎無差異的基礎解 y_{0b} 與 y_{0s} ，一旦考慮與 1 之間的差值，則其影響就迥然不同了，這一現象正反映在第一階近似解上。以參數 $\alpha = 0.6$ 為例，在斷面 $x = -1.1$ 表一顯示 $y_{0b} = 0.9969839$ ， $y_{0s} = 0.9981914$

，其間的差值為 0.0012075；在上游的另一斷面



圖九 次臨界流之擾動解



圖十 次臨界流之擾動解

表四 在 $\alpha = -4.0$ 的各種解或深度

(1) 參數	(2) y_{0b}	(3) y_{0s}	(4) y_{1b}	(5) y_{1s}	(6) y_{pb}	(7) y_{ps}	(8) y
0.4	0.9944851	0.9999996	0.02202050	0.04266459	0.9966871	1.004266	1.004266
0.6	0.9969839	0.9999999	0.09363274	0.1439994	1.006347	1.014400	1.014399
0.8	0.9981706	0.9999999	0.2074545	0.3413333	1.018916	1.034133	1.034121

$\alpha = -4.0$ ，由表四吾人得知 y_{0s} 仍然保持不變，但另一基礎解 y_{0b} 却增為 0.9999999，所以這兩個基礎解的差值由 0.0012075 增為 0.003016，這使得兩個第一階近似解 y_{1b} 與 y_{1s} 之間的關係由相差無幾變為相差懸殊。然而表四的第(6)與(7)欄仍然顯示由這兩種不同方式求得的基礎解 y_{0b} 與 y_{0s} 分別代入式(7)、(13)與(16)而求得的擾動解 y_{pb} 與 y_{ps} 却無明顯的差異。造成這種現象的主因有二：一是擾動值非常小，二是無論是根據那一個基礎解 y_{0b} 或 y_{0s} ，相對於基礎解第一階近似解本身的值並不很明顯。依式(7)的擾動解，吾人得知由基礎解所構成的第一項比由第一階近似解所構成的第二項大一級。由於這個緣故，使得原來因不同方式求得的基礎解所導致的懸殊差異並不反映於擾動解上。

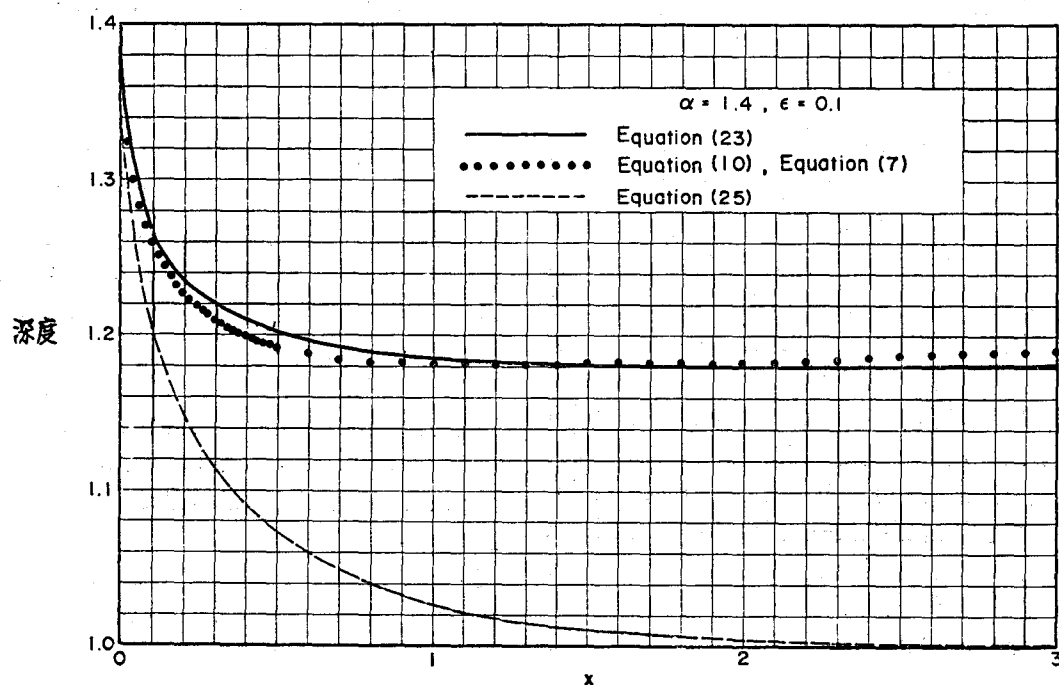
基於上述的分析，在擾動值較小的情況下，由不同方式求得的基礎解所導致的差異可略而不計，所以圖七與圖八的擾動解只根據由式(10)求得的基礎解 y_{0s} 。圖七與圖八均一致顯示，擾動值 ϵ 愈大則側入流的影響就愈明顯，因為圖中的實線與虛線的差距隨着擾動值的增加而擴大。主渠道無側入流時，水深應趨近於 1，而含側入流時水深却趨近於終極深度 y_t ，參閱式(19)，終極深度始終大於 1，而且隨着擾動值的增加而變大。除了這一個影響外，側入流（或者擾動值 ϵ ）對水面線的形狀並沒有明顯的影響。至於主渠道含側入流時，由不同方法所求得的水面線分別以實線與實心圓表示。實線代表利用階梯方法由式(2)求得的水面線，而實心圓代表擾動解的推測深度。從圖上實心圓的分佈看來，上述兩種不同方法的推測結果非常一致。這個現象是相當有趣的，原因如下。通常吾人尋求某一物理現象的擾動解，都是事先預料到擾動解僅適用於擾動值非常小的情況，像圖八的情況是不太常見的。利用擾動技巧的原則是基於吾人所探討的現象只是稍微偏離正規情況，而以基礎解代表這正規情況，那吾人就可根據基礎解及其所導致的一系列近似解組成擾動解，如式(7)所示。藉此分離程序，使擾動

值的影響不再呈現於各階次的近似解，而僅用以代表近似解的大小等級。在此構想下，如果擾動非常小，當然擾動解可應用於較大的範圍，而且準確度也較高。一旦擾動值變大，不但擾動解的適用範圍縮小同時準確度也跟着減小。然而就圖八的吻合情形而言，在擾動值等於這樣高的情況，擾動解還有這般高的吻合程度，實在是件不太尋常的現象。

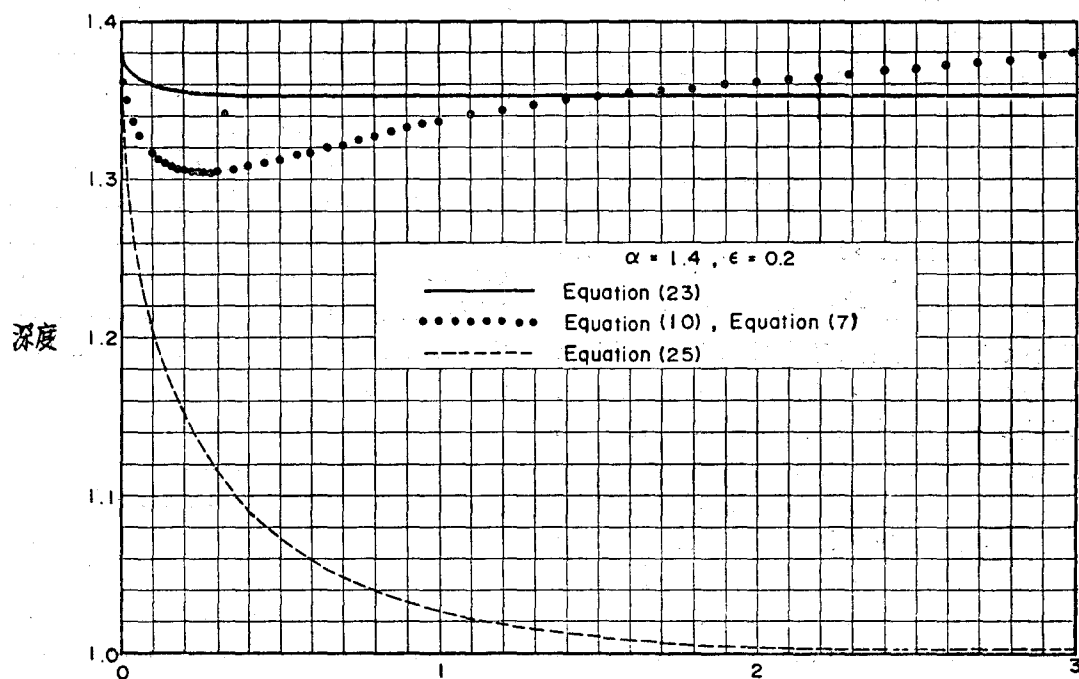
為了繼續探討擾動值到底要高到多大的程度，擾動解才會出現偏離的現象，也就是說計算的結果不座落於實線的附近。在同樣的參數值（ $\alpha = 0.6$ ），擾動值 ϵ 等於 1 與 2 時的計算結果分別展示於圖九與圖十。擾動解以不同的符號表示，實心圓與空心圓分別代表採用由不同方式得來的基礎解，實心圓採用式(10)而空心圓採用式(24)。圖九與圖十均一致顯示擾動解的分佈可分為兩個區域：一區是自控制斷面至斷面 $x = -1.1$ ，另一區自斷面 $x = -1.1$ 而後的上游。當擾動值等於 1 時，在控制斷面的附近（可上溯至斷面 $x = -1.1$ ），擾動解的推測結果幾乎與實線密合；但是這種吻合程度因擾動值的增加而逐漸遞減，參閱圖十。圖十的擾動值已提高到 2 了，在這種情況下，靠近控制斷面的擾動解已經相當明顯地偏離實線了，擾動值再增大，偏離的幅度將會更明顯。其次，圖九與圖十均很清楚地顯示大約自斷面 $x = -1.1$ 起沿上游方向，擾動解的分佈分成二支，決定於擾動解是依據那一方式計算而得的基礎解 y_{0b} 或 y_{0s} 。這兩個基礎解都是利用試差法求得的，在計算程序上的差異及其影響已詳述於前段。不過利用表四的數據吾人可予以數字的說明與比較。參閱式(13)與(16)，吾人得知第一階近似解本身的大小與擾動值無關，只視參數 α 的值與斷面位置 x 而定。以參數 α 與斷面位置 x 分別等於 0.6 與 -4.0 為例，表四的第(2)與第(3)欄顯示基礎解 y_{0b} 與 y_{0s} 分別等於 0.9969839 與 0.9999999，而依據這兩個基礎解，表四的第(4)與第(5)欄顯示對應的第一階近似解 y_{1b} 與 y_{1s} 分別等於 0.09363274 與 0.1439994，其間的差值等於 0.05036666。參

閱式(7)吾人得知擾動解是由各不同階次的近似解組成的，相鄰的兩個近似解適巧相差一個等級，等級以擾動值的次方來衡量。故對擾動解的影響而言，

上述因不同的基礎解而導致第一階近似解本身彼此之間的差異須再乘以擾動值的大小。根據這樣的分析，圖九與圖十的差異就非常清楚了。當擾動值分



圖十一 超臨界流之擾動解



圖十二 超臨界流之擾動解

別等於1與2時，不同的基礎解而導致擾動解本身的差異應該分別等於 $1 \times 0.05036666 = 0.05036666$ 與 $2 \times 0.05036666 = 0.10073332$ 。

圖九顯示如果吾人採用由階梯方法所求得的基礎解 y_{0s} ，則擾動解的推測值與實線的分佈還是相當吻合的。相反地，若基礎解採用式(10)，則自斷面 $x = -1.1$ 後擾動解的推測值都座落在實線之下，在斷面 $x = -4.0$ ，比另一擾動解 y_{ps} 小了0.05左右。可是若擾動值再增加，例如圖十的情況，這時擾動值已經等於2了，偏離現象相當明顯了。只有在控制斷面的附近，同時也只有採用式(24)的基礎解 y_{0s} ，擾動解的推測結果才能符合實線的分佈，爾後的斷面，偏離現象就無法避免了。

2. 流況為超臨界流：

參閱式(7)，擾動解係由基礎解及第一階近似解所組成的，而擾動解的推測是否能符合於由式(22)或(23)所求得的結果，以及這兩者之間有多大的差距，這些幾乎完全決定於第一階近似解。在控制斷面上第一階近似解的值等於零，而後沿計算方向遞增（流況為次臨界流時自下往上，流況為超臨界流時自上往下）。其次由於遠離控制斷面後，基礎解逐漸趨近於1，所以第一階近似解以 $-\frac{2}{3}\alpha^3$ 為其極限值。如果流況為次臨界流時，參數 α 的值小於1，三次方更小。因此相對於基礎解的值，第一階近似解本身值就隨着參數 α 的遞減而急速遞減。在這種情況下，擾動值可以大幅度地提高，但擾動解仍然可適用於相當大的範圍內而且準度也相當高，參閱圖八與圖九。這正是流況為次臨界流時擾動解的特性之一。然而一旦流況改變為超臨界流，擾動解的特性就完全改變了，這時候第一階近似解本身值仍然約相當於 $-\frac{2}{3}\alpha^3$ ，隨着參數 α 的增加而急劇增大。為了使擾動解得以適用於合理的範圍內以及維持一適當的準確度，擾動值必須非常小才能使式(7)的第二項相對地小。圖十一與圖十二的情況正說明了這一特徵。圖十一與圖十二為流況屬於超臨界流時擾動解的典型代表，參數 α 等1.4，擾動值分別等於0.1與0.2。圖中的實線代表利用階梯方法由式(23)求得的水面線，虛線代表用式(10)求得的基礎解 y_{0s} ，由此計算而得的擾動解以實心圓標示於圖上。擾動值等於0.1時，圖十一很清楚地顯示擾動解的推測結果幾乎完全座落於實線上；而實線與虛線間的差距即代表側入流的效果，比起次臨界流，

側入流的效果相當顯著，參閱圖七。然而擾動值稍提高些，圖十一的吻合現象完全消失了，參閱圖十二實心圓的分佈。

流況為超臨界流時除了上述的特性外，第一階近似解的值幾乎完全與基礎解的由來方式無關。

四、結 論

參閱式(3)，由於側入流的影響使分子的值減小同時分母的值增大，因而導致主渠道含側水流時的水面線變為較緩，這種現象發生於 M_2 、 S_1 與 S_2 等三類型的水面線。其他三類型的水面線： M_1 、 M_3 與 S_3 ，無法獲得肯定的結論，因為側入流使分子與分母的絕對值同時增加。

式(3)為主渠道含側入流時的微分方程式，利用階梯方法此式可轉為便於計算的差分式 (Difference equations)，如式(22)或(23)所示。由式(22)或(23)逐斷面使用試差法反覆代入深度，直到殘餘值小於容許誤差。為了分析上述差分式及試差法的準確度，吾人必須先得式(3)的通解以供比較。然而由於式(3)的通解目前尚無法解析而得，吾人只能藉助於主渠道無側入流時的分析解，此解即為一般俗稱的 Bresse 函數。主渠道無側入流時的微分方程式相當於式(3)，但式中的擾動值 ϵ 等於零，而對應的差分式為式(24)或(25)。經由比較與分析，吾人發現只要在控制斷面的附近，斷面間距 Δx 採用0.01，而後的斷面可擴大為0.1，則利用試差法由式(24)或(25)所求得的結果非常準確，與分析解間的差異起自於第三位的有效數字，而且小於2，易言之，其間的誤差大約為 ± 0.002 。因此吾人由此推論利用試差法由式(22)或(23)計算而得的水面線非常接近於式(3)的眞解 (Exact solution)，其間的誤差大致也在 ± 0.002 以下。總而言之，採用由式(22)或(23)計算而得的水深為依據，而進一步分析擾動解的準確度與適用範圍是相當合適的。

參閱式(7)，擾動解是由基礎解及其所導致的近似解組合而成的，相鄰的兩近似解適巧差一個等級，大小等級以擾動值的次方為計。基礎解即為 Bresse 函數，參閱式(10)與(12)，Bresse 函數為一有理分數的積分式，被積函數的形式是 $1/(1-\eta^3)$ ，故以 $\eta=1$ 為漸近線。利用試差法反覆代入尋求基礎解時必須設定一個容許的最大值，以防在疊代的過程中基礎解太接近漸近線而造成數值溢流的現象。然而容許的最大值必須儘可能靠近漸近線，

否則對第一階近似解的影響相當大。無論這個設定的最大值多靠近漸近線，對基礎解本身並沒有絲毫的影響。例如當參數 α 等於 0.6 時，最大值設定為 0.9969839 或 0.9999999，基礎解的差異只不過 0.003016 而已。然而代入式(9)求第一階近似解時吾人發現此差異所導致的差距就相當顯著。基礎解分別等於 0.9969839 與 0.9999999 而對應的第一階近似解分別等於 0.2074545 與 0.3413333。這種現象尤以流況為次臨界流時最為明顯。

由式(7)吾人得知擾動解是否能符合於由式(2)或(3)所求的結果以及這兩者之間有多大的差異，這些問題幾乎完全決定於第一階近似解。在控制斷面上第一階近似解的值必須等於零以符合邊界條件，而後沿計算方向遞增（流況為次臨界流時自下往上，流況為超臨界流時自上往下）。遠離控制斷面後基礎解逐漸趨近於 1，而第一階近似解却趨近於 $-\frac{2}{3}\alpha^3$ 。如果流況屬於次臨界流，則第一階近似解本身值隨着參數 α 的遞減而急速下降，擾動值可大幅度地提高，擾動解（式(7)）仍然可適用於相當大的範圍內而且準確度也相當高，參閱圖八與圖九。這種現象是相當不尋常的。一般而言吾人使用擾動技巧來尋求分析解，都是預計擾動解僅適用於擾動值非常小的情況，而圖八與圖九的擾動值已分別高至 0.5 與 1 了。

另一方面如果流況是超臨界流，第一階近似解本身值仍然相當於 $-\frac{2}{3}\alpha^3$ ，隨着參數 α 的增加第

一階近似解的值急速增大。為了使擾動解得以適用於合理的範圍內以及維持一適當的準確度，則擾動值必須相當地小，才能使式(7)的第二項相對地小，參閱圖十一與圖十二的差異。以擾動解（式(7)）應用於分析主渠道含側入流時的水面線而言，這一點是相當特殊的，流況為次臨界流時擾動解的準確度不太受擾動值的影響，但是若流況屬於超臨界流時，準確度極受擾動值的控制，擾動解只能適用於擾動值非常小的情況。

五、致 謝

淡江大學工學院電子計算中心之鼎力協助，致本論文得以順利完成，作者在此謹致深厚謝意。

參 考 文 獻

- (1) W. H. Li. "Open Channels with Non-Uniform Discharge", Trans. Am. Soc. Civil Engrs., Vol. 120: (1955), p. 255.
- (2) Ali Hasan Narfeh. "Introduction to Perturbation Techniques" (1981), p. 18-22.
- (3) 施清吉：擾動法之應用於水面線分析，中國農業工程學報，二十八卷二期，(1982)，p. 1-19.
- (4) F.H. Henderson "Open Channel Flow" (1966), p. 71.
- (5) Ven Te Chow "Open Channel Hydraulics" (New York: Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1959). Chap.10.

(上接第40頁)

- 5.淡水河及其他河川洪水預報系統有關改善報告，青木佑久、竹村公太郎、湯谷優（1981年11月）。
- 6.淡水河、濁水溪及曾文溪洪水預報系統調查報告及綜合討論會議記錄，高山一彥、青木佑久、宮井宏、田中慎一郎、湯谷優（1984年2月7日）。
- 7.大甲溪、烏溪及高屏溪洪水預報系統調查報告及綜合檢討會議記錄，宮井宏、中村雅、田中

慎一郎、森重卓雄、藤原武夫（1985年2月12日）。

- 8.貯蓄函數解法及校驗，鄭醒明著（臺灣水利第21卷第1—2期民國62年3月）。
- 9.洪水シミュレーション，システム説明書，日本近畿地方建設局定川ダム統合管理事務所（1982年3月）。
- 10.流出計算例題集：日本建設省水文研究會，青木佑久，前山利雄編。