

修正出水模式

Revised Yield Model

淡江大學水資源研究所教授

施 國 肱

Kuo-Kung Shih

摘 要

水資源為臺灣寶貴資源之一，由於臺灣河川的特性，必需以水庫來達成調蓄運用水資源的目的。因此，水庫容量，出水量之規劃，為水資源工程上重要的課題。出水模式乃是利用線性規劃模式為工具，用以推估水庫容量或其出水量。

本研究針對近似出水模式造成高估水庫有效蓄水量之原因詳加探討，同時考慮臺灣地區之水文特性加以修正並稱之為「修正出水模式」。藉百壽水庫之實例印證，此修正模式有較佳之可靠度，以顯示出修正出水模式為一實用價值高之優良模式。

Abstract

A "Revised Yield Model", which takes into account the hydrology characteristics in Taiwan, is proposed in this study to try to find out the factors of overestimation of the Loucks approximate yield model that tends to overestimate the active storage capacity of a reservoir. When applied to the Pai-Shou Reservoir planning and operation the revised model is found to offer more reliability and consistency with physical data while the advantages of the original model is preserved.

前 言

臺灣本島之雨量雖然豐沛，但在時間與空間上之分布却極不均勻，加上坡陡流短，無法充分直接利用，故而時生旱澇之現象。現今建造水庫以調節水源，乃為不可或缺之工作。更由於經濟之發展需水量之提高，在已有水庫之河系中另行興建水庫，使形成串並聯系統以提高該河系水資源之利用率，已是刻不容緩之工作。

水庫之規劃與操作，實為達成該河系水資源供求之平衡。原「出水模式」以推求最小水庫容量為主，以供水庫設計之參考。在水庫容量已知之情況

下，「出水模式」可用以推求水庫的最大供水量。以提供水庫下游需水量分配之參考。「出水模式」除可應用於單一水庫外，更可以應用於串聯及並聯水庫羣。現今臺灣水庫之開發，常需與其他水庫聯合運轉，在此種情況下更能顯現此模式之實用價值。

本論文之目的在述明出水模式之特性，並改良之。以增進其在臺灣地區的實用性，期使各水資源有關機構能更加有效的應用性。

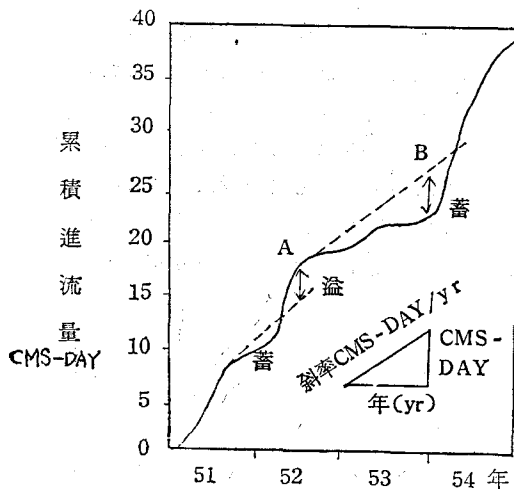
出 水 模 式

(一)概述：

近二十年來水資源工程界最顯著而重要之進步

為應用及發展優選技術於複雜水資源系統之規劃、設計及管理上。而其中又以最佳化技術運用在水庫系統規劃研究上成功的例子最多。在最佳優選技術中又以線性規劃之理論方法最為完備在水資源之應用上可由簡單的經濟估算至複雜的。水庫運用與管理。出水模式實為一線性規劃模式，其限制式為描述水庫之物理限制條件及水平衡方程式。其目標函數為最小水庫容量或最大出水量。故稱為——出水模式(Yield Model)。

出水模式為 Loucks 等人所提出(4,P339-371)，其基本觀念係延伸於累積曲線法及序列峯值法。累積曲線法早於1883年經 Rippl 提出(7)，其以作圖法(圖1)達到求解出水量或最小水庫蓄水容量之目的，當出水量(圖中破折線之斜率)已知時，可由圖中求得最小水庫蓄水容量，反之當水庫蓄水容



圖一累積曲線法求一定出水量時之水庫容量

量已知時，亦可由圖中推得其安全出水量；序列峯值法為 Thomas 於1963年發展出來之數理模式(7)，令 S_t 、 S_{t+1} 為 t 時段之期初蓄水量及期末蓄水量， Q_t 為 t 時段之進流量， D_t 為 t 時段之需水量則其數式如下：

$$S_t = \begin{cases} D_t - Q_t + S_{t+1} & \text{如果為正} \\ 0 & \text{其他情況} \end{cases} \quad (1)$$

對某一特定出水量 D_t ，則 $\text{MAX}\{S_t\}$ 即為所需之水庫蓄水容量，序列峯值法除可免去累積曲線法之繁瑣作圖手續外，並可經由電腦迅速求解。

雖然累積曲線法與序列峯值法甚為簡易且求解迅速，後者並可用以考慮需求量變化之情況，但 Loucks 等人指出(4, P236)，在需要考慮蒸發損失、

水庫水位調節及多座水庫系統時以上兩法均不適用，因為蒸發量為水位(水庫水量)之函數，同時防洪等又必須考慮水庫之水位，累積曲線法及序列峯值法却僅考慮需求量與進流量之累積缺水量。未能將各時段之水庫實際蓄水量表示出來，因此無法獲得其中之關係；相同的，此種無法將各時段實際蓄水量表示出來的缺點使累積曲線法及序列峯值法亦無法應用於水庫系統，Loucks 遂推出一種可考慮水庫實際蓄水量之模式——出水模式。

(二)模式的演進

(以單一水庫模式為例)

A 基本模式(Complete yield model)

$$\text{目標函數 } \text{MIN } K \text{ (MAX } Y_t) \quad (2)$$

$$\text{限制式 } S_t + Q_t - Y_t - R_t = S_{t+1} \quad (3)$$

$$S_t \leq K \quad (4)$$

$$S_{NT+1} = S_1 \quad (5)$$

式中 N 表記錄年數， T 表一年中之時段區分數， Y_t 為於 t 時段之出水量，(5)式將未知之期初蓄水量 S_1 假定與未知之期末蓄水量 S_{NT+1} 相等，此限制式之列入實基於造成解值具穩定性的觀點。

上模式係 Loucks 以水平衡限制式(式3)及容量限制式(式4)為基礎所得之模式，式中 K 表水庫有效蓄水容量， S_t 、 Q_t 、 R_t 分別為 t 時段之期初蓄水量、進流量及溢流量，因本模式已將所有時段列入考慮，故能得到極為精確之解值，可是當年數及時段增加時，模式之變數及限制式數目亦將大幅增加，由於模式中之變數及限制式數目過多，致應用於電腦求解時佔用太多的電腦空間，並造成執行時間太長等之不經濟情形，尤其當使用於多座水庫系統時更為顯著，為避免變數及限制式過多，乃有將此模式簡化的構想，而衍生出下述之近似模式。

B 近似模式 (Loucks approximate yield model)

Loucks 等人發現(4,P343) 水庫有效蓄水容量 K 通常由紀錄流量的一短暫時段即可決定，此一時段稱為臨界乾早期 (Critical drought period) (2)；此時段通常可由序列峯值法或累積曲線法求出。既然水庫有效蓄水容量係由紀錄流量之臨界乾早期所決定，則將所有時段皆考慮於出水模式中係屬多餘，也就是說模式可予以簡化，即臨界乾早期內所有時段皆列入考慮，而其他時段則考慮其越年變化就足够了。

近似模式基於上述臨界乾早期之考慮，又將水

庫有效蓄水容量 K 劃分為越年有效蓄水容量 K_0 及當年有效蓄水容量 K_w 而得到下述之近似模式。

$$\text{目標函數 } \min K(MAY \ Y_P) \quad (6)$$

$$\text{限制式 } S_y + Q_y - R_y - Y_P = S_{y+1} \quad \forall y(7)$$

$$s_t + Q_t - y_{pt} = s_{t+1} \quad \forall t(8)$$

$$S_y \leq K_0 \quad \forall y(9)$$

$$s_t + K_0 \leq K \quad \forall t(10)$$

$$S_{N+1} = S_1 \quad (11)$$

$$S_{T+1} = s_1 \quad (12)$$

式中 S_y 、 Q_y 、 R_y 分別為 Y 年之年初蓄水量，年進流量及年溢流量， s_t 、 Q_t 、 y_{pt} 分別為臨界年內 t 時段之期初蓄水量及當年水庫進流量（詳見後述） y_{pt} 為臨界年 t 時段之出水量， Y_P 為年出水量，且Loucks等人亦將原始模式之水平衡限制式（式3）分為越年水平衡限制式（式7）及當年水平衡限制式（式8），容量限制式（式4）分為越年容量限制式（式9）及當年容量限制式（式10）。

Loucks等人針對近似模式並建議

(1) $y_{pt} = f_t Y_P$, f_t 為既定係數（predetermined fraction）

$$\text{且 } \sum_t f_t = 1$$

(2) $Q_t = \beta_t Y_P$, β_t 為臨界各時段進流量與其年流量之比值，即 $\beta_t = \frac{q_t}{Q_c}$ 且 $\sum_t q_t = Q_c$, $\sum_t \beta_t = 1$ 其中

q_t 為臨界年 t 時段之實際進流量， Q_c 為臨界年之年入流量，Loucks等人預期此項建議能使近似模式得到不錯的結果。

(3) $Y = N$ 時， $S_{N+1} = S_1$ ； $t = T$ 時， $s_{T+1} = s_1$ 。

式中 N 表紀錄年數， T 表一年中之時段區分數（臺灣地區一般採用36旬），依(1)(2)兩項(8)式改寫為

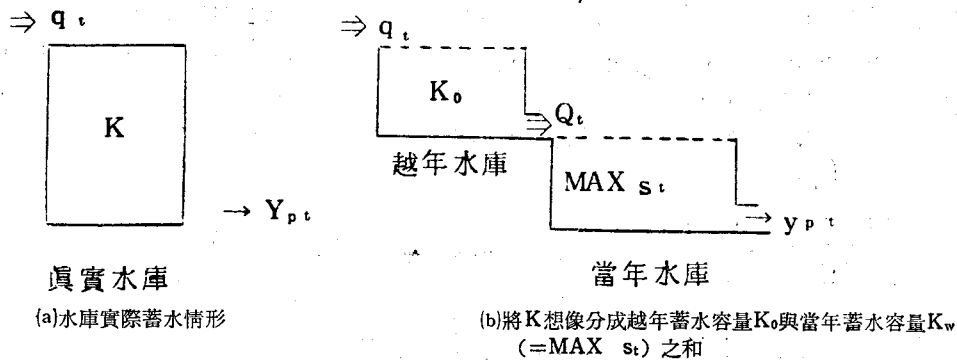
$$s_t + (\beta_t - f_t) Y_P = s_{t+1} \quad \forall t(13)$$

	變數	限制式
原始模式	$2NT + 1$	$2NT$
近似模式	$2N + T + 2$	$2(N + T)$

表一原始模式與近似模式之變數及限制式數量比較表

由表一可知，就變數及限制式而言，近似模式確已針對原始模式作了相當大的簡化工作。

另Loucks等人將最大每年年初蓄水容量定為越年有效蓄水容量 K_0 ，剩餘的有效蓄水容量則由臨界年內因出水量與當年水庫進流量分佈不一致而增加之年內有效蓄水容量 K_w 來補足，即 $K = K_0 + K_w$ ，對此種劃分法，本研究在此借助近似模式示意圖（圖2）予以探討實際水庫之狀況(1)。



圖二 近似模式示意圖

圖二(b)中 q_t 為臨界年 t 時段之進流量， Q_t 為臨界年 t 時段當年水庫之進流量， s_t 為臨界年 t 時段當年水庫之期初蓄水量， y_{pt} 為 t 時段之出水量。首先考慮年流量時，則在特定之年出水量下，可得到一越年水庫之最小有效蓄水容量 K_0 ，然後再考慮臨界年中該越年水庫中所蓄之水將依一定規則放流入當年水庫以應付出水 y_{pt} ，當 Q_t 與 y_{pt} 不一致時又將形成一當年水庫所需最小有效蓄水容量 $\text{MAX}\{s_t$

$\} (=K_w)$ ，則總有效蓄水容量為 $K_0 + K_w$ 。

然而在實用方面，利用近似模式求出結果與以序列峯值法之結果為基準作比較（未考慮蒸發量時此二結果應一致），顯示出近似模式常高估了水庫總有效蓄水容量，換句話說即近似模式之解值與基本模式並不一致，近似模式雖對基本模式簡化了許多，然其實用性仍有待商榷。

就實用性而言，光是達到簡化之工作仍然不夠

，其目的應是如何維持其準確性，近似模式既然無法達到實用之目的，因之如何將其修正，並提升其準確性為本研究主要進行之工作。

前述近似模式雖然完成了可觀的簡化工作，但是在加入臨界年之當年蓄水考慮後却產生準確性不佳之結果，因此本研究將在此討論並指出近似模式之所以無法達到準確性之原因。

(a) $Q_t = \beta_t Y_P$ 之假設不妥。

臺灣地區水文及地文之特性每形成其越年有效蓄水容量均為年出水量與臨界年之年進流量之差值，即

$$K_0 = Y_P - Q_c \quad (14)$$

依 Loucks 等人之建議 $\beta_t = -\frac{q_t}{Q_c}$ ，則

$$\beta_t Y_P = \frac{q_t}{Q_c} (Q_c + K_0) = q_t + \frac{q_t}{Q_c} K_0 \quad (15)$$

由(15)式顯示除了 q_t 必須流入當年水庫外，越年水庫中亦有 $\frac{q_t}{Q_c} K_0$ 之水量亦流入當年水庫，也就是說 q_t 大時，由越年水庫中調節之水量 $\frac{q_t}{Q_c} K_0$ 就跟著加大， q_t 愈小時調節之水量也跟著減小。但就實際情況而言，越年水庫在臨界年年初即已蓄存 K_0 之水量。由圖二知， q_t 係先流入越年水庫再流入當年水庫之水量。當 $q_t < y_{pt}$ 時，不足之量非得藉助蓄於 K_0 中之水量來調節不可，然 $q_t \geq y_{pt}$ 時則無需再藉助 K_0 中之水量來調節，也就是 q_t 愈小時，調節用水量之需求必然加大， q_t 愈大則調節用水量之需求自然減少，顯然 $Q_t = \beta_t Y_P$ 之假設與實際水量之調節作用背道而馳。

(b) $S_{T+1} = S_1$ 之假設不合乎實際情況

在臨界年年底時，為了滿足最大供水量，蓄水量一般均被耗盡（如尚有蓄水的話，其剩餘蓄水量亦應不多），因此臨界年年底之蓄水 S_{T+1} 應為非常少而趨近於零，年初蓄水前為應付該年之乾旱，常需蓄足大量之水，否則無法補足年內欠缺之用水，即 $S_1 >> S_{T+1}$ ，而近似模式却令 $S_1 = S_{T+1}$ ，其甚不合乎實際情況。故採用 $S_{T+1} = S_1$ 之假設有時會產生低估出水量的情形。

(c) 將水庫劃分為 K_0 及 K_w 之不當

水庫容量實際上並無越年及當年之分，當越年水庫所蓄之水有部份被利用時，所空餘之位置即應可供當年水庫所需，而在此將其硬性劃分為二並不得通用，亦即 s_t 等之臨界乾旱所需之容量部份應可

由越年水庫容量提供，而在此處却另加計算。以上每每造成高估水庫所需容量之情形，反之如水庫容量已知而推求最大出水量時常造成過份低計出水量之情形。

(d) 臨界年內亦應考慮時段溢流項 r_t 較符合臺灣地區水文特性

以百壽流量紀錄為例(1)，出水量在 300CMS-DAY 時，其臨界年(51水文年)之時段(旬)流量變化甚小，因之蓄水都唯恐不及，更遑論及溢流了，因之如未加入溢流項 r_t 並無任何影響。可是當出水量增為約 500CMS-DAY 時，其臨界乾旱期為 52、53 兩個連續水文年，此時第 52 水文年 9 月中旬之流量高達 644.89 CMS-DAY（事實上百壽水庫之有效蓄水容量僅為 162.04CMS-DAY 絕對無法將之全部蓄存，勢非溢流不可），由於近似模式當年水平衡限制式裏未考慮時段溢流項 r_t 而時段出水量 y_{pt} 已定，如此一來該項應溢流而未能溢流之水量在當年水平衡限制式中只好由 s_t 項予以蓄存，由 $K_w = \text{MAX}\{s_t\}$ 之定義知， K_w 將會大幅度增加。並由 $K = K_0 + K_w$ 知近似模式將高估水庫有效蓄水容量 K 。

考慮以上四項缺失後，本研究提出下述之修正出水模式。

C 修正出水模式(Revised Yield Model)

目標函數 $\text{MINK}(\text{MAX } Y_P) \quad (16)$

限制式 $S_y + Q_y - R_y - Y_P = S_{y+1} V_y$,

$$y \neq c \quad (17)$$

$$s_t + q_t - r_t - y_{pt} = s_{t+1} \quad (18)$$

$$S_y \leq K \quad V_t \quad (19)$$

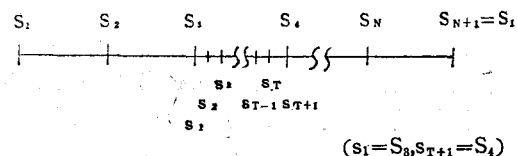
$$s_t \leq K V_t \quad V_y \quad (20)$$

$$S_c = S_1, S_{c+1} = S_{T+1}, S_{N+1} = S_1 \quad (21)$$

式(17)中之 c 表臨界年 Critical year，為求對修正出水模式能有更深之瞭解，特將其之特點分述於後。

(1) 考慮連續性

將具有決定性之當年水平衡限制式直接與越年水平衡限制式相聯，而當臨界期結束後立刻再返回



圖三 修正出水模式連續性示意圖

越年水平衡限制式，其實質意義將可由圖三看出，此項特點可克服近似模式 $S_{T+1}=S_1$ 之錯誤假設，並使修正模式更符合實際之物理意義。

(2)符合實際現象

$$S_y \leq K, s_t \leq K, Q_t = q_t$$

原來不切實際的假設 $S_y \leq K_0$ 及 $s_t + K_0 \leq K$ (如圖二(b)) 已被捨棄而代入以更合乎物理意義之 $S_y \leq K$ 及 $s_t \leq K$ ，由圖二(a)知實際上不論任何時段之蓄水容量之最大極限為水庫有效蓄水容量 K ，超過 K 之水量必然溢流，經此項修正後，近似模式因 K_0 及 K_w 造成之誤差將不會再出現於修正模式中。

當年水平衡限制式中時段入流量 Q_t 直接取用該時段之實際入流量 q_t ，此舉將可消除近似模式因 $Q_t = \beta_t Y_P$ 導致之錯誤結果，並使修正模式更符合實際。

(3)符合臺灣地區水文特性

Loucks 等人 (4, P 339-371) 所建立之近似模式係以美國大陸地區之水庫規劃為背景，易任先生等人指出大陸型地區之水庫流量平穩加之其蓄水容易又大；足以蓄存臨界乾早期之任何鉅額時段進流量，加入溢流項 r_t 純屬多餘；而修正模式於當年水平衡限制式中加入時段溢流項 r_t ，將使臨界年中臺灣地區雨季或颱風時之特大流量亦得以宣洩，實際應用時，如進流量平穩，所求得之 r_t 項可等於零，一

且臨界乾早期有特殊鉅額入流量時， r_t 項會立即反應供其宣洩，足見 r_t 項之加入將使修正模式更符合臺灣地區之實際情況。

由表二得知修正模式之變數稍多於近似模式，其所增加之變數係因加入溢流項 r_t 所致，然限制式則反較近似模式減少四個；就線性規劃而言，計算之煩易其主要控制在於限制式之個數，而變數則為較次要因素；故變數之加多並未減低修正模式之優點。

	變數	限制式
原始模式	$2NT + 1$	$2NT$
近似模式	$2N + T + 1$	$2(N + T)$
修正模式	$2(N + T) - 1$	$2(N + T) - 4$

表二 各種模式變數及限制式數目比較表

(註：假設臨界年為一年)

模式之比較

本研究利用近似模式及修正出水模式推求百壽水庫之安全出水量及最佳有效蓄水容量。結果如表三、表四。單一水庫之出水模式不考慮蒸發等因素時，應與序列峯值法所得結果相同。

年出水量 Y_P	Loucks 近似模式 水庫容量 K_a ①	修正出水模式 水庫容量 K_a ②	序列峯值法 ③	Loucks model 誤差 $\frac{①-③}{③}$	修正 model 誤差 $\frac{②-③}{③}$
(1) 209.99	88.49	88.37	88.40	0.1%	0.01%
(2) 300.00	216.43	148.83	148.82	45.43%	0.01%
(3) 423.10	391.02	237.73	240.98	62.26%	1.35%
(4) 474.10	465.06	278.68	279.20	66.57%	0.19%
(5) 562.79	585.06	362.44	369.60	58.30%	1.93%
(6) 612.76	660.99	409.64	418.50	57.94%	2.11%
表三 由已知出水量求最佳水庫容量 平均				48.43%	0.93%

由以上二表比較，不論由六組不同的年出水量之情況下，求最佳水庫容量如表二，或由不同水庫容量，求最大安全出水量。兩者與序列峯值法之誤差，修正出水模式要遠比近似模式來得小。且由表

三可知 Loucks 近似出水模式在高水庫容量時，出水量小於水庫容量。這在臺灣是不合理的。而修正出水模式之出水量則都大於水庫容量。也就是修正出水模式不但準確性高，也更為優良。

水庫容量 Ka	Louck 近似模式 出水量 Yp ①	修正出水模式 出水量 Yp ②	序列峯值法 ③	Loucks model 誤差	修正 model 誤差
				$\frac{①-③}{③}$	$\frac{②-③}{③}$
(1) 162.04	261.85	320.81	317.95	17.64%	0.9%
(2) 200.00	288.56	370.56	367.50	21.48%	0.83%
(3) 300.00	358.95	496.28	492.00	27.04%	0.86%
(4) 400.00	429.30	602.07	597.00	28.09%	0.85%
(5) 500.00	499.30	653.82	645.00	22.53%	1.37%
(6) 600.00	570.10	677.82	668.00	14.65%	1.47%
平均				21.90%	1.05%

表 4. 由已知水庫容量求最大出水量

結論與建議

(1)修正出水模式克服了近似模式三項不合理的假設，使出水模式更符合實際物理意義。加入溢流項 r_t 符合臺灣地區水文特性，提高出水模式在臺灣地區之實用性。

(2)就其所需資料及實用性而言：Viessman 等人〔8〕指出出水模式在實際應用上極為容易且所需之資料亦較少；此外其亦指出，出水模式具有健全之物理基礎(Sound physical base)。

(3)本文之目的在指出近似模式之不合理處並加以修正，故僅以單一水庫為研討之對象並不考慮蒸發或發電等其他因素。此等簡單之情形由序列峯值法即可得有效之解答。出水模式之真正實用價值在於其能考慮蒸發、發電等因素。並同時分析多重水庫系統。此方面應用之實例將另文報導。

(4)就簡化程度而言：以一具有 T 時段之 N 年水文資料為例。由基本模式 $2NT$ 個限制式減至近似模式 $2(N+T)$ 之限制式，再減至 $2(N+T)-4$ 之修正出水模式。以百壽水庫 22 個水文年之資料，每一年考慮分成 36 旬。則由 $2 \times 22 \times 36 = 1584$ 減至 $2 \times (22+36) = 116$ ，再減至 $2 \times (22+36) - 4 = 112$ 。此一優點使得在實際應用上，可不虞電腦容量之不足。

(5)就其數理演算而言：Loucks 等人〔4〕及 Stedinger 等人〔6〕皆分別指出出水模式屬於隱性序率模式；而 Roefs 等人〔5〕則指出隱性序率模式其求得解答之數理演算步驟與水庫個數成正比，而顯性序率模式則與水庫個數成指數關係。因此序率出水模式顯然比一般之顯性序率模式如線性決策規則與機率限制模式(linear decision rule

and chance-constrained models) 在多重水庫系統分析上較易於施行且經濟。

(6)出水模式應用於多重水庫時，其演算步驟雖僅與水庫個數成正比。然為提高其實用性，宜從事分羣(Decomposition)之研究，以利個人電腦從事分析。增進各水資源機構利用採用之意願。

(7)以出水模式推求出之營運曲線，宜加以詳細之研討，期使其能更增加此模式之實用性。

參考文獻

1. 施國肱，序率出水模式之研討，中國農業工程學報第三十卷第三期，73年。
2. Hall, W. A. et al., *Water Resources System Engineering*, McGraw-Hill, New York 1970.
3. Loucks, D. P., *Surface Water Quantity Management in Systems Approach to Water Management*, A. K. Biswas (ed.), McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.
4. Loucks, D.P. et al., *Water Resource Systems Planning and Analysis*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
5. Roefs, T.G. et al., Multireservoir operation studies, *Water Resources Research*, 6(2), 410~420, 1970.
6. Stedinger, J.R. et al., Multiple reservoir system screening models, *Water Resources Research*, 19(6), 1383~1393, 1983.
7. Thomas, H. A., JR., and R.P. Burden, *Operation Research in Water Quality Management*, Harvard Water Resource Group, Cambridge, Mass. 1963.
8. Viessman, W. et al., A Screening model for water resources planning, *Water Resource Bulletin* Vol. 11, No.2, 245~255, 1975.