



地下水抽水量反向推求模式之研究與應用

Study and Application on the Groundwater Pumpage Inverse Model

國立臺灣大學農業工程學研究所教授 國立成功大學水利及海洋工程學研究所博士班研究生

曹 以 松 許 榮 庭

Yii-Soong Tsao

Rong -Ting Hsu

摘 要

本文之地下水抽水量反向推求模式乃是根據質量平衡的觀點而建立，並且利用便捷的數值分析方法和系統流程技巧架構程式的運算程序。本模式的發展，其主要目的在於利用水位結構的變化求得地下水抽水量隨時間及空間的分佈情形。

在系統運算流程上，參數鑑定理論被引用，極值線性疊代運算則用以組織參數鑑定之過程。另一方面，有限差分法和矩陣運算亦經聯合而計算系統流程所需的誤差向量值。

經過諸多測試並且應用於臺北盆地後，由結果反應出此反向推求模式於應用上有相當良好之適用價值。除了水位變化的影響被討論外，地層參數區域化數值的差異亦在本文中有詳細的討論。

Abstract

The groundwater pumpage inverse model was founded on the view-point of mass balance, and took the advantage of fast numerical analysis method as well as systematic diagram technique to construct procedure of modeling operation. On such inverse model, the main purpose is to use groundwater head structure to solve the groundwater pumpage distribution on space and at time.

To procedure of modeling operation, the thoery of parameter identification was taken, then the minimax linearization programming was used to build the structure of parameter identification, On the other hand, finite difference method combining with metrix routing was introduced for calculating error vector which is necessary for modeling.

After many tests and appling to Taipei basin, the resaults respond that inverse model had nice suitability to field applications. In addition to effects from head difference, the effects from difference of regionalization of geohydraulic parameters also were discussed in this paper.

壹、緒 論

地下水為水文平衡中極重要的一個次循環 (subcycle)，此種次循環不僅有其獨立的平衡系統，而且在整個水文循環中具有支配與控制平衡的功能。由於地下水為一種再生性 (renewable) 的資源，倘不加以開發利用，實為一種資源的浪費，然而若果開發利用過度勢必將產生許多不良的影響，諸如：地層下陷，海水入侵含水層等問題。

以本文所處理之臺北盆地而言，由於地面供水無法廉價又充足地供給各種工業用水及其他事業的大量需水，因而造成地下水資源競相開採的局面，產生了地下水位面急速下降而引起臺北盆地的地層下陷問題。如何有效地管理使地下水位面能夠再回升，此乃是處理臺北盆地地下水問題當務之急。

反向推求問題在地下水之研究範疇內一直有相當良好的發展，這種趨勢一方面由於電子計算機的快速運算功能而引起，另一方面也顯示出地下水資源的開發與運用已經發生了層出不窮的問題。就這些研究的傾向看，從地層參數 (亦即流通係數 transmissivity 與貯蓄係數 storativity) 的區域性鑑定，抽水試驗的分析，一直到邊界補注問題與水井抽水及補注問題的探討，說明了地下水之流況已經逐漸納入規劃營運之設計與考慮中。

本文所建立之反向推求數學模式包函了兩種主要運算程序，其一為參數鑑定程序，亦即利用優選法原理 (Optimization) 從事離差平方和的極小化分析。其二為有限差分法，此一程序實際上將誤差向量經由數學模式而計算出來。

參數鑑定用以求解地下水之反向推求問題大約在 1965 年代才開始發展，一直到目前為止此一反向推求問題仍圍繞在以地層參數為中心的主題上。1973年 Neuman 將反向推求問題歸納成兩大類：直接法 (Direct approach) 和間接法 (Indirect approach)。直接法必須基於水位曲面為已知的條件，其原理較易了解，而且可節省計算時間，但是對於現地問題之處理往往無法掌握充分之資料。間接法乃是基於改進直接法之缺點而產生，理論上是依據於優選法，因此往往要花費較長的計算機的時間。

直接法的發展，如 Frinder 和 Pinder 採用 Galerkin 的權差理論求得區域化之後的 T 值 (Transmissivity 簡寫 T 值)，Sagar 利用數理規

劃以及 Cooley 的統計法均可求得區域性的 T 值。間接法的發展顯然地在電子計算機高速運算的護佑下，受到相當熱烈的歡迎。1975年葉氏乃將間接法歸納成五種最主要方法：

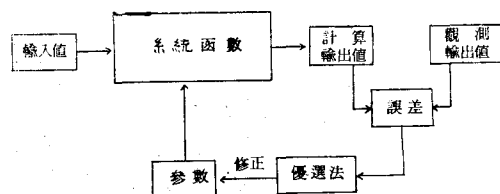
- 一、準線性化 (Quasilinearization)
- 二、最大值法則 (Maximum principle)
- 三、梯度法 (Gradient Method)
- 四、係數矩陣法 (The influence coefficient matrix)
- 五、極值線性疊代法 (The minimax and linear programming approach)

本文在建立參數鑑定運算程序上乃採用間接法中之極值線性疊代法，此法應用於非線性目標函數之求解可達快速收斂之效果，而同時亦可處理線性之目標函數。

其次，在有限差分法之運算過程中，本文一反傳統之 ADI 快速運算，而改以需要大量儲存空間的矩陣法。經過實地資料的運算結果顯示對於不規則之邊界，矩陣法之彈性比 ADI 法超出甚多，在時間差分係數的採用方面，矩陣可以適度調整，然而 ADI 法則難以處理。

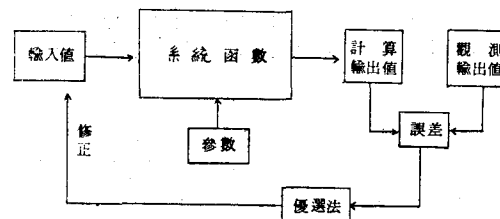
貳、參 數 鑑 定

一般之參數鑑定運算程序可以圖一之簡單訊號圖表示。

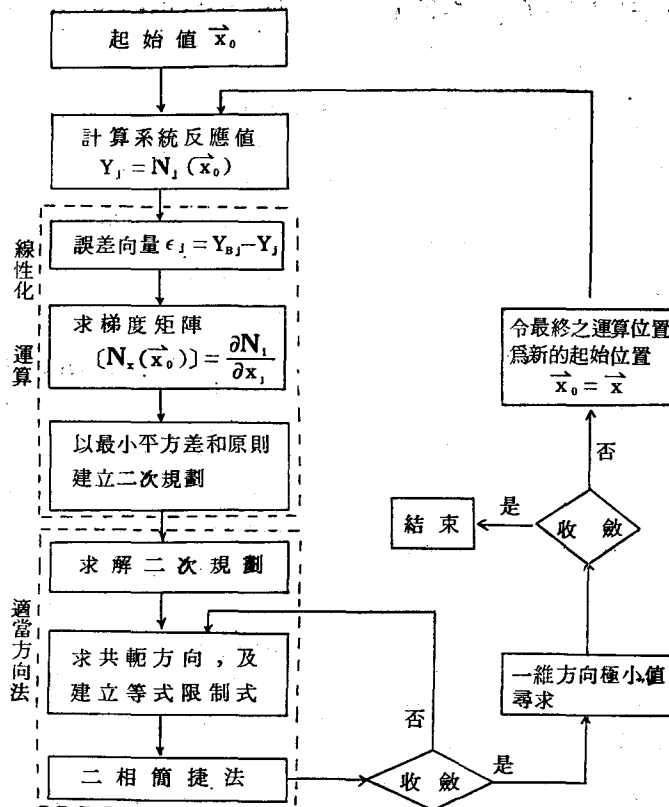


圖一：參數鑑定之運算程序

由圖一所示意之簡單訊號圖中可看出整個參數鑑定之運算實際上為一種修正及疊代運算的過程，若將此一修正及疊代略作修改如圖二，則可以建立



圖二：反向推求之運算程序



圖三：優選法之疊代運算流程

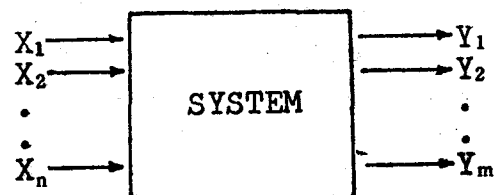
本文之反向推求之運算程序，其中之系統函數乃是一二階之偏微分方程式，亦是可視為一種非線性之運算關係。

關於優選法部份亦可以再細分如圖三之運算流程，此即為極值線性化疊代之全部過程，本文依其所處理目標函數之特性將其分成兩個主要階段：(1) 線性化運算 (linearization)，

(2) 適當方向法 (feasible direction method)。在線性化運算過程，其主要目的是將非線性運算 $Y = N(x_0)$ 修改成一階近似之線性關係，將此線性關係取其誤差平方和型式後，即可表成二次規劃 (Quadratic programming) 型式，而改以適當方向法求解。以下分別說明線性化運算及適當方向法原理。

1. 線性化運算

圖四為一個多重輸入與多重輸出系統的簡單示意圖，其中 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 為此系統之輸入值， $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 則為反應值 (response) 或觀測值 (observation)。



圖四：多重輸入與輸出系統

若上圖是一非線性，非時變系統。令 N 代表此系統輸入與輸出之間一種非線性的運算關係，亦即 X, Y 和 N 有如下之關係：

$$Y_j = N_j(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \quad j = 1, 2, \dots, m$$

上式中， N 亦可稱為系統的狀態函數 (state function)。

設 $x^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ 代表一組任意選取的輸入值，則相對應於這組輸入值，有一組系統反應值 (假設此系統為一對一且映成) $Y^* = (Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_m^*)$ ，亦即

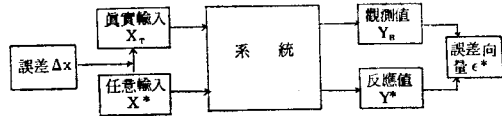
$$Y_j^* = N_j(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) \quad j = 1, 2, \dots, m$$

若此系統為可觀測系統，且在定時取樣器 (sampler) 下，有一組觀測值 $Y_B = (Y_{B1}, Y_{B2}, \dots, Y_{Bm})$ 。定義 ϵ 為誤差向量 (error vector)，代表系統反應值 Y^* 與觀測值 Y_B 之向量差，亦即

$$\epsilon^* = Y_B - Y^* \quad (\text{上標}^* \text{為相對應於 } Y^*)$$

$$\epsilon_j^* = Y_{Bj} - Y_j^*, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

則 ϵ^* 說明了當系統輸入值為 X^* 時，系統反應值與觀測值之誤差，亦間接地說明了系統輸入值 X^* 與真實輸入值 X_T 之間一種隱式的關係。



圖五：系統誤差型態示意圖

由上圖之關係可建立一非線性規劃之目標式及限制式：

$$\text{目標式：極小值 } Z(\epsilon) = [\epsilon]^T [W] [\epsilon]$$

$$\text{限制式：} \quad [A][x] \leq [B] \quad (1 \text{ 式})$$

$$[x] \geq [X_L] \quad [X_L] \text{ 為下限值}$$

(1 式) 之 $[W]$ 為加權係數， $[\epsilon] = [Y_B] - [Y] = [Y_B] - [N(x)]$ 代入 (1 式) 可以把目標式改寫成 $[x]$ 的顯函數，

$$\begin{aligned} Z(x) &= \{[Y_B] - [N(x)]\}^T \cdot [W] \cdot \{[Y_B] \\ &\quad - [N(x)]\} \\ &= [N(x)]^T [W] [N(x)] - 2[Y_B]^T [W] \\ &\quad [N(x)] + [Y_B]^T [W] [Y_B] \quad (2 \text{ 式}) \end{aligned}$$

若 $N(x)$ 為一線性運算子，則 (2 式) 為二次規劃。

求解 (2 式) 之非線性規劃，本文採用線性化疊代運算，此亦為一種不連續逼近法，現說明如下：

設非線性運算子 $N_j, j = 1, 2, \dots, m$ 為一定常性運算關係 (stationary functional operation)，或者為一非時變運算關係 (Time-invariant functional operation)，則誤差向量 $\epsilon_j = Y_{Bj} - Y_j$ ，其對 ϵ_{0j} 的泰勒級數 (Taylor's series) 如下：

$$\epsilon_j = \epsilon_{0j} + \Delta x_i \left. \frac{\partial \epsilon_j}{\partial x_i} \right|_{x_i = x_{0i}} + \frac{1}{2} \Delta x_i \Delta x_k \cdot$$

$$\left. \frac{\partial^2 \epsilon_j}{\partial x_i \partial x_k} \right|_{x_i = x_{0i}, x_k = x_{0k}} + \dots$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$i, k = 1, 2, 3, \dots, n$$

上式以矩陣符號可以表示成：

$$\begin{aligned} [\epsilon] &= [\epsilon_0] + [N_x(x_0)][\Delta x] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\Delta x]^T [N_{xx}(x_0)][\Delta x] + \dots \end{aligned}$$

其中， $[\epsilon_0]$ 為 $[x] = [x_0]$ 時之誤差向量

$[N_x(x_0)]$ 為 $[x] = [x_0]$ 時，非線性運算子 N_j 的一階導數

$[N_{xx}(x_0)]$ 則為 $[x] = [x_0]$ 時 N_j 之二階導數

由泰勒級數之展開，知 $[N_x(x)] = \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial N_i}{\partial x_j}$ ，

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

令 $[D] = [\Delta x]$ 並捨去高次項，則泰勒級數可以修改為一階線性級數：

$$[\epsilon] = [\epsilon_0] + [N_x(x_0)][D] \quad (3 \text{ 式})$$

將 (3 式) 代入 (1 式)，可以將 (1 式) 之非線性規劃轉成二次規劃：

$$\begin{aligned} \text{目標式：極小值 } Z(D) &= [D]^T [C] [D] + [P]^T \\ &\quad [D] + Z_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{限制式：} \quad [A][x] &\leq [B] \quad (4 \text{ 式}) \\ [x] &\geq [x_L] \end{aligned}$$

其中， $[C] = [N_x(x_0)]^T [W] [N_x(x_0)]$

$$[P] = 2[\epsilon_0][W][N_x(x_0)]$$

$$Z_0 = [\epsilon_0][W][\epsilon_0]$$

又 $[D] = [\Delta x] = [x] - [x_0]$ 轉換成 $[D]$ 的表式，即 $[x] = [x_0] + [D]$ 代入 (4 式)，則 $Z(D) = [D]^T [C] [D] + [P]^T [D] + Z_0$

$$\text{限制式為 } [A][D] \leq [B] - [A][x_0]$$

$$[D] \geq [x_L] - [x_0]$$

上式再經過座標位移至 $[x_L] - [x_0]$ 後即可改成像 (5 式) 之二次規劃標準式。(4 式) 中之 $[D]$ 代表一組前進的方向，這組前進方向可由二次規劃求得。與適當方向法類似地，當前進方向找到後，必須利用一維方向極小值的求法，找出在 $[D]$ 方向上真正的極小值位置，如此反覆地疊代運算至收斂為止。

2. 適當方向法 (feasible direction method)

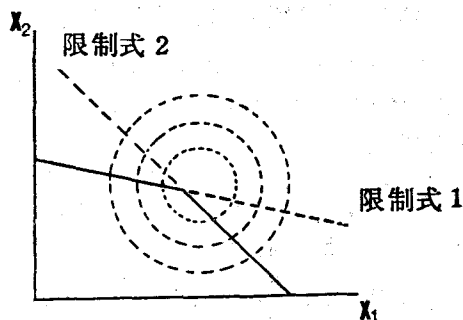
二次規劃標準式：

$$\begin{aligned} \text{目標式：極小值 } Q(x) &= [x]^T [C] [x] \quad (5 \text{ 式}) \\ &\quad + [P]^T [x] \end{aligned}$$

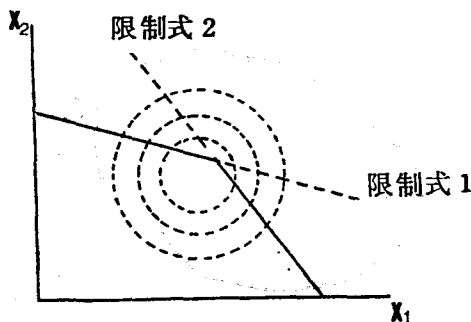
限制式： $[A][x] \leq [B]$ ， x 為非負值

(5 式) 目標式之二次係數矩陣 $[C]$ 必需滿足對稱正定矩陣之條件。一般而言，解二次規劃問題會遇到兩種不同的情況：

第一類型：如圖六所示，大域極值 (global minimum) 在可行區域外，亦即解二次規



圖六：大域極值在可行區域外



圖七：大域極值在可行區域內

劃時，有部份的限制式將發生影響。

第二類型：如圖七所示，大域極值在可行區域內，亦即無任何限制式發生作用，此種情況可以將限制式去掉，而成為求解二次函數 $Q(x)$ 的極值。

對於第二類型，可令 $\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 而得 n 組方程式，可求解 n 個未知數 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。然而第一類型則不能以簡易的微分法則求得，對此類問題可以適當方向法處理，此法之基本原則在於連續地化成線性規劃型式，而疊代運算。

在 (x) 的 n 維座標上，先假設一起始位置 x^0 ，經過 K 次疊代運算移至新的位置 x^K ，以下說明如何進行第 $K+1$ 次的疊代。

令 $x^{K+1} = x^K + \lambda S^K$ ，選擇 λ 及 S^K 使得 $Q(x^{K+1}) < Q(x^K)$ ，且 x^{K+1} 必須滿足限制式： $[A][x^{K+1}] \leq [B]$ 。將 $[x^{K+1}] = [x^K] + \lambda[S^K]$ 代入後可得 $[S^K]$ 應該滿足的條件為：

$$\lambda[A][S^K] \leq [B] - [A][x^K]$$

先令 $\lambda = 1$ 則 $[S^K]$ 之限制式為 $[A][S^K] \leq [B] - [A][x^K]$ 然而為了增加疊代運算的效率， S^K 必須為 x^K 位置上的函數梯度之最陡方向（令此方向稱為 $G = \nabla Q(x)$ ），求 $S^K \cdot G$ 之最小值即可以得 S^K ，以

線性規劃求解 S^K ，其標準式如下：

$$\text{目標式：極小值 } Z = [G]^T [S^K] \quad (6 \text{ 式})$$

$$\text{限制式：} \quad [A][S^K] \leq [B] - [A][x^K]$$

但上式中 $[S^K]$ 為一方向分量，其值可為正或負，故上式無法以線性規劃求解。若改用 $[x^{K+1}]$ 當變數，並且以 $[S^K] = [x^{K+1}] - [x^K]$ （令 $\lambda = 1$ ）取代，則（6式）可改寫如下：

$$\begin{aligned} \text{目標式：極小值 } Z &= [G]^T [x^{K+1}] - [G]^T [x^K] \\ &= [G]^T [x^{K+1}] - Z^K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{限制式：} \quad [A][x^{K+1}] &\leq [B] \quad (7 \text{ 式}) \\ [x^{K+1}] &\geq [0] \end{aligned}$$

（7式）可由簡捷法求得 $[x^{K+1}]$ 之 n 個分量，再由 $[S^K] = [x^{K+1}] - [x^K]$ ，可反求 $[S^K]$ 之 n 個分量。

由上步驟所求得之 $[x^{K+1}]$ 必定在邊界上（即 $\lambda = 1$ ），但是沿 S^K 方向之極小值之位置則有三種情況：

- (1) 如圖六，極小值在邊界外，此時 $\lambda^* > 1$ 。
- (2) 如圖七，極小值在邊界內，此時 $\lambda^* < 1$ 。
- (3) 極小值恰好在邊界上，此時 $\lambda^* = 1$ 。

令 $Q(x) = Q(x^K + \lambda S^K)$ ，並且取 $Q(x)$ 對 λ 之偏微分，令其為零，即可求得沿 S^K 方向上之極小值位置。

$$\text{亦即 } \frac{dQ(x)}{d\lambda} = 0, \quad \text{得 } \lambda^* = \frac{-Z}{2[S^K]^T [C][S^K]}$$

Z 為（7式）之目標函數值。

為了加速疊代運算的收斂，必須加入共軛方向原則（conjugation direction rule），亦即除了（7式）之 m 個限制式，尚須要加入 r 個等式限制式

$$\begin{aligned} [S^i]^T [C][S^K] &= 0, i = K-1, K-2, \dots, \\ &K-r \end{aligned}$$

r 為第 K 次疊代運算之前，極小值在內域的連續次數。修正（7式）為下面式子：

$$\text{目標式：極小值 } Z = [G]^T [x^{K+1}] - Z^K$$

$$\text{限制式：} \quad [A][x^{K+1}] \leq [B] \quad (8 \text{ 式})$$

$$[S^i]^T [C][x^{K+1}]$$

$$= [S^i]^T [C][x^K]$$

$$[x^{K+1}] \geq [0]$$

求解（8式）可以二相簡捷法進行之（two phase simplex method）。當（8式）之等式限制式被考慮之後，則疊代運算之次數就可以收斂在 n 次之內，即 $K \leq n$ 。

綜合之，以適當方向法求解二次規劃問題可以

歸納成下面六個步驟：

步驟一：先給予一起始位置 $[x^0], [y^0]$ 必須是可行解，亦即 $[A][x^0] \leq [B]$ 。（一般令 $[x^0] = [0]$ ）

步驟二：計算梯度向量 $G^k = \nabla \cdot Q(x) |_{x=x^k}$ ，以矩陣符號表示，即 $[G^k] = [P] + 2[C][x^k]$ 。

步驟三：求共軛方向原則下之等式限制式。

若 $\lambda^* \leq 1$ ，則保留此次運算之方向 $[S^k]$ ，否則若 $\lambda^* > 1$ ，則去除所有之等式限制式，並判斷是否收斂。

步驟四：以二相簡捷法解（8式）。

步驟五：求 $[S^k]$ 方向上之極小值位置 λ^*

$$\lambda^* = \frac{-Z}{2[S^k][C][S^k]}$$

$\lambda^* > 1$ ，則取 $\lambda^* = 1$ 。

步驟六：收斂法則

第一種情況：若連續 r 次的 $\lambda^* \leq 1$ ，則判斷 r 是否大於 n ，若 $r < n$ 則重複至步驟二。

第二種情況：若在第 K 次出現 $\lambda^* > 1$ ，則判斷 $[S^k]$ 的大小，亦即 $[S^k] < \delta$ ， δ 為一極小有限數。若滿足上面條件則為收斂，否則重複至步驟二。

叁、有限差分型態之系統函數

在圖一和圖二之系統函數，以及圖三之系統反應值 $Y = N(x)$ ，對反向推求問題而言實為一地下水流之微分方程式：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q$$

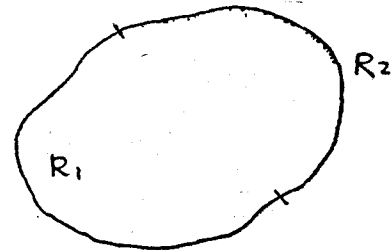
$$\text{起始條件 } h = h_0(x, y, 0) \quad (9 \text{ 式})$$

$$\text{邊界條件 } T_x \frac{\partial h}{\partial x} = qx, T_y \frac{\partial h}{\partial y} = qy$$

在邊界 R_1

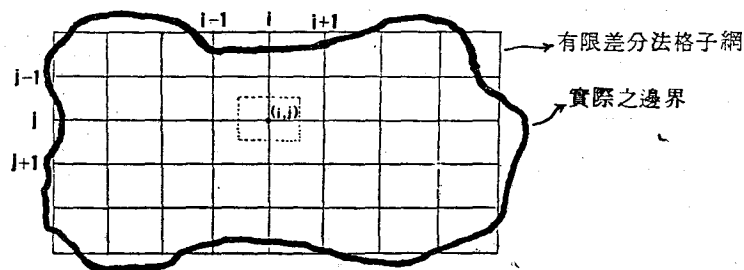
$$h = h_b(x_0, y_0, t)$$

在邊界 R_2



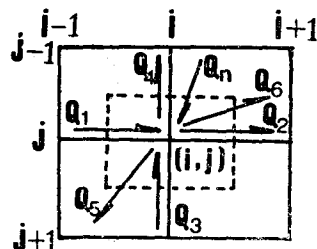
求解上式之微分方程即可求得系統之反應值，一般之運算仍利用數學模式，本文所採用者為矩陣運算之有限差分法，茲說明如下：

上圖表示一個有限差分法格子網的分割情形，



圖八 有限差分法格子網與節點

在 (i, j) 節點之虛線表示一個由 (i, j) 所掌握的有限控制體。將此控制體之各進出分量說明並



圖九 有限控制體示意圖

圖示如圖九：

在二維之空間，由質量不減定律得 (i, j) 節點之平衡式為

$$Q_a + Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4 + Q_5 + Q_6 \quad (10 \text{ 式})$$

其各項之物理意義為：

Q_1 ：由節點 $(i-1, j)$ 流進控制體之量

Q_2 ：由控制體流向節點 $(i+1, j)$ 之量

Q_3 ：由節點 $(i, j+1)$ 流進控制體之量

Q_4 ：由控制體流向節點 $(i, j-1)$ 之量

Q_5 ：單位時間內，由此控制體之含水層所儲存

或釋放出之量

Q_6 : 在節點 (i, j) 上之抽水量或補注量

Q_n : 含水層因漏水 (leakage), 蒸散或地面逕流所增加或減少之量

由達西定理, 在低流速之狀況下 (小於 10cm/day), 下列式子可以滿足:

$$V = K \frac{dh}{dL}, K = \text{含水層之導水係數}$$

考慮限制含水層 (confined aquifier), 令流通係數 (Transmissivity), $T = KM$, M = 含水層厚度, 則在含水層內之水平流量

$$Q = V \Delta y B, \Delta y = \text{水平方向所考慮之寬度}$$

$$= K \frac{dh}{dL} \cdot \Delta y \cdot B$$

(B = 含水層之垂直方向厚度)

$$= T \frac{dh}{dL} \cdot \Delta y \quad (11\text{式})$$

由 (11式) 可以把 (10式) 之各項分量化成差分式

$$\text{其中 } Q_1 = T_{i-\frac{1}{2},j} \times \frac{h_{i-1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} \times \Delta y$$

$$Q_2 = T_{i+\frac{1}{2},j} \times \frac{h_{i,j} - h_{i+1,j}}{\Delta x} \times \Delta y$$

$$Q_3 = T_{i,j+\frac{1}{2}} \times \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{\Delta y} \times \Delta x$$

$$Q_4 = T_{i,j-\frac{1}{2}} \times \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\Delta y} \times \Delta x$$

令 S 代表含水層單位洩降所改變之含水量, S 亦稱為此含水層之貯蓄係數 (storage coefficient), 則

$$Q_5 = S \Delta x \Delta y \times \frac{h_{i,j} - h_{i,j}^*}{\Delta t}, h_{i,j}^* \text{ 為 } t - \Delta t$$

時之水位

令 $Q_6 = Q_{i,j}$, 將差分式合併

$$\begin{aligned} & Q_{i,j} + T_{i-\frac{1}{2},j} \times \frac{h_{i-1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} \times \Delta y + T_{i,j+\frac{1}{2}} \\ & \times \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{\Delta y} \times \Delta x \\ & = T_{i+\frac{1}{2},j} \times \frac{h_{i,j} - h_{i+1,j}}{\Delta x} \times \Delta y + T_{i,j-\frac{1}{2}} \\ & \times \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\Delta y} \times \Delta x \\ & + S \Delta x \Delta y \times \frac{h_{i,j} - h_{i,j}^*}{\Delta t} + Q_{i,j} \end{aligned}$$

整理後得

$$\begin{aligned} & (T_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\Delta y}{\Delta x}) h_{i-1,j} - (T_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ & + T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta y}{\Delta x} + T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ & + T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{\Delta y} + S \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}) h_{i,j} \\ & + (T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta y}{\Delta x}) h_{i+1,j} \\ & + (T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{\Delta y}) h_{i,j-1} + (T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{\Delta y}) h_{i,j+1} \\ & = Q_{i,j} - Q_{n,i,j} - S \Delta x \Delta y \frac{h_{i,j}^*}{\Delta t} \quad (12\text{式}) \end{aligned}$$

在上式中出現不為節點上之項 $T_{i-\frac{1}{2},j}$, $T_{i+\frac{1}{2},j}$, $T_{i,j+\frac{1}{2}}$ 以及 $T_{i,j-\frac{1}{2}}$, 對於此項之處理, 本文採用調和平均數, 亦即

$$T_{j-\frac{1}{2},j} = \frac{2T_{i-1,j} \cdot T_{i,j}}{T_{i-1,j} + T_{i,j}} \quad (\text{其他項依此類推})$$

因本文所考慮者為限制含水層, 故 Q_n 項可以忽略之。

將每個對應的節點 (i, j) 給予一編號 n , 則 (12式) 可以重新修正為

$$\begin{aligned} & a_{n1} h_1 + a_{n,n-1} h_{n-1} + a_{n,n} h_n + a_{n,n+1} h_{n+1} + a_{nk} h_k \\ & = b_n \frac{\partial h}{\partial t} + P_n \quad (13\text{式}) \end{aligned}$$

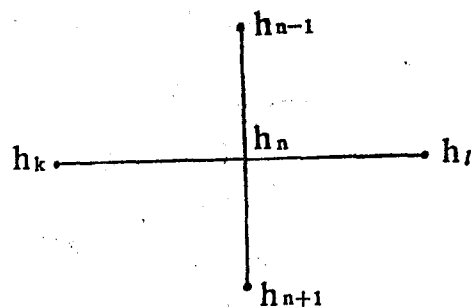
$$\text{其中 } a_{n1} = T_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$a_{n,n-1} = T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$a_{n,n} = T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\Delta y}{\Delta x} - T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta y}{\Delta x} - T_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{\Delta y} - T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$a_{n,n+1} = T_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$a_{n,k} = T_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



圖十 矩陣演算法之對應節點位置圖

$$b_n = S \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

相對應之 $h_{i,j}$ 分別為 $h_{i-1,j}=h_i$, $h_{i,j+1}=h_{n-1}$, $h_{i,j}=h_n$, $h_{i,j}=h_{n+1}$, $h_{i+1,j}=h_k$ (如圖十), 展開成聯立方程式, 並以矩陣符號表示:

$$[A][h] = [B] \left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + [P] \quad (14式)$$

係數矩陣 $[A]$ 為 $N \times N$ 階, N 為節點數。假若對 $T_{i,j}$ 值採取調和平均數, 則 $[A]$ 矩陣可修正為對稱矩陣, 在儲存時可以節省許多電腦容量及計算時間。為求有效且快速運算, 本文在求解 (14式) 時採用不定帶寬儲存 (unfixed bandwidth storage) 以及克雷斯矩陣分解法 (cholesky decomposition)。

解 (14式) 之時間差分項 $\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right]$, 本文採用時間係數 θ , 亦即, 令 $h = \theta h^1 + (1-\theta)h^0$, 表成矩陣符號, 即

$$[h] = \theta \cdot [h^1] + (1-\theta)[h^0] \quad (15式)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] = \frac{1}{\Delta t} ([h^1] - [h^0]) \quad (16式)$$

將 (15式) 及 (16式) 代入 (14式) 可得標準式:

$$(\theta[A] - \frac{1}{\Delta t}[B])[h^1] = -(\frac{1}{\Delta t}[B] + (1-\theta)[A])[h^0] + [P]$$

$$\text{令 } [G] = \theta[A] - \frac{1}{\Delta t}[B]$$

$$[C] = -\frac{1}{\Delta t}[B] - (1-\theta)[A],$$

$$\text{則標準式爲 } [G][h^1] = [C][h^0] + [P]$$

$$\text{令 } [C][h^0] + [P] = [F]$$

$$\text{得 } [G][h] = [F]$$

可解得水位 $[h]$ 。

肆、臺北盆地地下水量反向推求 結果分析

臺北盆地之水系主要由大漢溪、新店溪及基隆河匯流淡水河而形成, 一般在水資源之研究範圍乃是指20公尺等高線所涵蓋者 (如圖十一), 此一涵蓋面積大約240平方公里。盆地中央為平原, 海拔平均高度約7公尺, 地層土壤結構大致可以分為三層: 河流沖積層、松山層以及林口層。其中林口層之流通性大, 為盆地地下水之受壓含水層所在。

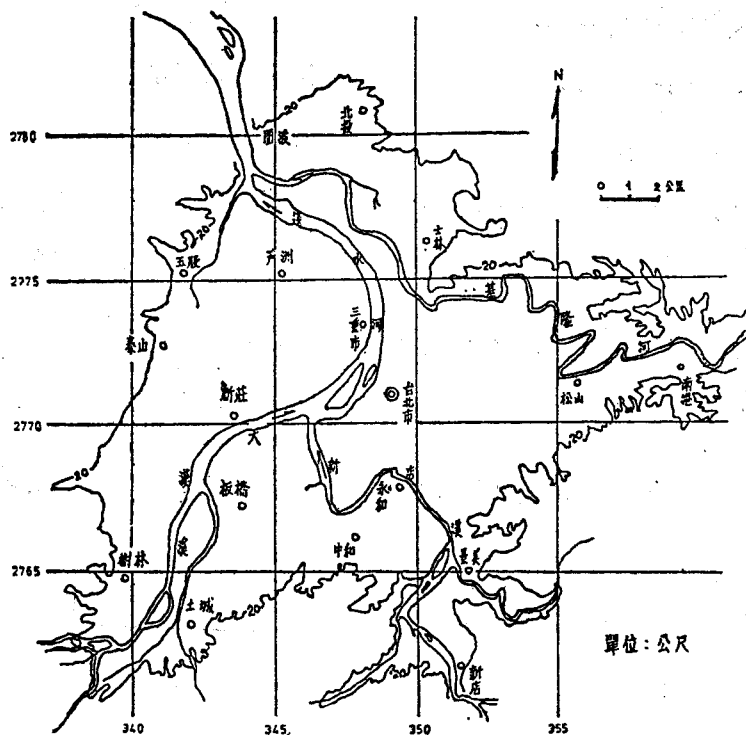


圖11 臺北盆地研究範圍位置圖
(資料來源: 水資會)

本文利用參數鑑定程序以及有限差分法數學模式所建立之反向推求模式，主要在於利用水位而求得抽水量之分布，其詳細的過程可以圖十二之各項步驟劃分之。

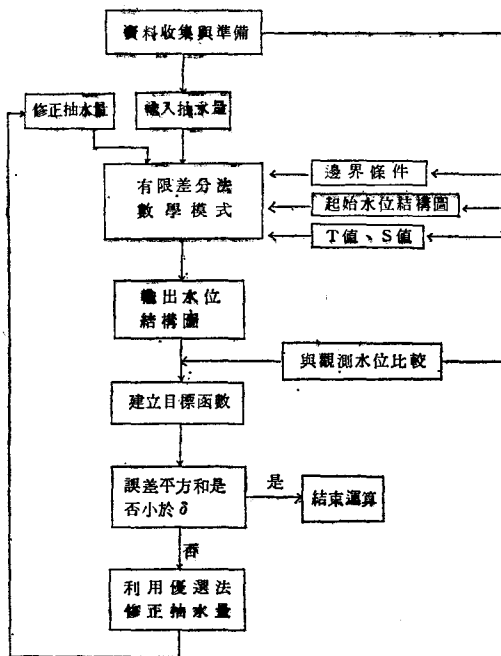


圖12 臺北盆地地下水抽水量反向推求運算步驟

圖十二之各運算步驟簡單說明如下：

1. 資料收集與準備

在此一數學模式中所需要之資料包括：邊界條件、起始水位結構圖、地層參數值（T值、S值）和觀測水位。邊界節點及邊界條件如圖十三及表一所示。起始水位為民國72年2月所觀測之水位。地層參數中，T值依來源不同分成兩組（表2，A組資料來源為水資會於民國72年5月做抽水試驗結果，B組資料來源為參考文獻9）。觀測水位為民國72年3月觀測而得（圖十四為每月觀測位置），故本文之運算時間為一個月。

2. 輸入抽水量

任意給定，為一組起始值。圖十五為數學模式之抽水節點。

3. 有限差分法數學模式

方法已如前所敘述，格子分割圖如圖十六。

4. 建立目標函數

誤差水位 $\epsilon_i = h_i - h_i^*$ = 有限差分法計算水位－觀測水位。目標式：

$$\text{極小值 } Z = [\epsilon]^T [w] [\epsilon]$$

5. 誤差平方和是否小於 δ

選擇 $[w]$ 為單位矩陣，則目標函數值 Z 即為誤差平方和，此即判斷 $Z > \delta$ 是否成立。

6. 修正抽水量

利用前所敘述之線性化運算修正輸入抽水量，將所修正之抽水量視為新的輸入抽水量繼續線性運

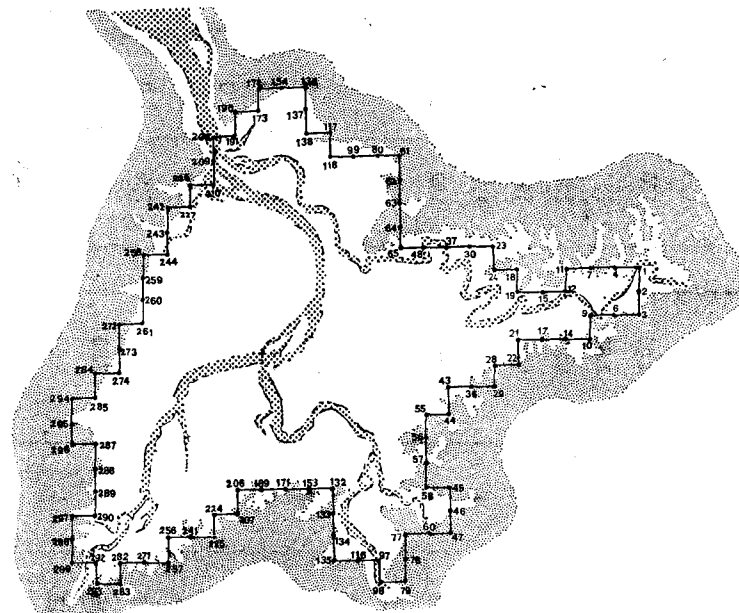


圖13 數學模式之邊界節點

表一 數學模式之邊界條件值

節 點	邊 界 條 件	邊 界 值
1	1	1.80
2	1	1.80
3	1	1.80
6	1	0.99
10	1	0.99
14	1	0.33
17	1	0.33
22	1	1.98
29	0	-19.80
36	0	-20.00
44	0	-16.21
56	1	8.70
57	1	8.70
45	1	9.90
46	1	9.90
47	1	8.00
60	1	7.90
78	1	7.90
79	1	7.90
98	1	11.30

節 點	邊 界 條 件	邊 界 值
116	1	11.30
135	1	10.90
134	1	10.90
133	1	14.50
153	1	14.50
171	1	0.00
189	1	0.00
207	1	1.16
225	1	2.95
241	1	2.57
257	1	5.08
271	1	4.50
283	1	5.43
293	1	5.27
299	1	4.61
298	1	5.50
297	1	8.70
289	1	8.20
288	1	8.20
296	0	-8.77

節 點	邊 界 條 件	邊 界 值
295	0	-12.81
294	0	-22.44
284	0	-28.00
273	0	-31.20
272	0	-32.00
260	0	-32.20
259	0	-32.33
258	0	-31.00
243	0	-23.20
242	1	1.50
226	1	1.00
209	1	1.90
208	0	-15.01
190	0	-15.22
172	0	- 5.00
154	0	- 0.20
136	0	0.00
137	0	- 5.00
117	1	1.20
99	1	1.00

節 點	邊 界 條 件	邊 界 值
80	1	1.32
61	1	1.90
62	1	1.48
63	1	2.48
64	1	2.00
48	1	1.00
37	0	-20.00
30	0	-20.00
23	0	-20.00
18	1	0.20
15	1	0.55
11	1	0.91
7	1	1.00
4	1	1.24

邊界條件說明：

“0” 表固定水位條件

單位為公尺(m)

“1” 表固定流量條件

單位為日平方公尺(m²/day)

(邊界條件來源：參考文獻)

表二 T值、S值之輸入資料

分組		A 組	B 組	分組		A	B 組
分區號碼	貯蓄係數 S	流通係數 T	流通係數 T	分區號碼	貯蓄係數 S	流通係數 T	流通係數 T
1	0.001324	218.89	185.76	15	0.001324	400.32	3000.00
2	0.001324	402.84	700.00	16	0.001324	400.32	3600.00
3	0.001324	820.80	820.80	17	0.008520	400.32	2200.00
4	0.001324	1473.12	1473.12	18	0.001324	1024.00	1024.00
5	0.00120	155.52	1200.00	19	0.01020	190.44	1800.00
6	0.001920	1217.50	3000.00	20	0.006624	216.72	1700.00
7	0.001920	2794.30	3600.00	21	0.01652	151.84	4000.00
8	0.001820	263.52	640.00	22	0.01652	151.84	151.84
9	0.001920	968.80	140.00	23	0.001324	2794.00	1600.00
10	0.001920	438.48	140.00	24	0.001124	4551.84	3551.84
11	0.001324	782.64	1771.80	25	0.005324	2225.20	3800.00
12	0.001324	1735.20	1735.20	26	0.008924	519.84	2000.00
13	0.01120	712.08	2000.00	27	0.001324	267.84	267.84
14	0.005224	187.42	1600.00				

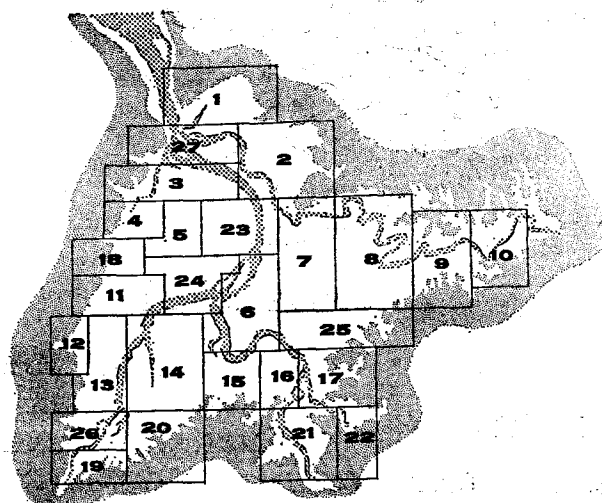


圖14 地層參數分區圖

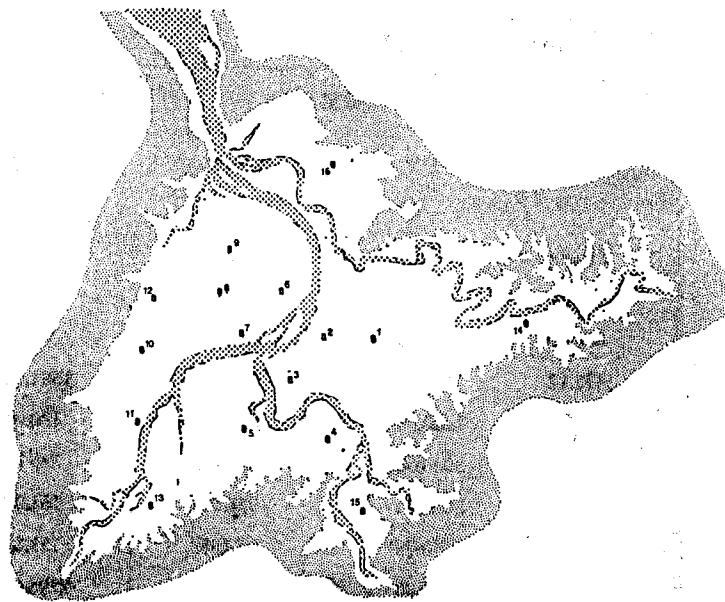


圖15 16口每月觀測井位置圖 (資料來源：水資會)

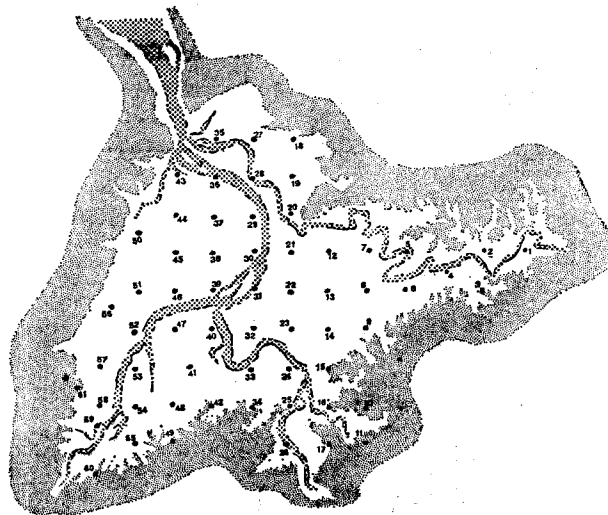


圖16 61口假設之抽水節點位置

算。

結果分析與討論：

表三為本文對於臺北盆地地下水抽水量所做反向推求之結果，由於本文所採用之有限差分數學模式於節點上可視為對一節點面積的有限控制體，此種有限控制體（圖九）之優點在於可以解釋進出流量之關係。表三之結果中有負值，則表示抽水節點

所控制之有限控制體的出流量小於進流量，亦即地下水補注量大於水井之抽水量。反之，正值則表示抽水量大於地下水補注量。依此原則別分以A、B兩組之結果解釋臺北盆地抽水量之分佈情形。

一、抽水量的分佈

A組：

負值分別出現於 1,16,17, 18,19, 24,25,26, 27,34, 35,36,45,49, 53,54, 55,57, 58,59, 60,61 等抽水點上。

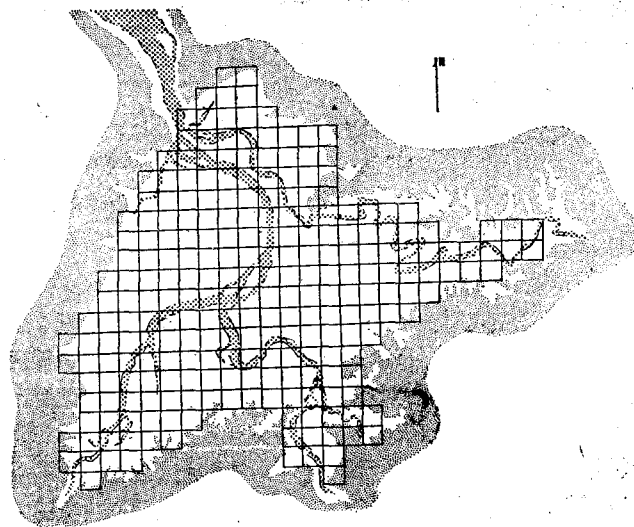


圖17 臺北盆地有限差分法格子分割圖

除45不在邊界上，其餘皆分佈在新店溪、大漢溪以及社子、石牌區域上。由於在數學模式之抽水量乃是淨抽水量，負值的出現代表入滲量大於抽取量，因此在負值出現的區域不代表沒有抽水量。現將這些負值區域分成三部份說明之：

I、大漢河流域

此部份之面積大約20平方公里，其中以 54,55, 59三點之負值最大，在4700至5800m³/day之間，若每個抽水點之代表面積為2平方公里計算，則入滲量在2.35至2.9mm/day之間。表四為臺北盆地抽水量之比例，若以樹林、土城每平方公里2000m³/day之抽取量估算，則入滲量要比上面所推算之量大2.0mm/day左右。

II、新店河流域

在圖16之24抽水點之位置大約在福和橋附近，16,17,25,26所圍成之面積亦即所謂的景新小盆地，大約有13平方公里，而實際之面積大約8.09平方公里⁽⁵¹⁾。在A組之結果中負值之大小分別為-214.43(16)，-2336.15(17)，-3655.99(24)，-3423.53(25)，-7195.80(26)，其趨勢大致上為沿新店溪由南向北遞減，由新店溪向景美溪遞減。據楊氏

(7) 以民國62年之水文資料估算結果，此地區之年入滲量應在80百萬立方公尺左右，而A組所求得之結果為57000~60000m³/day之間，加上本文所採用之邊界條件(表一)，在新店溪沿岸之邊界入流量為73400m³/day，合計為130.4×10³m³/day~133.4×10³m³/day，若以130×10³m³/day估計，則比楊氏所推算之入滲量(約219178m³/day)少89000m³/day，以景新盆地8.09Km²，則此地區之抽水量每平方公里約11000m³/day左右。而實際上之抽水量可能為每平方公里3000m³/day至5000m³/day之間(以表四之統計結果折算80%)，此推算之結果甚為不吻合，若楊氏之推算正確，則A組所得之結果顯然低了許多。

III、石牌、社子區域

圖十六，抽水點18、19、27之位置約在石牌、士林，抽水點25、26則在社子島外緣。洪氏⁽⁶⁾於民國55年曾對臺北盆地之地層分佈及土壤特性做過詳細之分析調查，由其調查之土層柱狀圖看，在社子島上大約有15公尺厚之自由含水層，此一含水層無疑地將接受天然雨水入滲以及基隆河、淡水河之補注。A組之結果為-2865.90(35)，-2002.66(36)，以每個抽水點可以代表2km²之面積計算，則此

地區之入滲量約為 1.0mm/day 至 4.0mm/day，此乃假設抽水量為零之狀況下推得。但倘若社子島上每平方公里有 1000m³/day 之抽水量，則入滲量應為 2.0mm/day 至 2.4mm/day 之多。另外在 18，19 和 27 節點亦有負值，其大小分別為：-1678.92(18)，-97.67(19)，-1716.15(27) 若不考慮 19 點，則 18，27 點之入滲量或補注量應該有 1.7mm/day 之多。

B 組：

負值的出現區域除 34 點外，其餘與 A 組相同。現仍然分成三個部份說明並與 A 組比較之。

I、大漢河流域

負值仍然以 54, 55, 59 為最大，此結果亦間接說明了此一地段確實有良好的天然補注條件。但是 B 組的結果比 A 組高出甚多，分別是一 196.14 (49)，-2436.34(53)，-7205.70(54)，-17786.54(55)，-7420.50(57)，-1195.20(58)，-12659.28(59)，-4857.31(60)，-1998.48(61)，除 54，55，59 外其餘和 A 組相差無幾，這種差異除了所引用的流通係數不同外，也和水位資料有很大的關係，留待下一節討論。

II、新店河流域

負值最大點仍然為 26，而且由 26 點向北遞減，向東遞減的特色比 A 組的結果明顯多了。與 A 組比較：17 點多了 2500m³/day，24 點少了 3500m³/day，25，26 點也少了近 1000m³/day。

III、石牌、社子區域

負值的大小分別為 -4668.42(18)，-87.67(19)，-5428.79(27)，-4327.55(35)，-3024.07(36)。平均而言，除 19 點與 A 組結果相當接近外，其餘之點比 A 組要大 2000~4000m³/day。

除了負值的出現區域外，正值的區域，其大小的分佈情形亦為本文所探討的對象之一，底下就此一傾向的分配做一說明。

A 組：

所求得之抽水量除 41 點與 56 點外，其餘皆不大。最大的值（除 41, 56 節點外）出現在 13, 22 抽水節點上，地理上之位置約在建國酒廠東西方各一公里之地段上。除此之外，沒有顯著之抽水區域，這顯然和實際狀況有些出入。（表四為民國 61 年全面調查抽水量之統計表）

B 組：

A 組的傾向在這一組的結果上有和實際狀況更

吻合的傾向出現。由水資會於民國 61 年對臺北盆地所做之抽水量的全面性調查（表四），在臺北市部份以中山區和城中區之抽水量最大，臺北縣部份則集中於三重、新莊、板橋之地區，在圖 17 之對應關係上，這些地區大致在 56, 51, 46, 39, 31, 22 所連成之線上。在 B 組的結果中，大於 10000m³/day 的抽水點有：13(15163.97)，22(21285.17)，32(13185.30)，39(12756.39)，41(57230.10)，和 56(27138.07)。大於 5000m³/day 的抽水點有 12(6855.81)，21(6356.67)，23(6497.94)，30(6788.82)，31(7984.93)，40(6175.67)，46(5499.76)，這些點的位置大約在臺北市的雙園區，城中區和龍山區一帶，在臺北縣部份則位於新莊三重和板橋的交界處。歸納之，由 B 組的結果可以說明臺北盆地之抽水量的分佈大致如下：

I 臺北市部份

中山區為重心向東遞減至國父紀念館與民生社區一帶為最低，再緩增至南港、內湖交界處。向西則遞減至淡水河沿岸，向南遞減至新店溪，向北到基隆河，到社子、石牌一帶則出現負值，表示抽水量已在入流量之下。而萬華一帶（32 點）之抽水量高出城中區（點 23）許多，與水資會所做之全面調查（表 4—8）有偏差。

II 臺北縣部份

有三個抽水重心分別位於三重味全附近（點 39），新莊輔大附近（點 56）及板橋中和交界處（點 41），其中以板橋、中和交界處最大，次為新莊輔大，再其次為三重。此種傾向亦甚為合理，但是在量的分析上與全面性調查出入亦相當大。

III 五股積水區南側

亦即 45 點，不論是 A 組結果，或 B 組結果，此點均出現相當大的負值。筆者分析此點附近之幾口觀測水位，均比三重南洋染整（圖 15, No. 8）之觀測水位甚低，且圖 15, No. 8 之水位歷線亦顯示出此點之觀測水位之變化甚大。

二、地層參數對抽水量的影響

由 Darcy's law

$$V = Ka \frac{h_0}{xQ}$$

$$= VA - T \frac{\partial h}{\partial x} \cdot L$$

則流通量 Q 正比於流通係數 T 值，本文所採用之有限差分模式為 $\Delta x = \Delta y = 1000$ 公尺， $\Delta t = 10$ 天。

表三 地下水抽水量反向推求結果

組 別	A	B	組 別	A	B
1	-628.80	-998.37	32	1652.26	13185.30
2	919.96	531.07	33	65.79	2224.98
3	1603.06	925.42	34	-1131.27	7.05
4	8204.15	2582.07	35	-2865.90	-4327.55
5	4021.61	2565.98	36	-2002.66	-3024.07
6	4237.18	2326.29	37	2168.97	3908.74
7	2478.58	1837.90	38	1993.90	3802.47
8	1688.40	1077.29	39	3276.53	12756.39
9	1361.22	1769.23	40	2349.93	6175.67
10	149.62	270.02	41	6557.52	57230.10
11	473.40	319.47	42	428.94	541.49
12	4656.71	6855.81	43	3303.31	1903.32
13	7024.79	15163.97	44	2272.21	1709.08
14	1411.58	4434.12	45	-6489.68	-15707.45
15	1797.12	2222.10	46	4540.13	5499.76
16	-214.43	-140.74	47	1866.99	2781.44
17	-2336.15	-4803.90	48	445.58	559.20
18	-1678.92	-4668.42	49	-186.28	-196.14
19	-97.67	-87.67	50	307.23	1344.57
20	4227.42	2566.05	51	2308.93	3230.36
21	3801.52	6356.67	52	1592.09	1693.91
22	7740.28	21285.17	53	-1459.76	-2436.34
23	1833.85	6497.94	54	-4771.91	-7205.70
24	-3655.99	-173.45	55	-5841.06	-17786.54
25	-3423.53	-2537.79	56	10417.37	27138.07
26	-7195.80	-6610.41	57	-3584.25	-7420.50
27	-1716.15	-5428.79	58	-791.52	-1195.20
28	1111.99	674.98	59	-5759.18	-12659.28
29	1039.21	630.80	60	-2767.87	-4857.31
30	3364.28	6788.82	61	-1323.49	-1998.48
31	2624.81	7984.93	總 計	5.142×10^4	1.367×10^6

單位：m³/day

表四 臺北盆地各標的用水井數及年抽水量統計表

(民國六十一年)

單位：千立方公尺

鄉鎮市區別			工業用水		公共給水		其他用水		合計	
			井數	抽水量	井數	抽水量	井數	抽水量	井數	抽水量
臺北市	北投區		19	767	12	498	6	846	37	2,106
	士林區		33	1,436	9	205	13	280	55	1,921
	中山區		16	3,913	5	3,161	130	5,314	151	12,388
	大同區		30	4,216	5	98	11	142	46	4,456
	延平區		11	334	2	1,750	46	1,244	59	3,328
	建成區		1	12	1	36	49	1,003	51	1,051
	城中區		11	1,937	16	3,541	154	6,714	181	12,192
	龍山區		18	360	10	356	73	1,429	101	2,145
	雙園區		28	978	22	5,213	29	509	79	6,700
	古亭區		11	381	8	1,429	30	1,070	49	2,880
	大安區		11	983	4	648	30	767	45	2,398
	景美區		34	6,017	0	0	9	153	43	6,170
	木柵區		1	30	0	0	2	48	3	78
	南港區		14	739	0	0	5	307	19	1,046
臺北縣	松山區		16	1,755	0	0	23	747	39	2,502
	內湖區		2	37	0	0	6	58	8	95
	小計		256	23,895	94	16,930	616	20,631	966	61,456
臺北縣	五股鄉		67	2,882	13	553	35	573	115	4,008
	蘆洲鄉		46	2,423	16	484	13	308	75	3,215
	泰山鄉		32	5,601	12	2,446	6	93	50	8,140
	三重市		218	31,305	98	17,645	78	3,917	394	52,867
	新莊鎮		150	14,544	49	4,583	12	114	211	19,241
	板橋市		85	11,127	49	12,097	35	2,494	169	25,718
	樹林鎮		46	6,778	12	1,711	9	1,170	67	9,659
	土城鄉		64	4,368	12	230	2	58	78	4,656
	中和鄉		69	4,806	24	3,387	6	214	99	8,407
	永和鎮		12	515	37	4,816	14	320	63	5,651
	新店鎮		28	5,506	24	384	11	3,498	63	9,388
	小計		817	89,855	346	48,336	221	12,759	1,384	150,950
合計			1,073	113,750 53%	440	65,266 31%	837	33,390 16%	2,350	212,406 100%

(資料來源：水資會)

表五 反向推求之最終目標函數值

		A 組 之 最 終 目 標 值		B 組 之 最 終 目 標 值	
No	觀 測 值	計 算 值	誤 差	計 算 值	誤 差
1	-27.35	-26.367	-0.983	-26.456	-0.894
2	-27.61	-27.212	-0.398	-27.525	-0.085
3	-26.45	-25.323	-1.127	-25.501	-0.949
4	-15.76	-16.070	0.310	-16.396	-0.636
5	-33.36	-33.355	-0.005	-32.662	-0.698
6	-27.56	-28.092	0.532	-28.106	0.546
7	-29.35	-29.121	-0.229	-28.376	-0.972
8	-19.14	-19.150	0.010	-24.182	5.042
9	-26.64	-26.572	-0.068	-25.776	-0.864
10	-32.70	-32.708	-0.008	-32.164	-0.536
11	-11.77	-11.767	-0.003	-12.936	1.166
12	-30.20	-29.676	-0.933	-29.022	-1.178
13	4.24	1.645	2.595	0.014	4.226
14	-27.10	-27.100	0.000	-27.098	-0.002
15	4.48	2.930	1.550	3.084	1.396
16	-9.40	-10.574	1.174	-9.357	-0.043

(單位：公尺)

設T之誤差為 $1\text{m}^2/\text{day}$ ，則在相同之水力梯度下，Q將有 $1000\text{m}^3/\text{day}$ 之誤差，因此對於T值之分配不得不謹慎。

本文採用兩組差異的T值，表三之結果顯示其抽水量之大小有相當的出入，如56抽水點之差在 $17000\text{m}^3/\text{day}$ 左右，39抽水點之差為 $9479.86\text{m}^3/\text{day}$ 。縱使抽水量之值有相當大的差異，然而就整個分配的傾向是一致的。

造成數值差異的原因除了地層參數之外，觀測井數目太少，使目標函數值無法正確修正抽水量也是重要原因之一。表五為反向推求之最終目標值，由此可看出某些水位之誤差值（如B組的8、13點）仍然無法降低，此點亦受T值之直接影響。 $Q = T \frac{\partial h}{\partial x} \cdot L$ ，由此可知若流通量固定則T值愈大， $\frac{\partial h}{\partial x}$ 值愈小。亦即T值增大時，則 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 微小的變動將引起Q值更大的差異，在此情況下，使得 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 變

得不敏感了，這說明了表五中某些目標值高居不下的原因。

伍、結論與建議

- 一、本文之反向推求模式除可解決抽水量之反向推求外，尚可以用在T值及S值之反向推求，以及求非線性聯立方程式之解。
- 二、臺北盆地地下水抽水量反向推求結果為：主要地面補注區在大漢溪板橋浮洲里附近、新店溪與景美溪會合處，以及大屯山麓南面即石牌一帶。新店溪之補注情形有由南向北呈遞減的傾向。社子島雖也有補注量，但是由地層資料判斷應該是自由含水層部份，對臺北盆地而言，幾乎沒有補注效果。
- 三、在抽水量之分配方面，由本文之結果顯示出臺北市建國酒廠附近，臺北縣三重味全，新莊輔大和板橋、中和之交界處有嚴重抽水和較大之下降錐，在防範之措施上宜儘早做人工地下水

補注，並且縮小研究範圍至此一小區域內，以進一步了解地下水資源利用狀況。

四、反向推求所得之抽水量分佈，其值是否精確可靠，或者其誤差大小如何尚無法估計，其原因在於抽水量無法準確統計得到。然而由表三之結果及表四之調查資料知本文所發展之反向推求模式縱使無法計算出精確之抽水量，但對於抽水量分佈之傾向已具有解釋之功用。就抽水量之預測和地下水補注效果評估上，已具有實用上之目的。

五、在做地下水數學模式模擬之前應該先做T值及S值的區域化分析。所謂區域化分析是指利用點的抽水試驗值及抽水後地下水位之反應以求得數學模式上的T值及S值與抽水試驗之T值、S值的關係。本文採用兩組T值所得之抽水量，就數值而言仍有相當大的出入，然而就分配而言，其傾向是一致的。

六、有限差分法之地下水數學模式較不適用於盆地大範圍區域的模擬，此為影響計算結果精確性原因之一。建議往後對地下水數學模式之模擬，宜縮小區域（以本文而言，宜縮小至20至30平方公里之內），並減少節點間距，以求得更高之精確度。

七、本文以優選法配合有限差分法做地下水抽水量之反向推求，若應用於平緩地型（如平原地區），預料將有更佳之結果，此乃由於平原地區之地下水位變化比較緩和，對於數學模式而言，此為相當有利之條件，因為平緩之水位變化可以減低因水位誤差而引起之計算結果的誤差。

參 考 文 獻

1. 曹以松，林俊男，譚義續，毛愛生
「臺北盆地地下水數學模式之模擬與應用」
臺大農業工程研究所，民國七十四年六月。
2. 經濟部水資會「臺北盆地地下水位與水質調查報告」民國72年。
3. 廖文力「臺灣地下水資源」，民國65年6月。
4. 廖文力「臺灣地下水資源利用調查研究」，民國65年6月。
5. 楊萬全「地下水開發對環境的衝擊—臺北盆地的個案研究」，師大地理研究報告，第九期，民國72年3月。
6. 洪如江「臺北盆地各土層土壤之物理特性」，臺大

工程學刊，10期，1—24頁，民國55年。

7. 楊萬全「新店溪沿岸地下水補注區之調查研究」，臺灣水利，22卷1期，16—29頁，民國63年。
8. 楊萬全「臺北盆地地下水補注問題之研究」，臺灣水利，22卷4期，20—37頁，民國63年。
9. 楊萬全「臺北盆地地下水蘊藏量與超抽情況之研究」，臺銀季刊，22卷4期，235—253頁，民國61年。
10. Shlomo P. Neuman.
"Calibration of Distributed Parameters Groundwater Flow Models Viewend as a Multiple-Objective Decision Process Under Uncertainty", Water Resources Research, Vol. 9 No. 4 1973.
11. William W.-G. Yeh
"Aquifer Parameters Identification" Journal of Hydraulic Division, ASCE, No.9, 1975.
12. Richard L. Fox
"Optimization methods for Engineering Design", Addison-Wesley publishing company, Inc. 1971.
13. Dale A. Anderson & John C. Tannehill & Richard H. Pletcher
"Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Mc Graw-Hill Book company. 1984.
15. Hans Paul kuuzt & Wilhelm krelle "Non-liner programming", Blaisdell Publishing company, 1966.
16. Jocab Bear, "Hydraulic of Groundwater" McGraw-Hill Inc. 1979.
17. T. A. Prickette & C. G. Nonnouist
Selected Digital Computer Technique for Groundwater Resources Evaluation", Bulletin 55, Illinois state water Survey, 1971.
18. Herbert F. Wang & Mary P. Aderson
"Introduction to Groundwater Modeling, Finite Difference and Finite Element Methods", 1979.
19. Irwin Remson
"Numerical Methods in Subsurface Hydrology with an Introduction to Finite Element Method", John wiley & Sons, Inc, 1977.
20. William W.-G. Yeh & George W. Tauxe
"Quasilinearization and the Identification of Aquifer parameter", Water Resource Research, Vol. 7, No.2, 1971.