線性放水規則機遇限制性模式之研討與修正

Study on Chance-Constrained Model with Linear Decision Rule and Its Adjustment

臺灣大學水工試驗所研究助理

林　志　雄

Jyh-Shyong Lin

摘　　要

水庫規劃在水資源系統規劃中扮演着極爲重要的角色，其所涵蓋者主要是水庫之設計與營運分析。在水庫設計中，一般又以水庫容量之決定和水庫運轉規則之擬訂爲要項。

線性放水規則機遇限制性模式即是一可用於決定水庫容量並擬訂水庫運轉規則之模式，由於其具有頗爲簡明之水庫運轉規則，且可經由相當普遍之線性規劃技巧求解，因此其實用性相當高。唯由該模式所求得之水庫容量每過於保守，輒受訾議，本研究即在探討其所以致此之眞正原因，並進而修正該模式，使其成爲一合理可行之水庫運轉規則模式。本研究之主要結果顯示：

1.造成線性放水規則機遇限制性模式過分估求水庫容量之眞正原因乃在於未能滿足該模式所含之水平方程式。

2.經修正之線性放水規則機遇限制性模式確實合理而可行。

Abstract

Reservoir planning which mainly includes reservoir design and management problems act as an important role in water resource system planning. Generally, the most important things of reservoir design are the decisions of reservoir capacity and operation rule. The chance-constrained model with linear decision rule is one of this kind of model which can be used to decide the reservoir capacity and operation rule. For the simplicity of the linear decision rule for reservoir operation and the generality of the linear programming for solving the model, the model should be usable. However, for the overestimate of the reservoir capacity, there are so many criticisms about the conservatism of the model. This study is to find out the reason why the conservatism be always in company with the model, and then try to make it reasonable and feasible by adjusting the model. The main results are as follows:

1. It is the violation of the water balance equation in the model that makes the model so conservative.

2. The adjusted chance-constrained model with linear decision rule is truly reasonable and feasible for reservoir design.

一、前　　言

臺灣河川坡陡流急，季節性變化又大，因此河川逕流之利用率不高，而有待興建水庫以提高其利用率。

水庫之能否有效提高用水效率，端視水庫運轉規則之適當與否。爲確保水庫之適當運轉，水庫規劃者常需尋求簡宜合理之運轉規則。

線性放水規則稱得上是一極爲簡明之水庫運轉規則，然其自1969年以機遇限制性模式應用於水庫設計（包括水庫容量之決定與水庫運轉規則之擬訂）以來，正反兩面之意見很多，直至去年（1984），此模式幾乎遭到否決和放棄，主要是由於所求得之水庫容量實在過於保守而不合理，然而其所以致此之眞正原因却一直晦而不明。本研究即在探討線性放水規則機遇限制性模式過度估求水庫容量之眞正原因，並進而修正該模式，使其成爲一合理可行之水庫運轉規則模式。

由於諸多相關文獻已以模擬模式(Simulation Model）對此模式加以驗證，並證實確可達到限制條件所預定之機率可靠度，故本文對此問題不再多加研討。

以下先介紹線性放水規則及其相關文獻，然後將其與機遇限制性模式結合，而以線性規劃求解水庫容量與線性放水規則。再針對水庫容量的不合理性進行探討，然後修正該模式，並研討修正模式之合理性。

二、線性放水規則

㈠線性放水規則　(LDR) 之意義

所謂LDR即 Linear Decision Rule 之簡寫，意即「線性決策規則」，係諸多決策規則（Decision Rule）中的一種，係在某些變數間以線性方式表達其彼此之關係。當將 LDR 應用於水庫規劃時，主要用於決定放水量，故每直接謂之「線性放水規則」。

㈡線性放水規則有關文獻之回顧

ReVelle, Joeres and Kirby　首先於 1969 年[4]採用線性放水規則，以機遇限制線性規劃模式來決定單一水庫之容量與各時期之運轉規則。由於線性放水規則具有最簡明之數學關係——線性，實用上易將問題轉化成「線性規劃模式」而逕以線性規劃求解，不僅可於各期期初預知該期之可放水量，且其運轉結果並不亞於較爲複雜之規則（如二次或三次等）[11]，因此引起許多學者的重視，復由於該模式之求解結果似具相當之「保守性」（Conservatism），使得探討線性放水規則之文獻一直持續不斷。這些文獻大多針對此原始線性放水規則模式的保守性而探討，並提出一些修正意見或型式。

ReVelle等人所採用之原始線性放水規則爲：

$$R_t = S_{t-1} - b_t \qquad \forall_t \tag{2-1}$$

其中R_t：第 t 期內之放水量。

S_t：第 t 期末之蓄水量

b_t：第 t 期之運轉規則參數 (Operating policy parameter），其值可正可負。

次年 (1970年），Loucks[7] 和Eisel[15] 相繼對此原始線性放水規則提出批判，並得到 ReVelle 等人[15]之回答與辯護。其中 Loucks並提出另一型式之線性放水規則：

$$R_t = S_{t-1} + Q_t - b_t \qquad \forall_t \tag{2-2}$$

其中，Q_t：第 t 期內之水庫進流量

R_t、S_{t-1}、b_t之意義同前。

在此同一年中，ReVelle and Kirby[6] 將「蒸發損失量」引入其原始線性放水規則中。繼之，Eastman and ReVelle[13] (1973)、ReVelle and Gundelach[5](1975)、Gundelach and Re Velle[14](1975) 提出有關之直接解法，亦即不須依賴電腦求解之簡易方法。

Bryant 於1961年創立下式之線性放水規則，Eisel[16]並於1972年採用。

$$R_t = (1 - a_t)\cdot(Q_t + S_t) + a_t \cdot T_t \qquad \forall_t \tag{2-3}$$

其中，T_t：第 t 期之標的放水量。

a_t：第 t 期之決策參數，$0 \le a_t \le 1$。

R_t、Q_t、S_t之意義同前。

此模式經Sniedovich[20](1980) 檢視後，證實其將導致設計之結果極爲保守。

Loucks and Dorfman[9]於1975年提出了2-1與2-2兩式折衷型式之線性放水規則，其式如下：

$$\begin{aligned} R_t &= S_{t-1} + \lambda_t Q_t - b_t \\ &= (1 - \lambda_{t-1})Q_{t-1} + \lambda_t Q_t + b_{t-1} - b_t \end{aligned} \qquad \forall_t \tag{2-4}$$

其中，λ_t：已知之權重（Weight），$0 \le \lambda_t \le 1$。

R_t、S_{t-1}、Q_t、b_t之意義同前。

當ReVelle and Gundelach[5](1975)發展直接解法的同時，其亦提出了一通用型式之線性放水

規則

$$R_t=S_{t-1}+\beta_t Q_t-\beta_{t-1}Q_{t-1}-\cdots\cdots-\beta_{t-k}Q_{t-k}-\cdots\cdots-b_t \qquad \forall t \qquad (2\text{-}5)$$

其中，β_t，$\beta_{t-1}\cdots\cdots\beta_{t-k}$，……：待定之常數。

R_t、S_{t-1}、Q_t、b_t之意義同前。

比較2-4和2-5二式，可知2-4式爲2-5式之特殊化型式。但由於其假設條件與求解方法不同，故λ_j 係已知，而β_j則爲未知。

Luthra and Arora[21] 則於1976年提出另一所謂的「δ 放水規則」(δ Release Policy)，其乃由原始線性放水規則引申而出，正如2-4 式之λ_t一樣，考慮 δ 值之變化，以減低原始線性規則之保守性。

Houck[17]於1979 年創立「多重線性放水規則」(Multiple LDR)，亦即多考慮了流量間之自相關性 (Autocorrelation)，使每一時期均有多個放水規則 可供適當選取而操作 ，以別於其他每期只有一個放水規則之「單一線性放水規則」(Single LDR)，其型式如下：

$$R_t^{ij}=S_{t-1}^{j}-b_t^{i}=Q_{t-1}^{j}+b_{t-1}^{j}-b_t^{i} \qquad \forall t \qquad (2\text{-}6)$$

其中，i，j：分別爲 t－1 期和 t－2 期流量區段 (Streamflow Intervals) 之指標。

流量區段：於每一時期，按某些標準，依流量大小劃分成幾個區段。

R_t^{ij}：於 t－1 期第 i 流量區段、t－2 期第 j 流量區段之條件下，t 期的放水量。

S_{t-1}^{j}：於 t－2 期第 j 流量區段之條件下，t－1 期末之蓄水量。

Q_t^{i}：t－1 期第 i 流量區段之條件下，t 期的水庫進流量。

b_t^{i}：於 t－1 期第 i 流量區段之條件下，t 期的決策變數，即運轉規則參數。

將此線性放水規則與原始線性放水規則（2-1式）相比較，可以發現其型式全然一致，僅係前述「多重」與「單一」之差別而已。 經由 Houck and Datta[18](1981) 比較此二線性放水規則，發現「多重線性放水規則」確能改善原始單一線性放水規則」之保守性，但仍具相當之保守性。

Joeres, Seus and Engelmann[10](1981)指出，雖然 2-4和2-5二式之 LDR考慮了流量之「序率特性」(Stochastic nature)，但其所含之Q_t，於 t 期初顯爲未知，因此將 2-4 式之線性放水規則名爲「理想化或後見之明的規則」(Utopian or Perfect Hindsight Rule)；而將未考慮流量序率特性之原始線性放水規則（2-1 式）名爲「獨立規則」(Independent Rule)；其自己則另創一所謂的「預測規則」(Predictive Rule)，亦即先行估計 Q_t 值，以便用於2-4式之線性放水規則，其線性放水規則之型式如下：

$$R_t=S_{t-1}+\hat{Q}_t-b_t \qquad \forall t \qquad (2\text{-}7)$$

其中，$\hat{Q}_t$：本期 t 之水庫進流量Q_t之預估値。

S_t：t 期末之蓄水量。

R_t、b_t之意義同前。

劉佳明與郭振明[2](1981)二位先生曾應用線性放水規則於下游水庫容量之決定，其亦自行發展一套手算之直接解法，而不須仰賴線性規劃電腦求解法。

Stedinger[12](1984)提出了$R_t^{ij}=S_{t-1}^{j}+Q_t^{i}-b_t^{i}$之線性放水規則，其稱線性放水規則中含有S者爲「S型式線性放水規則」，而稱同時含有S和Q者爲「SQ 型式線性放水規則」。他對 $R_t=S_{t-1}-b_t$(ReVelle所提者)、$R_t^{ij}=S_{t-1}^{j}-b_t^{i}$ (Houck所提者)、$R_t=S_{t-1}+Q_t-b_t$ (Loucks 所提者)和$R_t^{ij}=S_{t-1}^{j}+Q_t^{i}-b_t^{i}$（其所自提者）四種型式之線性放水規則進行研究比較，證實「S型式線性放水規則模式」所求得之水庫容量遠較「SQ 型式線性放水規則模式」所求得者爲大。彼認爲此乃由於「S型式線性放水規則」之 $S_t=Q_t+b_t$, S_t受Q_t變異之影響；反觀「SQ 型式線性放水規則」，其 $S_t=b_t$，因此S_t不受Q_t之影響。

無獨有偶，幾乎就在同時，施國肱、黃介泉和林志雄[3](1984) 恰好亦針對 Stedinger 所探討之四種線性放水規則模式進行研究比較，其亦試圖對「S型式線性放水規則模式」過分估求水庫容量之現象提出解釋。他們係對模式中限制式之機率可靠度作敏感度分析，從而證實其乃由於模式中有一組限制式內含q_t^{β}（具有機率可靠度β之 t 期流量值），一般取$\beta>>0.5$，所以q_t^{β}常具較大之數値，因

而導致甚大之水庫容量。此結果與 Stedinger所提出之解釋一致，唯較之解說詳細。

以上諸文獻之模式中，其目標函數多與水庫容量或放水量有關，Houck, Cohon and ReVelle[19](1980)則進一步將經濟效益、水力發電之電能、安全出水量等項目引入目標函數中。

㈢本文擬加探討之線性放水規則

本文旨在探討「S型式線性放水規則模式」過分估求水庫容量之眞正原因，雖然內含「單一線性放水規則模式」與「多重線性放水規則模式」，但後者乃由前者引出，其所具基本特性和保守性實係一致，故僅針對前者——ReVelle 所提之原始線性放水規則模式——進行研究。另外，依據施國肱、黃介泉和林志雄[3]（1984)研究所得，Loucks所提之線性放水規則實際上即是水平衡方程式，因此本文亦對此「SQ型式線性放水規則模式」同時做研究，以便與ReVelle所提之「S型式線性放水規則模式」相互比較和驗證。玆將此二線性放水規則再列示於下：

S型式：$R_t=S_{t-1}-b_t$ (2-1)

SQ型式：$R_t=S_{t-1}+Q_t-b_t$ (2-2)

三、線性放水規則模式之研討與修正

㈠線性規劃模式之分類

線性規劃(Linear Programming，簡稱LP)屬作業研究(Operation Research)之範疇，爲最佳化模式(Optimization Model)之一，乃是一種在不等式(可含等式)限制條件下，求取目標函數(最大值或最小值)的方法。

其所求之解可確保爲「最佳解」(Optimal solution)，以別於模擬模式(Simulation Model)的「滿意解」(Satisfying solution)。

線性規劃之使用已相當普遍，玆不贅述。唯其一般可分爲以下幾種應用類型[1]：

1.定率性線性規劃模式
(Deterministic LP Model)

2.序率性線性規劃模式
(Stochastic LP Model)

⑴馬可夫過程序率性線性規劃模式
(Stochastic LP Model for Markov Process)

⑵二階段序率性線性規劃模式
(Two-Stage Stochastic LP Model)

⑶機遇限制線性規劃模式
(Chance-Constrained LP Model)

本文所要研討的是「機遇限制線性規劃模式」，但因其係由「定率性線性規劃模式」所引出，故特將此二模式介紹如下：

1.定率性線性規劃模式

⑴定義——模式中所有參數均爲已知且確定大小之數值，而不含任何機率分配。

⑵模式型式。

Max. CX (3-1)

s. t. $AX \leq b$ (3-2)

$X \geq 0$ (3-3)

其中，C：$1\times n$之常數向量，爲目標函數之係數

A：$m\times n$之常數矩陣，爲限制條件中之技術係數。

b：$m\times 1$之常數向量，爲限制條件中不等號之右手邊值 RHS (Right Hand Side)。

X：$n\times 1$之變數矩陣，爲決策變數(Decision variables)。

此型式即爲一般線性規劃之標準型式，3-1式爲目標函數，3-2式爲一組限制條件，3-3式則爲非負限制條件。

2.機遇限制線性規劃模式

⑴定義——將「機率」加諸限制條件，以控制該限制條件之「可靠度」(Reliability)或「風險度」(Risk)，而使在此可靠度或風險度下，求得該模式之最佳解。

⑵模式型式——

Max. CX (3-1)

s.t. $P_r[AX\geq B]\geq P$ (3-4)

$X\geq 0$ (3-3)

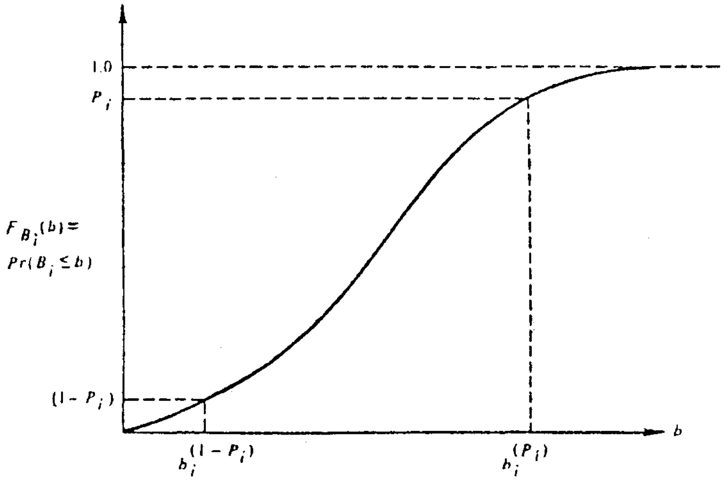
其中，$P_r[\cdot]$：機率之表示型式。

P：$m\times 1$之常數向量，即機率值。對於任一分量P_i, $0\leq P_i\leq 1$。

B：某一具已知分配之隨機變數向量，分量爲B_i。

其餘符號意義同前。

此模式內含機率型式之限制式，吾人必須將其轉換爲「確定性對等式」(Deterministic equivalence)，方能符合線性規劃「確定性」之基本假設。



〔圖一〕隨機變數B_i之累積機率分配函數

(3)確定性對等式之轉換——

原機率型式之限制式爲

$P_r[AX \geq B] \geq P$ (3-4)

，以累積分配函數(Cumulative Distribution Function 簡寫成C. D. F.) 之型式表爲

$F_B(AX) \geq P$ (3-5)

，則其確定性對等式爲

$AX \geq F_B^{-1}(P)$ (3-6)

，其中$F_B^{-1}(P)$爲隨機變數向量 B 之C. D. F. $F_B(\cdot)$之反函數，其性質和單位均與B一致，爲資區別，可令$b = F_B^{-1}(P)$，其關係可參圖一。

本研究以「水庫有效容量最小化」爲目標，同時並需滿足下列五限制條件。

(1)水平衡物理定律（水平衡方程式）

(2)線性放水規則

(3)最小放水量之限制

(4)最大蓄水量之限制

(5)最小蓄水量之限制

另外，爲簡化起見，所有水量損失均不予考慮，且水庫進流量Q_t值假設已涵蓋所有型式之水庫水源。又，所有模式均採「年運轉法」。

(一)採用單一線性放水規則之定率性線性規劃模式 (Deterministic LP Model with Single LDR)

1. S型式：

其線性放水規則爲$R_t = S_{t-1} - b_t$ (2-1)

，將其代入水平衡方程式

$S_t = S_{t-1} + Q_t - R_t$ (3-7)

可得 $S_t = Q_t + b_t$ (3-8)

再以 $S_{t-1} = Q_{t-1} + b_{t-1}$代入2-1式可得

$R_t = Q_{t-1} + b_{t-1} - b_t$ (3-9)

模式如下：

Min. K (3-10)

s. t. $S_t = S_{t-1} + R_t = Q_t$ (3-11)

$R_t = S_{t-1} - b_t$ (3-12)

$R_t \geq R_t^{min}$ (3-13)

$S_t \leq S_t^{max} = K$ (3-14)

$S_t \geq S_t^{min}$ (3-15)

$t = 1,2,3,\cdots\cdots,T$

$K, R_t, S_t \geq 0$ ，但b_t可正可負 (3-16)

其中，K：水庫有效容量。

R_t：第 t 期之放水量。

S_t：第 t 期末之蓄水量。

Q_t：第 t 期內之水庫進流量。

b_t：第 t 期之運轉規則參數，可正可負。

R_t^{min}：第 t 期之放水量下限。

S_t^{max}：第t期之蓄水量上限，此處取$S_t^{max} = K$。

S_t^{min}：第 t 期之蓄水量下限。

模式中之3-11式爲水平衡方程式，3-12式爲線

性放水規則，因爲此二式皆爲等式，故可先將其化成上述之3-8式和3-9式，使S_t和R_t俱爲 Q_t與b_t之函數，再將S_t與R_t分別代入3-13、3-14與3-15三式。又，由於 b_t 可正可負，無法滿足 LP模式之「非負」條件，爲使其構建成 LP 模式，可以利用 $b_t = b^+_t - b^-_t$ 之轉換，而令$b^+_t \geq 0$，$b^-_t \geq 0$，當$b_t \geq 0$，則$b_t = b^+_t$；$b_t \leq 0$，則 $b_t = b^-_t$。如此，模式可轉換如下：

$$\text{Min. } K \tag{3-17}$$

$$\text{s.t. } b^+_{t-1} - b^-_{t-1} - b^+_t + b^-_t \geq R_t^{min} - Q_{t-1} \tag{3-18}$$

$$K - b_t^+ + b_t^- \geq Q_t \tag{3-19}$$

$$b_t^+ - b_t^- \geq S_t^{min} - Q_t \tag{3-20}$$

$$K, b_t^+, b_t^- \geq 0 \tag{3-21}$$

但是，爲了避免模式之變數符號過於複雜，以下之模式均不列出$b_t^+ - b_t^-$，而逕以 b_t 表示之，唯在非負限制條件中將以 $b_t^+ \geq 0$，$b_t^- \geq 0$ 示出，以示b_t值可正可負。亦即表成下述模式：

$$\text{Min. } K \tag{3-22}$$

$$\text{s. t. } b_{t-1} - b_t \geq R_t^{min} - Q_{-1} \tag{3-23}$$

$$K - b_t \geq Q_t \tag{3-24}$$

$$b_t \geq S_t^{min} - Q_t \tag{3-25}$$

$$K,\ b_t^+,\ b_t^- \geq 0 \tag{3-26}$$

2. SQ型式

其線性放水規則爲$R_t = S_{t-1} + Q_t - b_t$ (2-2)

將其代入水平衡方程式 3-7 式，可得

$$S_t = b_t \tag{3-27}$$

再以$S_{t-1} = b_{t-1}$代入2-2式，可得

$$R_t = Q_t + b_{t-1} - b_t \tag{3-28}$$

因$b_t = S_t$，故 3-28 式實爲水平衡方程式。同時 $S_t \geq 0$，所以 b_t 亦必定大於或等於零，故其模式可書寫如下：

$$\text{Min. } K \tag{3-29}$$

$$\text{s.t. } b_{t-1} - b_t \geq R_t^{min} - Q_t \tag{3-30}$$

$$K - b_t \geq 0 \tag{3-31}$$

$$b_t \geq S_t^{min} \tag{3-32}$$

$$K, b_t \geq 0 \tag{3-33}$$

定率性線性規劃模式並未考慮進流量之序率特性，較不符合實際自然之狀況，且對於經模式推求之結果應用於未來水庫運轉情形，無法提供明確之可靠度，而機遇限制線性規劃模式則可改進此缺點。

㈢採用單一線性放水規則之機遇限制線性規劃模式 (Chance-Costrained LP Model with Single LDR)

1. S型式：

$$\text{Min. } K \tag{3-34}$$

$$\text{s.t. } \Pr[b_{t-1} - b_t \geq R_t^{min} - Q_{t-1}] \geq \alpha \tag{3-35}$$

$$\Pr[K - b_t \geq Q_t] \geq \beta \tag{3-36}$$

$$\Pr[b_t \geq S_t^{min} - Q_t] \geq \gamma \tag{3-37}$$

$$K,\ b_t^+,\ b_t^- \geq 0 \tag{3-38}$$

其中，α，β，γ 均爲機率值，亦即滿足各限制條件之可靠度，其值介於 0 與 1 間；其餘符號之意義同前。

由於 LP 模式只能處理確定型式之限制式，因此必須將以上諸機率型式之限制式轉換成確定性對等式，結果如下：

$$\text{Min. } K \tag{3-39}$$

$$\text{s.t. } b_{t-1} - b_t \geq R_t^{min} - q_{t-1}^{(1-\alpha)} \tag{3-40}$$

$$K - b_t \geq q_t^{\beta} \tag{3-41}$$

$$b_t \geq S_t^{min} - q_t^{(1-\gamma)} \tag{3-42}$$

$$K,\ b_t^+,\ b_t^- \geq 0 \tag{3-43}$$

其中$q_{t-1}^{(1-\alpha)}$爲 t － 1 期進流量Q_{t-1}之累積分配函數$F_{Q_{t-1}}(\cdot)$之反函數值$F^{-1}_{Q_{t-1}}(1-\alpha)$。$q_t^{\beta}$ 、$q_t^{(1-\gamma)}$之意義亦係如此。

2. SQ型式：

$$\text{Min. } K \tag{3-44}$$

$$\text{s.t. } P_r[b_{t-1} - b_t \geq R_t^{min} - Q_t] \geq \alpha \tag{3-45}$$

$$P_r[K - b_t \geq 0] \geq \beta \tag{3-46}$$

$$P_r[b_t \geq S_t^{min}] \geq \gamma \tag{3-47}$$

$$K, b_t \geq 0 \tag{3-48}$$

其確定性對等模式如次：

$$\text{Min. } K \tag{3-49}$$

$$\text{s.t.} \quad b_{t-1}-b_t \geq R_t^{min}-q_t^{(1-\alpha)} \tag{3-50}$$

$$K-b_t \geq 0 \tag{3-51}$$

$$b_t \geq S_t^{min} \tag{3-52}$$

$$K, b_t \geq 0 \tag{3-53}$$

由於3-46式與Q_t無關，不含任何隨機變數，其確定性對等式必爲3-51式[26]。同理可得3-52式。

定率性線性規劃模式實爲機遇限制線性規劃模式之特例。定率線性規劃模式中所用之流量Q_t可對應於確定性對等模式中之$q_t^{(1-\alpha)}$。但是Q_t所對應之機率值（$1-\alpha$）不一定是吾人所要之可靠度，所以不若機遇限制線性規劃模式之可由吾人控制者。採用單一線性放水規則之機遇限制線性規劃模式，不論是「S型式」或「SQ型式」，均假定其進流量Q_t間係爲相互獨立者，亦即未考慮Q_t間之自相關性，其Q_t之機率分配爲一般之「非條件累積機率分配」[39]（Unconditioned C.D.F.），此模式實是一種「機率模式」（Probabilistic Model）。

㈣線性放水規則模式之應用

如前所述，機遇限制性模式對於限制條件可提供明確之可靠度，顯爲定率性模式所不及，故本文僅就線性放水規則機遇限制性模式加以探討，唯爲方便起見，以下均逕以「線性放水規則模式」稱之。

以下之應用係針對「S型式線性放水規則模式」3-39式至3-43式與「SQ型式線性放水規則模式」3-49式至-53式。其中，取$R_t^{min}=12\times10^6$ m³，$S_t^{min}=0.1K$，並採用季模式，亦即$t=1\sim4$。流量資料係取自後堀溪民國48年6月至69年5月共21年之記錄，經檢定而知各季流量時列具有定常性和一年一次循環之週期性，且可以對數常態分配擬合（fit）之。另外，所有機率可靠度均取等值（亦即$\alpha=\beta=\gamma$），以利比較。

〔表一〕以線性放水規則模式求解之水庫容量

機率可靠度 (%)	水庫容量 (10^6m^3)	
	S型式	SQ型式
50	20.024	20.024
60	43.071	21.750
70	92.860	23.073
80	155.106	24.154
90	247.619	25.130

模式之應用結果如表一所示。

爲比較此二型式線性放水規則模式所求得水庫容量之合理性，特再以順序峰值法（Sequent Peak Analysis Method）求解需水量爲12×10^6 m³時之水庫容量，其結果爲22×10^6m³。若以此值爲參考標準來檢視表一，可發現S型式線性放水規則模式所求得之水庫容量確實較SQ型式線性放水規則模式大了許多，而且極不合理（與需水量比較之結果）。

此乃歷來應用線性放水規則模式求解水庫容量之諸學者所共同得到的結果，雖然 Stedinger[12]（1984）和施國肱、黃介泉、林志雄[3]（1984）等人曾試圖提出解釋，但仍未足明確，那麼，其眞正原因究竟何在呢？

㈤線性放水規則模式謬誤之探討

細究表一，可發現

(1)對S型式線性放水規則模式而言，其具有$q_t^{(1-\alpha)}$、q_t^{β}、$q_t^{(1-\gamma)}$等三組流量Q_t值（註：所謂一組即係同一種類之限制式）。

(2)對SQ型式線性放水規則模式而言，則僅含$q_t^{(1-\alpha)}$此一組流量Q_t值。

(3)僅當$\alpha=\beta=\gamma=0.5$時，$q_t^{(1-\alpha)}=q_t^{\beta}=q_t^{(1-\gamma)}$，可使得二模式之水庫容量一致且合理。但是，無論$\alpha$值爲何，經由SQ型式線性放水規則模式所求得之水庫容量則均合理。

基於以上之分析，吾人懷疑，是否僅當$q_t^{(1-\alpha)}=q_t^{\beta}=q_t^{(1-\gamma)}$（$\alpha,\beta,\gamma$不一定是0.5），亦即$Q_t$值均一致時，由S型式線性放水規則模式所求解之水庫容量才會合理？

吾人將原始之S型式線性放水規則模式列出：

$$\text{Min. } K \tag{3-54}$$

$$\text{s.t.} \quad S_t-S_{t-1}+R_t=Q_t \tag{3-55}$$

$$R_t=S_{t-1}-b_t \tag{3-56}$$

$$P_r[R_t \geq R_t^{min}] \geq \alpha \tag{3-57}$$

$$P_r[S_t \leq S_t^{max}] \geq \beta \tag{3-58}$$

$$P_r[S_t \le S_t^{min}] \ge \gamma \qquad (3\text{-}59)$$

以之與3-39式至3-43式之模式（確定性對等式模式）相較，可發現後者實際上是隱含了水平衡方程式3-55式，為模式所必須滿足條件之一。但是，在模式3-39式至3-43式中，當於同一時期t時，若$q_t^{(1-\alpha)}$、q_t^{β}、$q_t^{(1-\gamma)}$有任二組不相等，則代表同一時期t具有二個以上之流量Q_t值，如此將無法滿足水平衡方程式，蓋因每一時期t之水平衡方程式中只含一個Q_t值。

由此可知，S型式線性放水規則模式之不合理現象——過分估求水庫容量，實肇因於未能滿足模式中所含之水平衡方程式！因此，若欲使此模式合理可行，則必須使得在整個模式中只能含有一組Q_t值，亦即「同一時期t之Q_t值必須相同」！

㈥線性放水規則模式之修正

基於「同一時期t之Q_t值必須相同」之前提，吾人只能在諸多限制條件組中選出最重要的一組，以做為控制機率可靠度之用，如此即可得到一組Q_t值，稱為「控制組」。

在水庫設計與營運之模式中，控制放水量以滿足下游需水量常為最重要之標的，因此筆者建議，除非特殊要求，否則不妨以$R_t \ge R_t^{min}$為控制組，此時之修正模式如下：

1. S型式：

$$\text{Min. } K \qquad (3\text{-}60)$$

$$\text{s.t.} \quad b_{t-1}-b_t \ge R_t^{min}-q_{t-1}^{(1-\alpha)}=R_t^{min}-q_{t-1}^{*} \qquad (3\text{-}61)$$

$$K-b_t \ge q_t^{*} \qquad (3\text{-}62)$$

$$0.1K-b_t \le q_t^{*} \qquad (3\text{-}63)$$

$$K,\ b_t^{+},\ b_t^{-} \ge 0 \qquad (3\text{-}64)$$

2. SQ型式：

$$\text{Min. } K \qquad (3\text{-}65)$$

$$\text{s.t.} \quad b_{t-1}-b_t \ge R_t^{min}-q_t^{(1-\alpha)}=R_t^{min}-q_t^{*} \qquad (3\text{-}66)$$

$$K-b_t \ge 0 \qquad (3\text{-}67)$$

$$0.1K-b_t \le 0 \qquad (3\text{-}68)$$

$$K,b_t \ge 0 \qquad (3\text{-}69)$$

四、線性放水規則修正模式之應用與研討

㈠線性放水規則修正模式之應用

以應用線性放水規則模式完全一樣之已知條件，代入修正模式3-60式至3-64式以及3-65式至3-69式求解，將其結果示於表二。

〔表二〕以線性放水規則修正模式求解之水庫容量

控制組流量 q_*^t	機率可靠度 (%)	水庫容量 (10^6m^3)	
		S 型 式	SQ 型式
$q_t^{0.9}$	10	10.815	10.815
$q_t^{0.7}$	30	14.171	14.171
$q_t^{0.5}$	50	20.024	20.024
$q_t^{0.3}$	70	23.073	23.073
$q_t^{0.1}$	90	25.130	25.130

以表二之水庫容量值與由順序峰值法所求得之水庫容量$22\times10^6m^3$相比較，可知此結果均甚合理。然而，為何由S型式與SQ型式二線性放水規則模式所求得之水庫容量值都相等呢？

㈡ S型式與SQ型式二線性放水規則模式所得水庫容量值一致之探討

細察此二型式之線性放水規則

1. S型式： $R_t=S_{t-1}-b_t=Q_{t-1}+b_{t-1}-b_t$
   $S_t=Q_t+b_t$
2. SQ型式： $R_t=Q_t+b_{t-1}-b_t$
   $S_t=b_t$

可看出，$R_t=f(Q_t,b_t)$，$S_t=g(Q_t,b_t)$，$R_t=h(S_t,b_t)$，其中f,g,h為函數符號，即是說，經由線性放水規則定出了R_t、S_t、Q_t間之關係；但是，當將此三者代入水平衡方程式時，b_t將消失。因此，可以說此二模式之差異只在於線性放水規則，且將差異歸諸b_t值。

玆即以二模式中之限制條件分別加以比較，以驗證此二模式水庫容量必然一致之現象。（令$Q_t=q_*{}^t$）

第一類限制條件

SQ型式 ：$b_{t-1}-b_t \ge R_t^{min}-Q_t$

$$\Rightarrow S_{t-1}-S_t \ge R_t^{min}-Q_t \qquad (4\text{-}1)$$

S型式 ：$b_{t-1}-b_t \ge R_t^{min}-Q_t$

$$\Rightarrow (Q_{t-1}+b_{t-1})-b_t \geq R_t^{min}$$

$$\Rightarrow S_{t-1}-(S_t-Q_t) \geq R_t^{min}$$

$$\Rightarrow S_{t-1}-S_t \geq R_t^{min}-Q_t \qquad (4\text{-}2)$$

第二類限制條件

SQ型式 $: K-S_t \geq 0 \qquad (4\text{-}3)$

S 型式 $: K-b_t \geq Q_t$

$$\Rightarrow K-(Q_t+b_t) \geq 0$$

$$\Rightarrow K-S_t \geq 0 \qquad (4\text{-}4)$$

第三類限制條件

SQ型式 $: 0.1K-S_t \leq 0 \qquad (4\text{-}5)$

S 型式 $: 0.1K-b_t \leq Q_t$

$$\Rightarrow 0.1K-(Q_t+b_t) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0.1K-S_t \leq 0 \qquad (4\text{-}6)$$

比較4-1式與4-2 式，4-3式與4-4式，4-5 式與4-6 式，其型式與數值大小均分別一致，故知由 S 型式與 SQ 型式二線性放水規則模式所求得之水庫容量必然一致。

㈢ 線性放水規則修正模式之研討

為了對於修正模式有更清晰之瞭解，吾人在模式中多考慮了最大放水量限制條件$R_t \leq R_t^{max}$（以下應用時取$R_t^{max}=125\times10^6 m^3$），使模式更複雜些，以便找出某些現象或特性。

考慮模式：

1. S 型式

$$\text{Min. } K$$

s.t.

$$S_t-S_{t-1}+R_t=Q_t$$
$$R_t=S_{t-1}-b_t$$
$$P_r[R_t \geq R_t^{min}] \geq \alpha$$
$$P_r[R_t \leq R_t^{max}] \geq \beta$$
$$P_r[S_t \leq S_t^{max}] \geq \gamma$$
$$P_r[S_t \geq S_t^{min}] \geq \delta$$

其確定性對等式模式為

$$\text{Min. } K$$

s.t.

$$b_{t-1}-b_t \geq R_t^{min}-q_{t-1}^{(1-\alpha)}$$
$$=R_t^{min}-q_{t-1}^*$$
$$b_{t-1}-b_t \leq R_t^{max}-q_{t-1}^{\beta}$$
$$=R_t^{max}-q_{t-1}^*$$
$$K-b_t \geq q_t^{\gamma}=q_t^*$$
$$0.1K-b_t \leq q_t^{(1-\delta)}=q_t^*$$
$$K,\ b_t^+,\ b_t^- \geq 0$$

2. SQ型式：

$$\text{Min. } K$$

S.t.

$$S_t-S_{t-1}+R_t=Q_t$$
$$R_t=Q_t+b_{t-1}-b_t$$
$$P_r[R_t \geq R_t^{min}] \geq \alpha$$
$$P_r[R_t \leq R_t^{max}] \geq \beta$$
$$P_r[S_t \leq S_t^{max}] \geq \gamma$$
$$P_r[S_t \geq S_t^{min}] \geq \delta$$

其確定性對等式模式為

$$\text{Min. } K$$

s.t.

$$b_{t-1}-b_t \geq R_t^{min}-q_t^{(1-\alpha)}$$
$$=R_t^{min}-q_t^*$$
$$b_{t-1}-b_t \leq R_t^{max}-q_t^{\beta}=R_t^{max}-q_t^*$$
$$K-b_t \geq 0$$
$$0.1K-b_t \leq 0$$
$$K, b_t \geq 0$$

以下分別就以上之模式（稱為$R_t^{min} \leq R_t \leq R_t^{max}$型式）、去掉$P_r[R_t \leq R_t^{max}] \geq \beta$條件之模式（稱為$R_t^{min} \leq R_t$型式）、和去掉$P_r[R_t \geq R_t^{min}] \geq \alpha$條件之模式（稱為$R_t \leq R_t^{max}$型式）等三種型式之 S 型式與 SQ 型式線性放水規則模式進行研究比較，其結果示如表三。

由表三，吾人可發現一有趣之現象，亦即

1.當 $q_t^* < q_t^{0.5}$時，$R_t^{min} \leq R_t \leq R_t^{max}$ 型式之線性放水規則模式所求得之水庫容量與$R_t^{min} \leq R_t$型式之線性放水規則模式所求得者一致。

注意，此時 $P_r[R_t \geq R_t^{min}] \geq \alpha$，$\alpha > 0.5$

$P_r[R^t \leq R_t^{max}] \geq \beta$，$\beta < 0.5$

2. 當$q_t^* \geq q_t^{0.5}$時，$R_t^{min} \leq R^t \leq R_t^{max}$ 型式之線性放水規則模式所求得之水庫容量與$R_t \leq R_t^{max}$型式之線性放水規則模式所求得者一致。

注意，此時 $P_r[R_t \geq R_t^{min}] \geq \alpha$，$\alpha \leq 0.5$

$P_r[R_t \leq R_t^{max}] \geq \beta$，$\beta \geq 0.5$

〔表三〕以 $R_t^{min} \leq R_t$、$R_t^{min} \leq R_t \leq R_t^{max}$、$R_t \leq R_t^{max}$ 三種型式之線性放水規則修正模式求解之水庫容量

q_t^*	α (%)	β (%)	水庫容量 (10^7 m^3)					
			$R_t^{min} \leq R_t$型式		$R_t^{min} \leq R_t \leq R_t^{max}$型式		$R_t \leq R_t^{max}$型式	
			S型式	SQ型式	S型式	SQ型式	S型式	SQ型式
$q_t^{0.1}$	90	10	25.130	25.130	25.130	25.130	0	0
$q_t^{0.3}$	70	30	23.073	23.073	23.073	23.073	0	0
$q_t^{0.5}$	50	50	20.024	20.024	25.174	25.174	25.174	25.174
$q_t^{0.7}$	30	70	14.171	14.171	75.922	75.922	75.922	75.922
$q_t^{0.9}$	10	90	10.815	10.815	178.428	178.428	178.428	178.428

由以上之分析，可得到一個結論：線性放水規則修正模式所欲求之水庫容量大小主要係受控於P_r〔‧〕≥0.5之機率限制條件！

顯然，此結論可反映出線性放水規則修正模式是合理的。蓋因一般多是在機率限制條件之機率可靠度大於50%時，才有必要設置此條件，而此修正模式確能優先以P_r〔‧〕≥0.5之限制條件爲模式之控制條件，是知此修正模式應爲合理無誤。

㈣S型式與SQ型式二線性放水規則之比較

S型式線性放水規則爲$R_t = Q_{t-1} + b_{t-1} - b_t$，其乃以前一期之流量值$Q_{t-1}$爲依據，故可預知本期之放水量。而SQ型式線性放水規則爲$R_t = Q_t + b_{t-1} - b_t$，其係以本期尚爲未知之流量值$Q_t$爲依據，除非預先對$Q_t$建立預測模式，否則無法預知本期之放水量。由此可知，S型式線性放水規則應可認爲是一簡宜合理之水庫運轉規則。

五、結論與建議

1.機遇限制性模式考慮了水庫進流量的「序率特性」，並將「機率」加諸限制條件，以控制限制條件之「可靠度」或「風險度」，此點確非定率性模式所能做到。水庫設計所需之主要水文資料——流量，實係一隨機發生之變數，建議考慮採用「機遇限制性模式」，唯使用時必須注意滿足模式之所有條件和物理意義。就本研究之線性放水規則模式而言，由於模式中隱含水平衡方程式，因此對於不同組之限制條件，在同一時期t時，其所含之流量Q_t值必須一致，方能滿足水平衡方程式，而經由如此修正之線性放水規則模式所求得之水庫容量即可得到合理之數值。糾纏、困惑學者十幾年之疑問——爲何S型式線性放水規則模式總是過分估求水庫容量——於焉解開！

2.對於線性放水規則修正模式而言，S型式與SQ型式所求得之水庫容量均一致。此乃由於此二型式之線性放水規則僅係規定了R_t、S_t和Q_t間之關係，其差異只歸諸b_t值，對於滿足水平衡方程式和所求得之水庫容量大小並不造成任何差異，因此所求得之水庫容量必然一致。

3.基於「同一時期t之流量Q_t值必須相同」之前提，一般在使用線性放水規則修正模式時，必須在諸不同種類之限制條件中選出最重要之一組做爲「控制組」，亦即整個模式中所使用之Q_t值均須與此組Q_t值一致，如此方能完全滿足模式中之所有條件，並使求出之解答得到合理之結果。若無特殊要求，一般建議採用最小放水量或需水量限制之機率條件式做爲控制組。

4.S型式線性放水規則不但簡明，且以前一期之流量值爲依據，而可預知本期之放水量，故可認爲係一簡宜合理之水庫運轉規則。SQ型式線性放水則規實爲水平衡方程式，除非建立流量之預測模式，否則不具預知放水量之功效。

5.由於流量時列之特性可能隨時間而改變，因此，建議每隔幾年卽對其重新分析，並擬合機率分配，做爲演算線性放水規則修正模式之用，以增加模式之準確性和可靠性。唯若此時水庫容量已定，可在模式中改以「需水量或最小放水量之最大化」爲目標函數，而將已知之水庫容量值以及重新擬合機率分配之流量值代入模式中求解，以求得最佳需水量，做爲調配供水量之用。

謝　　誌

本研究必須感謝臺大水工試驗所提供電腦設備以及該所何興亞技士提供線性規劃電腦程式，更得感激恩師施國肱先生與黃介泉先生對本研究之敎誨與催生。當然，若無內子蕙芳之全力支持，本文實難順利完成。

參 考 文 獻

1. 臺大土研所和水資會合辦，「水資源系統分析講習會講義」，第一卷，72年6月。
2. 劉佳明、郭振明，「線性放水規則決定下游水庫容量之研究」，臺大農工研究所，70年6月。
3. 施國肱、黃介泉、林志雄，「線性放水規則應用於臺灣水庫設計之可行性研究」，淡江大學土木工程研究所，73年6月。
4. Charles ReVelle, Erhard Joeres & William Kirby,"The Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design: 1. Development of the Stochastic Model", Water Resour. Res., 5(4), August 1969.
5. Charles ReVelle & Jose Gundelach, "Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design: 4. A Rule That Minimizes Output Variance", Water Resour. Res., 11(2), April 1975.
6. Charles ReVelle & William Kirby, "Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design: 2. Performance Optimization", Water Resour. Res., 6(4), August 1970.
7. D. P. Loucks, "Some Comments on Linear Decision Rules and Chance Constraints", Water Resour. Res., 6(2), April 1970.
8. D. P. Loucks, J.R. Stedinger & D. A. Haith, "Water Resource Systems Planning And Analysis", 1981.
9. Daniel P. Loucks & Phillp J. Dorfman, "An Evaluation of Some Linear Decision Rule in Chance-Constrained Models for Reservoir Planning and Operation", Water Resour. Res., 11(6), December 1975.
10. Erhard F. Joeres, Günther J. Seus & Herbert M. Engelmann, "The Linear Decision Rule (LDR) Reservoir Problem With Correlated Inflows: 1. Model Development", Water Resour. Res., 17(1), February 1981.
11. George K. Young, "Finding Reservoir Operating Rules", Journal Of The Hydraulics Division ASCE, HY6, November 1967.
12. Jery R. Stedinger, "The Performance of LDR Models for Preliminary Design and Reservoir Operation", Water Resour. Res., 20 (2), February 1984.
13. John Eastman & Charles ReVelle, "Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design: 3. Direct Capacity Determination and Intraseasonal Constraints", Water Resour. Res., 9(1) February 1973.
14. Jose Gundelach & Charles ReVelle, "Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design: 5. A General Algorithm", Water Resour. Res., 11(2), April 1975.
15. L. M. Eisel, "Comments on The Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design by Charles ReVelle, Erhard Joeres, and William kirby", Water Resour. Res., 6(4), August 1970.
16 L. M. Eisel, "Chance Constrained Reservoir Model", Water Resour. Res., 8(2), April 1972.
17. Mark H. Houck, "A Chance Constrained Optimization Model for Reservoir Design and Operation", Water Resour. Res., 15(5), October 1979.
18. Mark H. Houck & Bithin Datta, "Performance Evaluation of a Stochstic Optimization Model for Reservoir Design and Management With Explicit Reliability Criteria", Water Resour. Res., 17(4), August 1981.
19. Mark H. Houck, Jared L. Cohon & Charles S. ReVelle, "Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design: 6. Incorporation of Economic Efficiency Benefits and Hydroelectric Energy Generation", Water Resour. Res., 16(1), February 1980.
20. Moshe Sniedovich' "Analysis of a Chance Constrained Reservoir Control Model", Water Resour. Res., 16(5), October 1980.
21. Sham S. Luthra & Sant R. Aroa, "Optimal Design of Single Reservoir System Using δ Release Policy", Water Resour. Res., 12(4), August 1976.