

地層下陷之理論分析與實驗探討

Theoretical Analysis and Experimental Investigation on Land Subsidence

淡江大學教授兼所長

施 清 吉

Ching-Chi Shih

摘 要

當時間 t 趨近於無窮大時，經由半徑 R 的抽水管，自限制含水層的地下水抽取量 Q_p ($Q_p = Q \times \pi R^2$) 與儀壓頭洩降 η 間的漸近解為

$$\eta = \frac{Qt}{SH_0} \exp\left(-\frac{Kr^2}{Q_p}\right) \exp\left(-\frac{Sr^2}{4Kt}\right) \left(\left(\frac{A}{2} - \frac{1}{4}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{SR^2}{4Kt}\right)\right] - \frac{1}{4} \frac{SR^2}{4Kt} + \left(\frac{A}{4} - \frac{1}{4}\right) \frac{SR^2}{4Kt} \left(\frac{R}{r}\right) \right)$$

式中， H_0 、 K 與 S 分別為限制含水層的厚度，滲透係數與比蓄水量。上式含一未定係數 A 須配合實驗由數據分析求得，此係數視土層的性質與抽水量而定。在本文的砂箱模型實驗中， A 等於 6.5825538。而終極儀壓頭洩降 η_{ult} 可由上式求得，即

$$\eta_{ult} = \exp\left(-\frac{Kr^2}{Q_p}\right) \frac{QR^2}{4KH_0} (A-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{R}{r}\right)$$

利用一維單向壓密方程式，吾人可由儀壓頭洩降求得地層下陷量 ζ ，即 $\zeta = H_0 S \eta$ 。漸近解的推測值同時與實驗結果及數值解比較。

Abstract

The asymptotic solution of piezometric head drops η due to an overdraft of groundwater from a confined aquifer with the thickness of H_0 is obtained as follows:

$$\eta = \frac{Qt}{SH_0} \exp\left(-\frac{Kr^2}{Q_p}\right) \exp\left(-\frac{Sr^2}{4Kt}\right) \left(\left(\frac{A}{2} - \frac{1}{4}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{SR^2}{4Kt}\right)\right] - \frac{1}{4} \frac{SR^2}{4Kt} + \left(\frac{A}{4} - \frac{1}{4}\right) \frac{SR^2}{4Kt} \left(\frac{R}{r}\right) \right)$$

where R is the radius of well; Q the pumping discharge per unit area; S the specific storativity; K the hydraulic conductivity; and A the unknown coefficient to be determined from the data analysis of experimental results ($A = 6.5825538$ based on the present experimental results), which depends upon the pumping rate and aquifer properties only. From the above solution the ultimate piezometric head drop η_{ult} can also be obtained

$$\eta_{ult} = \exp\left(-\frac{Kr^2}{Q_p}\right) \frac{QR^2}{4KH_0} (A-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{R}{r}\right)$$

Furthermore, from the one dimensional consolidation equation the amount of land subsidence ζ can then be determined, i.e. $\zeta = H_0 S \eta$. The prediction of the analytical solution is compared with the numerical solution and the experimental results.

一、引 論

地下水的抽取來源不外乎取自限制含水層 (Confined aquifer) 或未限制含水層 (Unconfined aquifer)，前者造成儀壓面 (Piezometric surface) 的下降，而後者却導致地下水位的下降。這兩種抽取的方式均會使土層內的有效應力 (Effective stress) 增加，造成土層的壓密，因而形成地層下陷的現象。本文只分析自限制含水層抽取地下水而引起的地層下陷。因此，首先探討儀壓面下降對應力的影響。

在一多孔介質 (Porous medium) 中的地下水運動，除了水本身的流動外，還須考慮土粒的移動。這兩種物質的運動均須滿足質量不減定理 (Law of conservation of mass)，但水的連續方程式 (Continuity equation) 尚須兼顧地下水的抽取量。所以由這些物質的質量不減定理以及其應力與應變間的關係式，吾人就可得儀壓頭洩降 (Piezometric head drop) 的方程式，而儀壓頭洩降與地層下陷 (Land subsidence) 間的關係式正為一維單向 (垂直) 壓密方程式。

由於一維單向壓密方程式為一簡單的線性方程式，分析自限制含水層抽取地下水而引起的地層下陷，應以儀壓頭洩降的探討為主。本文擬從已建立的數學模式，進一步尋求在時間趨近於無窮大時，儀壓頭洩降的漸近解 (Asymptotic solution)。而後再分析與比較由三種不同的方法 (漸近解、實驗、數值解) 所得的推測結果。

二、儀壓頭變動之應力分析

廣泛超抽地下水將會引起地層下陷；一般而言，地下水的抽取不外乎取自限制含水層 (Confined aquifer) 與未限制含水層 (Unconfined aquifer)。不管取自上述的那一層，抽取地下水後，都會引起有效應力 (Effective stress) 的增加，因而壓密土層，使土層下陷。因此，此章將首先大略敘述有效應力的組成。其次，由於大量而且長期超抽地下水，通常都是指自限制含水層抽取地下水，而導致限制含水層內的儀壓頭 (Piezometric head) 明顯地下降。所以，儀壓的改變對應力的影響，也將分析於後。至於，另一情況的分析 (自非限制含水層抽取地下水)，可參考其他文獻^{(1)(2)(3)*}

(一)、有效應力的組成

自限制含水層抽取地下水，勢必會改變層內的

儀壓頭，根據 Terzaghi 所提飽和土壤中的有效應力觀念 (Effective stress concept in saturated soils)⁽⁴⁾，在飽和含水土層內，任一點的總垂直應力 (Total vertical stress) σ_t 是由有效應力 p_e 與孔隙水壓 P (Pore water pressure) 所構成的，即

$$\sigma_t = p_e + P \quad (1)$$

式(1)中，總垂直應力是指平行於重力方向的應力，而任一點上的總垂直應力即等於該點上，各土層的單位重乘以對應的厚度之和，故

$$\sigma_t = \sum_{i=1}^n \gamma_i l_i \quad (2)$$

式中， γ_n 與 l 分別代表土層的單位重及厚度，而右下註腳表示第「 n 」層。單位重可分為三類：飽和單位重 (Saturated unit weight) γ_{sat} ，濕單位重 (Wet unit weight) γ_{wet} ，浮單位重 (Submerged or buoyant unit weight) γ_{sub} ，其中浮單位重定義為

$$\gamma_{sub} = \gamma_{sat} - \gamma \quad (3)$$

式中， γ 為水的單位重。而濕單位重為水的單位重與顆粒的單位重之和，所以

$$\gamma_{wet} = (1-n)G_s\gamma + ns\gamma \quad (4)$$

式中， n 為土層的孔隙率 (Porosity)， G_s 為土粒比重， s 為通氣層的飽和度 (Degree of saturation)，未飽和含水土層俗稱為通氣層 (Aeration zone)。如果飽和度等於 1，則通氣層就成為飽和含水層，統稱為浸水土層，此時的飽和單位重可由式(4)求得

$$\gamma_{sat} = (1-n)G_s\gamma + n\gamma \quad (5)$$

浮單位重的計算可由式(5)代入式(3)求得，即

$$\gamma_{sub} = (1-n)(G_s-1)\gamma \quad (6)$$

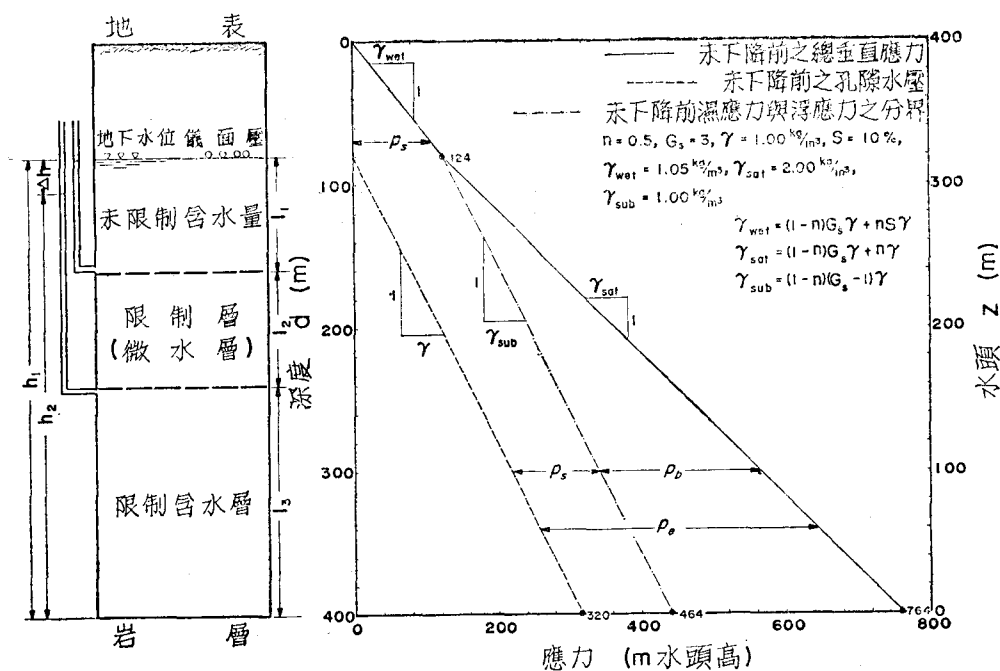
利用式(3)，(4)與(5)，吾人就可根據土層的剖面結構，由式(2)求得各點上的總垂直應力。其次，孔隙水壓是指孔隙內的水，作用於土粒上的壓力，此壓力的測定通常採用儀壓頭 (Piezometric head)。在未限制含水層中的任一點上，由於孔隙水壓為儀壓面至該點間的垂直距離，而儀壓頭定義為孔隙水壓與勢位頭 (Potential head) 之和。所以，如圖一所示的土層剖面，未限制含水層的儀壓高即為地下水位線。但在限制含水層內的儀壓高通常與地下水位並不一致，必須另外測得，例如圖一所示，自限制層的頂部與底部各挖一小孔再引一透明塑膠管，管

內的液面高差即為儀壓頭，即 $\Delta h = h_1 - h_2$ 。根據上述儀壓頭的定義，同樣地在同一平面位置上的儀壓並不因不同的高度而異。如果圖一的限制層(Aquiclude)的滲透性非常非常小，幾乎可視為一非透水層時，地下水位與儀壓面可始終保持在不同的位置。相反地，如果限制只是一滲透性較小的半透水層，則經過一段較長的時間後，由於滲流的關係，地下水位與儀壓面會逐漸趨近於同一高度。總之，以實驗的觀點而言，總垂直應力與孔隙水壓是可直接測得（或計算求得），而實際上與土層下陷息息相關的有效應力，則須由式(1)間接求得。其次，吾人都知道地層下陷的主因是由於有效應力的增加，但如式(1)所示，有效應力改變，孔隙水壓也會跟著改變。但孔隙水壓的改變，正如前述地下水的來源，不是來自直接改變限制含水層的孔隙水壓，就是改變非限制含水層的地下水位。然而，由於限制含水層與非限制含水層一般而言都是由砂與卵石所組成的，滲透性相當良好，孔隙水壓一改變之後無須多長的時間即可恢復為靜水壓分佈，這種孔隙水壓俗稱為靜孔隙水壓 (Static pore water pressure) U_s 。可是限制層就不然了，由於組成的成分以黏土為主，須要相當長的時間才能趨近於另一斜率的線性型分佈，這種非線性型分佈的孔隙水壓稱

之為暫態超孔隙水壓 (Transient excess pore water pressure) U_e 。所以，一般而言，孔隙水壓的組成視為靜孔隙水壓與暫態超孔隙水壓之和，即 $P = U_s + U_e$ 。總而言之，靜孔隙水壓為靜平衡時的水壓，此時的孔隙水壓與水深呈線性型關係，其間的斜率為水的單位重。但是，暫態超孔隙水壓為受了外在因素的影響後，自原來的靜平衡趨近於另一準靜平衡（其間的斜率並不等於水的單位重，而決定於外在因素）的過程中，所呈現的過渡孔隙水壓；通常，此時的水壓分佈均為非線性型。

如上所述，地層下陷的主因是由於有效應力的增加，由式(1)吾人很明顯地可發現有效應力的增加可經由下述的任一途徑達成。(1)總垂直應力保持不變 ($\Delta \sigma_v = 0$) 時，孔隙水壓減小，例如自含水層（包括限制含水層與非限制含水層）抽取地下水；(2)孔隙水壓保持不變 ($\Delta p = 0$) 時，總垂直應力增加，例如地表上興建結構物增加總垂直應力，但自含水層抽取地下水；(3)總垂直應力增加，同時孔隙水壓減小，例如臺北市盆地大興土木，同時又抽地下水。在上述的三種情況下，有效應力都會急速地增加而引起地層下陷。

雖然式(1)提供了造成地層下陷的三個可能因素，然而式(1)却無法再提供其他的因素；同時，以促



圖一 初始情况(未抽水時)，地下水位與儀壓面一致

成地層下陷的主應力（有效應力）而言，式(1)並沒有顯示有效應力的組成。為此，圖一的剖面設計僅顯示主要應力的典型代表。其次，爲了說明方便起見，圖一的層次就不再細分了。如圖一所示，最上層爲未限制含水層，其下爲一滲透性非常非常低的限制層，又稱爲微水層，再下爲一限制含水層，最底下爲不透水的岩層。地下水位之上的未飽和土層稱爲通氣層，厚度爲 ℓ_A ，而其下的未限制含水層、限制層、限制含水層合併稱爲浸水土層，這三層的厚度與飽和單位重分別爲 ℓ_1 、 ℓ_2 、 ℓ_3 與 γ_{sat1} 、 γ_{sat2} 、 γ_{sat3} 。其次，地下水位的標高設爲 h_1 （基準設於岩盤），在限制層底，儀壓頭的標高設爲 h_2 。水的單位重爲 γ ，所有的應力以向下爲正，向上爲負。由於在土層內水的流動非常緩慢，速度頭可略而不計，故土層內任一點的總水頭可以儀壓頭計。在未限制含水層內，任一點的總水頭均相當於地下水高度，因此，此層不發生滲流。但限制層頂與底的總水頭並不相等，其差 $\Delta h = h_1 - h_2$ ，故產生滲流。參閱圖一，根據總垂直應力的定義，如式(2)所示，吾人可求得在任一點上的總垂直應力。以限制層底爲例（因爲此處的有效應力剛好包含下述三種不同性質的應力），在限制層底的總垂直應力 $\sigma_t = \gamma_{wet}\ell_A + \gamma_{sat1}\ell_1 + \gamma_{sat2}\ell_2$ ，而孔隙水壓 p 以儀壓頭高計， $p/\gamma = (h_2 - \ell_3)$ 。將總垂直應力 σ_t 及孔隙水壓 p 代入式(1)以求有效應力 p_e ，並以 $\ell_3 = h_1 - \ell_1 - \ell_2$ 及利用浮單位重的定義（式(5)），吾人即可求得

$$p_e = p_s + p_b + J \quad (7)$$

式中 p_s ：由未浸水土層（未飽和含水層）的重量所產生的應力，相當於濕單位重乘以土層的厚度，即 $p_s = \gamma_{wet}\ell_A$ ，稱之爲濕應力。

p_b ：由浸水土層（飽和含水層）的重量所產生的應力，相當於浮單位重乘以浸水土層的厚度，即 $p_b = (\gamma_{sub1}\ell_1 + \gamma_{sub2}\ell_2)$ ，稱之爲浮應力。

J ：滲流應力（Infiltration stress）

而滲流應力定義爲該處的地下水位減去孔隙水壓後再乘以水的單位重，即

$$J = \gamma \Delta h$$

以圖一而言，在未限制含水層內任一點的孔隙水壓就相當於地下水位，因此在未限制含水層內並無滲流應力。唯一產生滲流應力的地方就在限制層底。

如果 Δh 大於0，即表示地下水位高於儀壓頭，因此導致沿垂直方向的水力梯度而形成向下的滲流。水流的動量經由黏度轉爲作用於土壤顆粒骨架上（Skeleton）的應力。所以滲流應力的方向與重力相同，向下傳遞到整個限制含水層，而且層內的任一點上均承受相同的滲流應力。相反地，如果 $\Delta h < 0$ 時，將產生向上之滲流與滲流應力，其作用方向與重力相反。由式(6)，吾人更能瞭解有效應力到底受了那些因素的影響。首先，若儀壓產生了變化，而其他因素保持不變，式(7)就顯示向下的滲流應力將會增加，也就是增加有效應力，這一點與上述由式(1)所得的結論相同。如果自非限制含水層抽取地下水，使地下水位下降，這種情況式(1)比較無法顯示其間的因果關係，但式(6)就非常清楚顯示出來。一旦增加或降低地下水位的高度，式(7)即刻顯示，不但滲流應力受了影響，同時由於未浸水土層與浸水土層的厚度發生了變化，由其單位重與對應的厚度而產生的濕應力 p_s 與浮應力 p_b 也跟着改變。因此，當地下水位改變高度時，式(6)中的三個應力都會受影響，因而導致有效應力的變化，是增加或減小就比較難於肯定了。此外，非限制含水層與限制含水層所受的影響也不一致，這種情況必須借助於實例的說明才得以瞭解⁽⁵⁾。由式(6)吾人得知有效應力的組成包括濕應力、浮應力與滲流應力。因此，爲了瞭解有效應力沿深度方向的變化，吾人須以簡單的實例予以分析。而後吾人更可依據此應力圖，比較限制含水層的孔隙水壓改變時，有效應力是如何受影響；至於非限制含水層的地下水位改變時的情況，可參閱文獻(3)。

參閱圖一，吾人假設各土層的孔隙率 $n=0.5$ ，土粒比重（Specific gravity of soil grains） $G_s=3.0$ ，而且忽略地下水位以上土層（通氣層或未浸水土層）的含水量變化，以及在毛管邊緣（Capillary fringe）與中間引吸區（Intermediate vadose zone）的負壓力。此外，再假設通氣層的飽和度 S 等於10%，此層內的孔隙水壓等於0。在未抽取地下水之前（初時情況），假設地下水位與儀壓面在同一高度上，這就表示各應力處於靜水壓的平衡狀況下，即無暫態超孔隙水壓 U 。也無滲流應力 J 。由式(3)、(4)與(5)，吾人即可求得各類應力的分佈情形： $\sigma_t = \gamma_{wet} \times d$ ， $80m \geq d$ 或 $\sigma_t = \gamma_{sat} \times (d - 80) + \gamma_{wet} \times 80$ ， $d \geq 80m$ 、 $p = 0$ ， $80m \geq d$ 或 $p = \gamma(d - 80)$ ， $d \geq 80m$ 、 $p_s = \gamma_{wet} \times$

$d, 80m \geq d$ 或 $p_s = 124m, d \geq 80m, p_b = 0$, $80m \geq d$ 或 $p_b = \gamma_{sub} \times (d - 80), 80m \geq d, J = 0$, $400m \geq d \geq 0$; 而 $\gamma_{wet} = 1.55kg/m^3$, $\gamma_{sat} = 2kg/m^3$, $\gamma_{sub} = 1kg/m^3$ 。圖一的應力是以水的液柱高為單位，1公尺高的液柱相當於 $0.1kg/cm^2$ 的應力。總垂直應力線（以實線表示）與孔隙水壓線（以虛線表示）間的範圍代表有效應力，由於滲流應力等於零，所以有效應力只包括兩部分：濕應力與浮應力，以點虛線為分界線。由式(1)吾人得知總垂直應力的增加，或孔隙水壓的減少都可增加有效應力，前者相當於總垂直應力線向右移動，而後者就相當於孔隙水壓線向左移動。如果總垂直應力與孔隙水壓同時增加，或同時減小，這就須比較兩者的變化幅度，才能決定有效應力是增加或減小。

地下水的抽取不外乎來自未限制含水層或限制含水層，前者使地下水位下降，而後者却使限制含水層的儀壓頭下降。這兩種抽取地下水的方式都會改變上述的應力，因而導致有效應力的增加，壓密土層而引起地層下陷。本文只探討自限制含水層抽取地下水的地層下陷，因此關於地下水位改變後的應力分佈可參考其他文獻。一般而言，為了簡化說明起見，上述兩種不同的抽取方法而引起的應力變化都予以分開討論。實際上，引起應力改變的來源可能不會如上述的情形那般單純，完全來自單一因素的改變，地下水位變動或儀壓面變動，往往都是

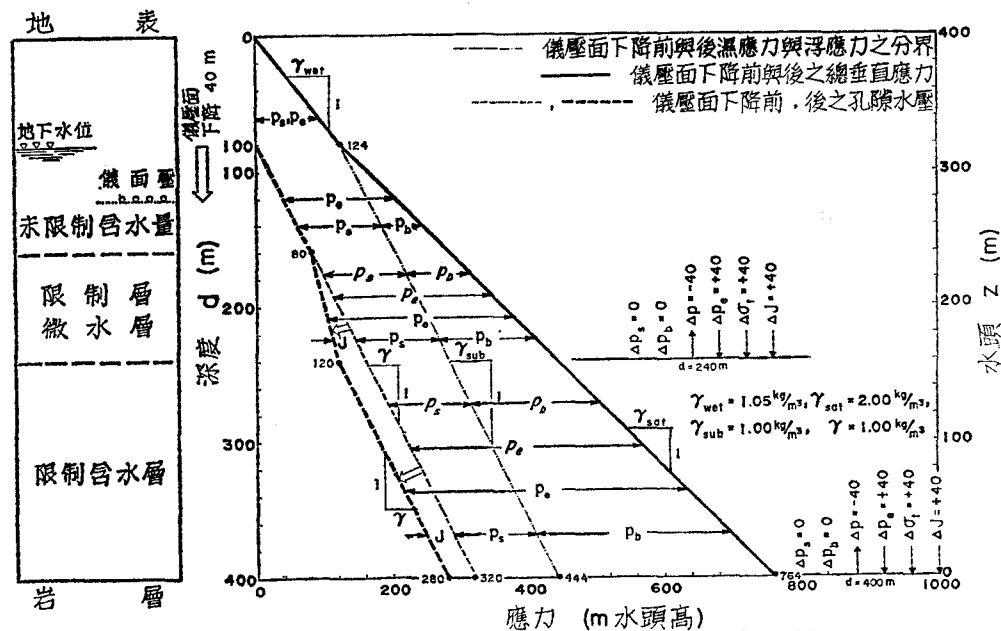
兩者的共同影響。但是由於應力與深度間的關係為線性型，所以下述的分析結果也可直接應用於實際情況上，只不過其結果為各單一因素的累加效果而已。

(二) 儀壓面下降對土層應力的影響

土層應力包括五大項目：總垂直應力，孔隙水壓、濕應力、浮應力與滲流應力，這些應力受儀壓頭下降的影響逐項討論於下：

(1) 總垂直應力：如圖二所示，如果吾人自限制含水層抽取地下水，因而使限制含水層的儀壓面下降，假設在抽取地下水的過程中，土層內的地下水位仍然保持不變。為了易於說明與分析起見，令儀壓面下降一個肯定的數值，由原來的水頭高 320公尺降為280公尺，或由原來的深度80公尺下降至120公尺，水頭高度註明於圖右邊的垂直座標軸。由於地下水位並沒有變動，濕單位重與飽和單位重的分界點也跟著沒有變動，所以儀壓面下降前與下降後的總垂直應力線仍然保持不變，即 $\sigma_t = \gamma_{wet} \times d$, $80m \geq d$ 或 $\sigma_t = \gamma_{sat} \times (d - 80) + \gamma_{wet} \times 80$, $d \geq 80m$ ，參閱圖二的粗實線。

(2) 孔隙水壓：部分土層的孔隙水壓受影響，由於未限制含水層仍以靜水壓計，即 $p = 0$, $80m \geq d$ 或 $p = \gamma \times (d - 80)$, $160m \geq d \geq 80m$ ，故未限制含水層的孔隙水壓並不受儀壓面下降的影響。但自限制層頂起以下的土層，孔隙水壓就漸次受影響



圖二 儀壓面下降，地下水位保持不變

了。這種變化的主要原因如下：在限制層頂的孔隙水壓仍然保持為相當於該深度的靜水壓80m，但在限制層底却由原來的孔隙水壓160m降為120m。由於限制層的滲透率非常非常小，必須經過一段較長的時間才能達到穩定狀態（即上述的準平衡），假設在此情況下孔隙水壓的分佈已由非線型變為線性型，則在限制層的孔隙水壓為 $P = \gamma \times [80 + (120 - 80) / 80 (d - 160)]$ ， $240m \geq d \geq 160m$ 。在未達穩定狀態前，限制層就會呈現暫態超孔隙水壓。所以限制層所扮演的角色就是使限制含水層的儀壓變動無法即刻向上影響上面未限制含水層的孔隙水壓。但是經過一段非常長的時間後，非限制含水層內的孔隙水壓仍然會受影響的，逐漸達到終極的平衡狀態——孔隙水壓以靜水壓計，這可借助於地層下陷或地下水流動。如果吾人所考慮的時間並未長到足夠達到新的平衡狀態，但仍超過達到穩定狀態的時間，則此時暫態超孔隙水壓業已消失，同時未限制含水層的孔隙水壓仍然保持不變。因為儀壓面下降40m，限制層底下限制含水層的孔隙水壓變為 $p = \gamma \times (d - 240) + 120 \times \gamma$ ， $400m \geq d \geq 240m$ 。其次，由於介乎於未限制含水層與限制含水層的限制層為一緩衝層，其作用為連繫儀壓面下降前與下降後的孔隙水壓（前後的變動代表外在因素），所以限制層內的孔隙水壓之分佈較為複雜。如果限制層的孔隙水壓已達穩定狀態而成線性型分佈時，則儀壓面下降後就變為 $\gamma \times (120 - 180) / 80$ 。除了水的單位重外，下降後的線性型的斜率並不相同，下降前斜率為水的單位重 γ ，而下降後之線性型斜率決定於限制層底的原來孔隙水壓頭(80m)，限制層的厚度(80m)以及下降後限制含水層的孔隙水壓頭(120m)。圖二的粗虛線即為儀壓面下降後孔隙水壓的分佈線。

(3)濕應力：由於濕單位重與飽和單位重的分界點並未變動，濕應力的分佈不受儀壓面下降的影響。

(4)浮應力：同樣保持不變。

(5)滲流應力：地下水位與孔隙水壓間的差距代表滲流應力，參閱式(8)。以未限制含水層而言，靜水壓與孔隙水壓的分佈線相互吻合，而且儀壓面下降前與下降後地下水位都保持不變，所以此層內的滲流應力始終等於零，不受儀壓面變動的影響。但是在限制層與限制含水層就不然了，儀壓面一下降後，靜水壓與孔隙水壓的分佈線就由一致轉為不一致

了。儀壓面未下降前，孔隙水壓以靜水壓計，參閱圖二的細虛線，而儀壓面下降後，孔隙水壓的分佈變為粗虛線所示，其間的差距即為儀壓面下降後所導致的滲流應力。在限制層與限制含水層這種非等於零的滲流應力之形成是由於在儀壓面的下降過程中，吾人假設非限制含水層的孔隙水壓仍以靜水壓計而且保持不變。易言之，滲流應力的形成是來自孔隙水壓的改變。這一點極易由式(1)與(6)分析而得。儀壓面下降並未影響總垂直應力線、浮應力同濕應力間的分界線，所以總垂直應力、浮應力與濕應力均未改變。由式(1)吾人得知，總垂直應力無變動時，孔隙水壓的變動就相當於有效應力的變動；再加上浮應力與濕應力均保持不變，式(6)即顯示滲流應力的形成是來自孔隙水壓的改變。一般而言，在限制層孔隙水壓的變化大致可分為下列幾個階段。首先是形成暫態超孔隙水壓，用以連貫儀壓面下降後的孔隙水壓（限制層底）及未受影響的孔隙水壓（限制層頂）。在儀壓面未下降前，孔隙水壓的分佈為一以靜水計的直線，一旦儀壓面發生了變動，非限制含水層與限制含水層的孔隙水壓仍然為靜水壓分佈，只不過此時不再是一條連續的直線了，而於限制層呈現中斷的現象。為了彌補這種中斷的孔隙水壓，限制層很快地形成暫態超孔隙水壓，其特徵為孔隙水壓的分佈是非線性型的，而且是暫態的。這種情況一直持續著，直到限制內的孔隙水壓之分佈由非線性型變為線性型為止（但斜率並不是水的單位重），此情況吾人姑且稱之為穩定狀態。孔隙水壓達穩定狀態時，暫態超孔隙水壓已消失了，整個土層內孔隙水壓的分佈就成折線型了，除了中間的限制層外，非限制含水層與限制含水層的斜率均等於水的單位重，而在限制層內直線斜率決定於水的單位重，限制層的厚度以及變動的情況。穩定狀態只不過是一種準平衡而已，而後孔隙水壓還是會逐漸改變，只不過所須的時間相當長，直到整個土層又達到另一新的平衡為止，或是折線型的孔隙水壓分佈再度恢復為完全以水的單位重為斜率的線性型分佈——靜水壓分佈。從穩定狀態趨近於靜平衡的過程中，折角就愈來愈緩，最後就完全消失了；因此，非線型的現象只侷限於小範圍內，可略而不計。瞭解了孔隙水壓的變化，由此就可推斷滲流應力的變化。圖二為穩定狀態時的應力分佈，儀壓面下降後的孔隙水壓線（粗虛線）與靜水壓線（細虛線）間的範圍就是滲流應力。由限制層頂起，沿深度方

向滲流應力呈線性型遞增，直到限制層底為最大，而後就保持不變了。易言之，在限制層與限制含水層內滲流應力的分佈分別為 $J = \gamma \times \{(d-80) - [80 + (120-80)/80 \times (d-160)]\}$ ， $240\text{m} \geq d \geq 160\text{m}$ 與 $J = \gamma \times \{(d-80) - [(d-240) + 120]\} = 40 \times \gamma$ ， $400\text{m} \geq d \geq 240\text{m}$ 。

圖二的應力線同時展示儀壓面下降前與下降後的應力變化，分別以斜體字與正體字表示。由於儀壓面下降後，總垂直應力線，浮應力線與濕應力線均未移動，所以總垂直應力、浮應力與濕應力都保持不變。儀壓面下降後的唯一改變就是孔隙水壓線。未下降前的孔隙水壓以靜水壓計，未限制含水層的孔隙水壓線以粗虛線表示，而限制層與限制含水層以細虛線表示；儀壓面下降後，未限制含水層的孔隙水壓線仍然保持不變，但限制層與限制含水層的孔隙水壓線則往左移，由細虛線移至粗虛線，因而形成一向下（大於零）的滲流應力。其次，總垂直應力線與孔隙水壓線間的範圍代表有效應力；因此，儀壓面下降就增加在限制層與限制含水層內的有效應力。相反地，如果儀壓面上升，而非限制含水層的地下水深仍然保持不變，總垂直應力，浮應力與濕應力同樣保持不變，但是限制層與限制含水層的孔隙水壓線向右移動，形成一向上的滲流應力，同時使這兩層內的有效應力下降。

由上一段的分析，吾人大致可了解儀壓面下降後的應力變動。比較儀壓面下降前與下降後的應力情況，吾人即可發現受儀壓面下降的影響計有三種應力：孔隙水壓，有效應力與滲流應力。針對這種應力的變動，圖二顯示應力的淨變化，大致可分為三區：未限制含水層、限制層與限制含水層。未限制含水層內的各項應力均未受儀壓面下降的影響。在限制層頂的淨變化等於 0，即 $\Delta p = \Delta p_e = \Delta J = 0$ ；而後沿深度方向呈線性型變化，直到限制層底變為最大，即 $\Delta p = -40\text{m}$ ， $\Delta p_e = +40\text{m}$ ， $\Delta J = +40\text{m}$ ，在其下的限制含水層裏這些淨變化就保持不變。

三、地層下陷之理論分析

自限制含水層抽取地下水而引起的地層下陷，其數學模式的建立可由兩方面的各自探討後合併而得，首先吾人可由土層壓密的探討瞭解應力與應變間的關係，而後再探討抽取地下水後所引起的應力變動。由於土層應變即代表地層下陷，因此，抽取

地下水後而導致的應力變化，就相當於地層厚度的變化。循此方向分析的另一用意，就是藉助於土層壓密的探討可助於吾人瞭解如何由實驗測定理論分析中所需的土層性質。

(一) 壓密方程式

由上章的分析，吾人了解自限制含水層抽取地下水，將會改變土層（或孔隙）內的孔隙水壓與作用於土粒骨架上的有效應力，應力與應變間的關係分別為 $\beta = -D_w(n\Delta\psi)/n\Delta\psi/D_w p$ 與 $\alpha = -D_s(\Delta\psi)/\Delta\psi/D_s(p)^{(6)}$ ，定義中 β 與 α 分別為水與土粒骨架的壓縮係數（Compressibility）， $n\Delta\psi$ 與 $\Delta\psi$ 也分別代表土粒骨架的孔隙體積與總體積。其次，自多孔介質（Porous medium）的含水土層抽取地下水時，除了水的流動外尚包括土粒的移動，所以增量（Increment） D 必須針對同一團水或同一團土粒，因而於右下註腳再加註明 'w' 與 's' 分別代表水與土粒骨架。一般而言，在一承受龐大荷重而且廣大的土層裏，由應力改變而引起土層的被壓縮過程中，吾人均可假設水平的壓縮量可略而不計；此外，水的壓縮係數比土粒骨架的壓縮係數小得多，故可不計水的壓縮量。在此情況下，地層下陷量 ζ 可以土層的垂直壓縮量計，所以

$$\zeta = \alpha \Delta p_e H_o \quad (9)$$

式中， H_o 代表含水土層的原先厚度。乍看之下，式(9)地層下陷量只受制於有效應力的改變，而與孔隙水壓無關。其實並不然，吾人自含水層抽取地下水時，除了水的流動外，還牽涉到土粒的移動；其次，由上章的分析，吾人也得知自限制含水層抽取地下水時， $\Delta p_e = -\Delta p$ 。因此，地層下陷與地下水流動是息息相關的。

(二) 地下水流動方程式

分析在一飽和多孔介質中的水流動及其相關的現象，最主要的法則之一為達西定理(Darcy law)。由於一般的地下水流動均屬於雷諾數（Reynolds number）非常小的潛行運動（Creeping motion），故流動的分析極宜於採用達西定理。假設土層為均質且無方向性，同時土層的性質均可視為保持不變的常數，根據達西定理，吾人得知相對於土粒移動，水的比流量(Specific discharge or apparent velocity) $\vec{q}_r = K \nabla h$ ；式中， K 代表含水土層的滲透係數(Permeability coefficient) 或水力傳導性(Hydraulic conductivity)， h 代表水的儀壓頭，「 ∇ 」代表向量，而 ∇

爲運算符號定義爲 $\nabla(\vec{i}\partial()/\partial x + \vec{j}\partial()/\partial y + \vec{k}\partial()/\partial z)$, x 、 y 、 z 分別爲固定於空間上的三個垂直座標軸。水的比流量定義爲每單位時間通過單位毛面積 (Gross area) 的體積, 比流量的因次爲速度, 方向係垂直於通過的面積。毛面積包括孔隙面積與顆粒面積, 故通過孔隙的實際速度應爲 $\vec{q}_r/n$ 。如果水與土粒骨架的絕對速度分別爲 $\vec{q}$ 與 $\vec{V}_s$, 則 $\vec{q}_r = \vec{q} - n\vec{V}_s$ 。一般而言, 滲透係數應爲二階張量, 共有九個係數, 但吾人可藉助於座標轉換, 簡化只剩下對角線上的三個係數, 其餘的都變爲 0。

引用達西定理來分析飽和多孔介質中的水流動及其相關的現象, 吾人須先設法以其他相關的因子取代比流量。爲此, 針對水的流動與土粒的移動, 質量不減定理 (Law of conservation of mass) 或連續方程式 (Continuity equation) 分別提供了二個方程式, 再利用速度間的關係式, 即 $\vec{q}_r = \vec{q} - n\vec{V}_s$, 吾人可得

$$\rho n \nabla \cdot \vec{V}_s + \rho \nabla \cdot \vec{q}_r + n \frac{D_s \rho}{Dt} - \rho \frac{D_w n}{Dt} = 0 \quad (10)$$

式中, D/Dt 代表物質或質點微分 (Material derivative) 定義爲 $D()/Dt = \partial()/\partial t + (\nabla \cdot \vec{V})()$, 式中 $\vec{V}$ 爲質點的絕對速度, 不同的物質由於速度不相同, 故須區別於右下註腳, 而物質或質點微分之特徵爲同一質點或同一物質所攜帶 (或具有) 的性質對時間的變率。以多孔介質的整體運動而言, 除了充填孔隙內的流體運動外, 還有流體外圍的顆粒移動。因此, 式(10)的各項所採用的運動敘述方法 (Description of motions) 都不一致, 第一項與第二項採用 Eulerian 敘述法, 而後兩項採用 Lagrangian 敘述法。其次, 各項的意義也不盡相同。以單位體積的土粒骨架而言, $\nabla \cdot \vec{V}_s$ 代表土粒骨架的體積膨脹率 (Volume diation), 而土粒骨架的孔隙率爲 n , 其內的水質量則爲 ρn ; 因此 $\rho n \nabla \cdot \vec{V}_s$ 代表土粒骨架以 $\vec{V}_s$ 移動時的水之質通量 (Flux of mass of water)。如果土粒骨架靜止不動, 無論水的速度等於多少, 都沒有這種質通量。此外, 水本身也在流動, 相對於土粒骨架的移動, 由於其間 (水與土粒骨架) 的相對速度而導致的水之質通量爲 $\rho \cdot \Delta \vec{q}_r$, 其值的大小視水力梯度與土層的滲透係數而定, 參閱達西定律。其次, 式(10)

的第三項 $D_w \rho / Dt$ 代表水的密度之變率, 而第四項 $D_s n / Dt$ 代表土粒骨架的孔隙率之變率。

其實式(10)的由來是根據質量不減定理, 敘述在地下水的流動過程中, 孔隙內含水量的變化。然而在應用上質量或孔隙體積的變化都是極不易測得的, 因此, 必須轉換爲其他易於量測的變化, 例如儀壓頭的變化。首先, 假設土粒密度保持不變, 即 $D_s \rho_s / Dt = 0$, 則由土粒移動時的連續方程式, 吾人得知 $\nabla \cdot \vec{V}_s = 1/(1-n) \times D_s n / Dt$ 。其次, 令土粒骨架的總體積爲 $\Delta \forall$, 土粒骨架的孔隙體積爲 $n \Delta \forall$, 而土粒本身的實際體積則爲 $\Delta \forall_s = \Delta \forall (1-n)$, 並視爲不變, 即 $D_s V_s / Dt = 0$ 。利用這兩個條件, 式(10)就可簡化爲

$$\Delta \cdot \vec{q}_r + n \beta \frac{D_w \rho}{Dt} + \alpha \frac{D_s p_e}{Dt} = 0 \quad (11)$$

式(11) 爲飽和含水土層內 (非限制含水層與限制含水層) 的地下水流動方程式。一般而言, 孔隙內的水速及土粒的移動速度都是極爲緩慢。在此情況下, 吾人以對時間的偏微分取代質點微分, 不計速度的因素, 則式(11)可簡化爲

$$\nabla \cdot \vec{q}_r + n \beta \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial p_e}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

($\Rightarrow$) 自限制含水層抽取地下水而引起地層下陷

如圖二所示, 自限制含水層抽取地下水會使層內的儀壓面下降, 但未限制含水層的地下水位仍然保持不變。在這種情況下, 總垂直應力不因儀壓面的下降而改變, 即 $\Delta \sigma_t = 0$, 所以由式(1), 可得 $\Delta p = -\Delta p_e$; 其次, 再利用儀壓頭的定義, 吾人就可得一適用於限制含水層的三維地下水流動方程式。接着, 再假設限制含水層的厚度 $H = H(t, x, y)$ 相當均一, 吾人可延厚度方向積分而得一二維地下水流動方程式⁽⁷⁾⁽⁸⁾

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[KH \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[KH \frac{\partial h}{\partial y} \right] = SH \frac{\partial h}{\partial t} \quad (13)$$

式中 $S = \rho g (\alpha + \beta)$ 代表限制含水層的比蓄存量 (Specific storativity) 或比蓄水量 (Specific storage), h 代表儀壓頭。假設地下水的抽取率爲 $Q = Q(t, x, y)$, 以每單位時間自單位面積的淨抽水體積計。此外, 自限制含水層抽取地下水後, 限制層頂與限制層底的孔隙水壓有一明顯的梯度, 形成一向下的滲流應力。如果僅考慮由非限制含水層垂直滲漏至底下限制含水層的滲漏量, 則由穿越過限制層的水頭差 (未限制含水層的水頭減去限制含

水層的儀壓頭)，限制層的厚度與滲透係數，根據達西定理即可求得滲漏率（因次為長度除以時間）。其次，吾人再假設儀壓頭梯度遠超過土層的厚度梯度。在此假設下，代入地下水的抽取率 Q 及滲漏率 Q_n ，則式(13)變為

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial h}{\partial y} \right] = S \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q}{H} - \frac{Q_n}{H} \quad (14)$$

如果限制層為一不透水層，則 $Q_n = 0$ 。由上章的分析吾人得知自限制含水層抽取地下水時，孔隙水壓的變動即相當於有效應力的變動；再依據儀壓頭的定義，即可發現由式(14)所求得的儀壓頭，實際上就相當於有效應力的變化。因此，針對未抽取地下水前的原儀壓頭 h_0 ，吾人就可由式(14)之解，求得儀壓頭洩降 η ($\eta = h_0 - h$)，而儀壓頭洩降就等於有效應力的變動 (Δp_e)，再代入式(9)計算各點的地層下陷量 ζ 。

令自限制含水層抽取地下水的抽取量為 $\pi R^2 Q$ ， R 為抽水管的半徑。未抽取地下水前，限制含水層的厚度與儀壓頭分別為 H_0 與 h_0 。假設滲漏率非常小可略而不計，並假設滲透係數常為一常數，展示於極座標，則由式(14)吾人即求得儀壓頭洩降 (Pezometric head drop) η 方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{K}{S} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) + \frac{Q}{SH_0} \quad (15)$$

而初時與邊界條件為

$$t < 0; \eta(r, t) = 0 \quad (16)$$

$$t \geq 0; r \rightarrow \infty, \eta(r, t) = 0 \quad (17a)$$

$$r = 0, \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0 \quad (17b)$$

邊界條件 (17b) 與實際情況稍有出入，事實上 $r = R$ 。符合條件(16)與(17a,b)，式(15)之解為

$$\begin{aligned} \eta(r, t) = & \int_0^t \left\{ \frac{\exp \left[-\frac{Sr^2}{4K(t-\tau)} \right]}{2 \frac{K}{S}(t-\tau)} \int_0^\infty \xi H_0 S \right. \\ & \times \exp \left[-\frac{S\xi^2}{4K(t-\tau)} \right] J_0 \left[\frac{Sr\xi}{2K(t-\tau)} \right] \\ & \left. d\xi \right\} d\tau \quad (18) \end{aligned}$$

式中， J_0 代表階次為零的第一種 Bessel 函數。假設超額地下水的抽取量 Q 為常數，即 $Q = \text{常數}$ ， $\xi \leq R$ ； $Q = 0$ ， $\xi \geq R$ 。更改式(18)之積分順序，且利用上述超額地下水抽取量的條件，則儀壓頭洩降為

$$\begin{aligned} \frac{\eta SH_0}{Q} = & \int_0^R \left\{ \int_0^t \frac{\xi \exp \left[-\frac{S(r^2+\xi^2)}{4K(t-\tau)} \right]}{2 \frac{K}{S}(t-\tau)} \right. \\ & \left. \times J_0 \left[\frac{Sr\xi}{2K(t-\tau)} \right] d\tau \right\} d\xi \quad (19) \end{aligned}$$

除非利用數值分析的方法外，式(19)是非常不易積分求得分析解 (Analytical solution)。但是吾人均知遠離抽水管 (抽水井)，儀壓頭洩降應該趨近於零，而且最大的洩降應該在緊接抽水管的附近。其次，以實際的應用立場而言，地層下陷的分析重點在於經過長時間的抽取地下水後的下陷情況。這就意味着吾人的分析可採用相當於時間趨近於無窮大的漸近情況 (Asymptotic state)，或是代表時間的無因次參數趨近於無窮大。所以，令 $\epsilon = Sr\xi/2K(t-\tau)$ ，代入式(19)等號右邊的第二個積分，吾人可得⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{\xi \exp \left[-\frac{S(r^2+\xi^2)}{4K(t-\tau)} \right]}{2 \frac{K}{S}(t-\tau)} J_0 \left[\frac{Sr\xi}{2K(t-\tau)} \right] d\tau \\ & = \int_0^\infty \frac{r\xi S}{2Kt} \frac{1}{S} \exp \left[-\frac{(r^2+\xi^2)\epsilon}{2r\xi} \right] \\ & \quad \times J_0(\epsilon) d\epsilon \quad (20) \end{aligned}$$

其次，利用 Bessel 函數的微分通式 $\frac{d}{d\epsilon} \left[\epsilon^n J_n(\epsilon) \right] = \epsilon^n J_{n-1}(\epsilon)$ (式中， n 代表大於 -1 的任一整數) 與部分積分，逐次積分至第六階次的 Bessel 函數，而後再以漸近展開式 (Asymptotic rexpansion) 取代各不同階次的 Bessel 函數，則吾人可得式(20)的漸近展開式

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\xi \exp \left[-\frac{S(r^2+\xi^2)}{4K(t-\tau)} \right]}{2 \frac{K}{S}(t-\tau)} \\ \times J_0 \left[\frac{Sr\xi}{2K(t-\tau)} \right] d\tau = & \exp \left[-\frac{S(r^2+\xi^2)}{4Kt} \right] \\ \times \left(\frac{S\xi}{4K} \right) \left\{ \frac{A}{2} - \frac{1121}{7680} \left[\frac{S(r^2+\xi^2)}{4Kt} \right] \right. \\ & \left. + 0 \dots \dots \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

式中，係數 A 代表級數 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ，級數之和趨近於無窮大，無法由解析求得一個肯定的數值。然而針對級數趨近於無窮大的意義，吾人或許可姑且視係數 A 為未定係數，由實驗決定係數的

大小。這是目前作者對此「困惑」所能想到的唯一辦法。此觀點是否正確，吾人可分析實驗結果是否符合式(2)的函數型式；如果符合的話，就可由數據分析決定未定係數，但其值必須大於1。式(2)的漸近展開式只包括前兩項，第三項為 $O\{(S(r^2 + \xi^2)/4Kt)^2\}$ ，此項代表不計項中的最大值。最後將式(2)代入式(19)，再對 ξ 積分吾人就可求得儀壓頭洩降的漸近解，即

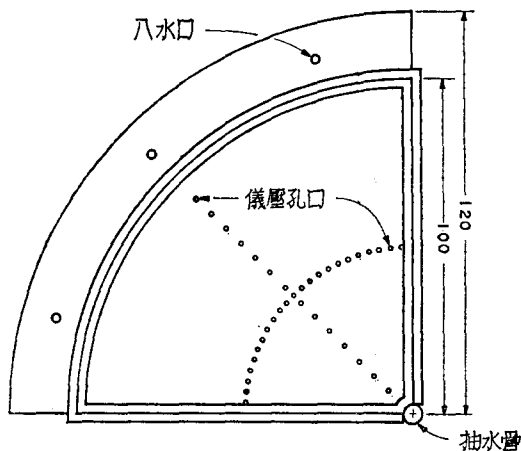
$$\eta = \frac{Qt}{SH_0} \exp\left[-\frac{Sr^2}{4Kt}\right] \left\{ \left(\frac{A}{2} - \frac{1121}{7680}\right) \times \left[1 - \exp\left(-\frac{SR^2}{4Kt}\right)\right] - \frac{1121}{7680} \frac{SR^2}{4Kt} + \left(\frac{A}{4} - \frac{1}{4}\right) \frac{SR^2}{4Kt} \left(\frac{r}{R}\right) \right\} \quad (22)$$

由式(22)求得的儀壓頭洩降，再代入式(9)，吾人就可求得限制含水層的地層下陷量 ζ

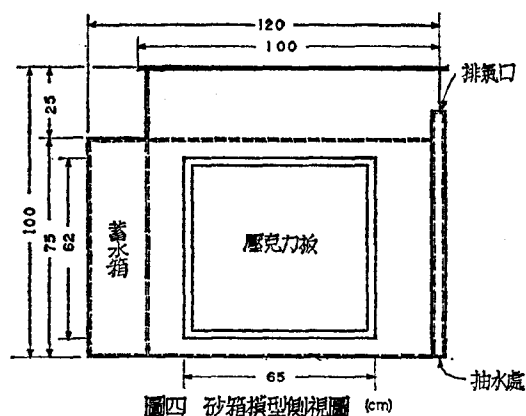
$$\zeta = SH_0 \eta \quad (23)$$

四、實驗設備與步驟

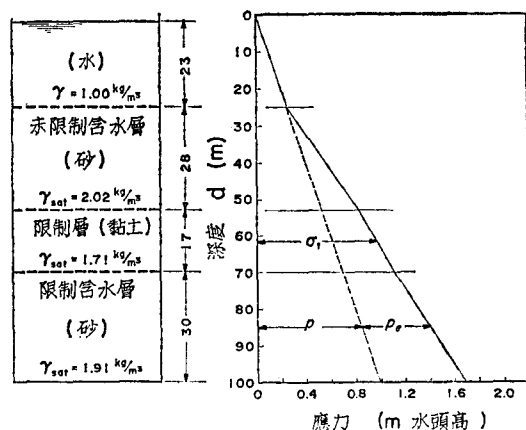
實驗設備採用一個 90° 的扇形砂箱，參閱圖三與圖四，砂箱的材料使用3mm厚的不銹鋼板，扇形砂箱的兩側各設一壓克力板製的觀測面。砂箱的弧形外緣增加二十公分做為蓄水箱以穩定補給砂箱內被抽掉的水。在蓄水箱的上面設置三個入口，分別用三根塑膠管與砂箱上的定水頭水箱（長六十公分、寬五十公分、高五十公分）相連接，箱內有溢流板以穩定水頭。蓄水箱內的水自三個深六十公分寬二十八公分的矩形進水口，沿軸向流入砂箱，相接處各置一片六十號鋼絲網以防止砂箱內的土壤流入蓄水箱。如圖五所示，砂箱內的土層共有三層：未限



圖三 砂箱模型頂視圖 (cm)



圖四 砂箱模型側視圖 (cm)



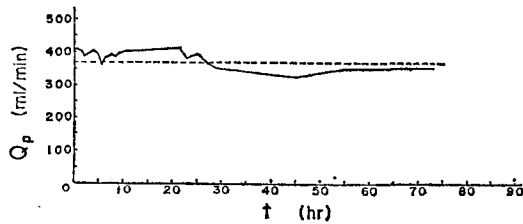
圖五 土層剖面圖

制含水層、限制層與限制含水層，其材料分別為砂、黏土與砂，而圖五也同時表示各層的厚度，相關的性質以及未抽水前的應力分佈情況。如圖三與圖四所示，在扇形砂箱的軸心處，沿高度方向連接一根直徑為3.4公分直管做為抽水管（抽水井）。抽水管與砂箱的接觸處有一個寬為1.5公分，兩端為半圓（圓心的間距等於三十公分）的準橢圓形抽水口，其面積等於49.312545平方公分，相當半徑 R 等於3.9579618公分的圓面積。由於這個面積是實際接觸含水土層的抽水面積，所以在以下的分析中，就以此數值做為抽水管的半徑 R ，而不採用實際的管徑1.7公分（半徑）。抽水管底下以1/4英吋的塑膠管與一小馬力往復推進式的抽水機相連接。抽水機的抽水量介於0~450ml/min之間，而實際上的抽水量並不太穩定；詳細的變化情形可參閱圖六。實驗分析 Q_p 設為370/60ml/sec，而 $Q = Q_p/A = 370/60/\pi R^2 = 0.1243018$ cm/sec。

參閱圖三，在砂箱底部設有十五個沿軸向的儀壓孔口（pressure tap），用以量測限制含水層

的儀壓頭。在 $1/2$ 半徑的圓弧處，同時設有二十三個儀壓孔口，用以觀測在同一半徑處儀壓頭是否相同。

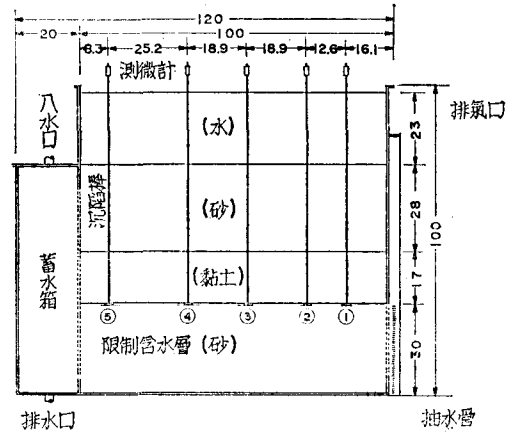
地層下陷的多寡使用沉陷棒測得。沉陷棒是以重量較輕的粗鐵絲做成的，爲了使棒底固定在土層的預定位置上，底部做一水平的彎曲，以增加接觸面，減少因棒重而下沉。其次，爲了使沉陷棒能迅速反應各土層的下陷量，沉陷棒裝設在空心管內。爲了測定限制含水層的下陷情況，所以當砂箱內的限制含水層裝填完畢，在裝填限制層時，也同時裝設限制層底部的沉陷棒。由於圓弧（等半徑）方向之下陷量略相同，而延軸向的差距較大，所以裝設沉陷棒時，底部水平彎曲的部分，須與流向（軸向）垂直。砂箱實驗的沉陷棒均裝於砂箱中間四十五度的位置上，參閱圖七；其次，爲了比較實測的地層下陷量與用實測的儀壓頭洩降推估而得的下陷量，所有沉陷棒的平面位置，均設置在儀壓孔口之上。沉陷棒的上端緊接測微計的伸縮桿。在未抽取地下水時，先調整測微計的高度，使伸縮桿適巧大致在



圖六 抽水量變化圖

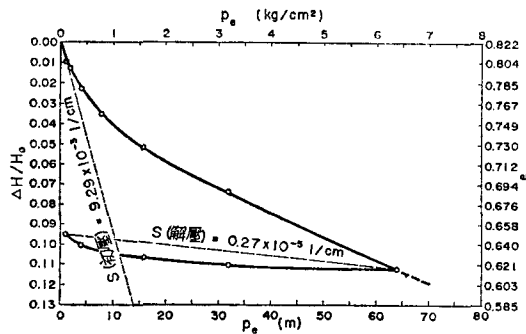
其上下伸縮範圍之一半，因而伸縮桿能够緊跟隨著沉陷棒的任何絲毫變動而上下自由伸縮。本實驗所採用的測微計之量測範圍在 $0 \sim 10\text{m/m}$ 之間，而最小的讀數爲 $1/100\text{m/m}$ 。當土樣裝填完畢，其他的工作也裝備就緒後，仍然須要一段相當長的時間（本實驗等三個星期後才進行實驗），使土層內的空氣自行排除，同時使土壤本身自重及上面水壓產生的壓密下陷消失，等土樣達到穩定情況後才能進行一系列的觀測。首先，使測微計歸零，而後才開始抽水，並隨時記錄抽水量，各位置上的儀壓頭讀數及測微計的讀數。

參閱式(2)，比較理論分析與實驗結果，吾人所需的土壤參數計有：限制含水層的滲透係數 K 及比蓄水量 S 。很遺憾的是，這兩個土樣參數均無法於實驗過程中隨時就地當場測定，只能於實驗前或實驗後，另外單獨採樣由儀器測定之。實驗前，經由



圖七 砂箱中沉陷棒安置之位置圖

單獨土樣的試驗，吾人得知限制含水層的滲透係數 K 等於 $6.1111111 \times 10^{-3} \text{cm/sec}$ 。其次，比蓄水量可經由其定義與式(1)測得。如果水的壓縮量可略而不計，則比蓄水量即可簡化爲 $S = \rho g \alpha$ 。其次，如果有一原共厚度爲 H_0 的土樣，經由 Δp 的壓密後，厚度減少 ΔH ，則由式(9)，其間的關係爲 $\Delta H = H_0 \alpha \Delta p$ ，由比蓄水量的定義，吾人即可得知 $S = \Delta H / H_0 \times \Delta p / \rho g$ 。所以由土樣的應力與應變間的關係曲線就可求得比蓄水量。土層在初時情況的最大有效應力約爲 0.7m 水頭高，而砂箱高度爲 1m ，可產生的最大儀壓頭洩降必定小於 1m ，故所增加的最大有效應力也必定小於 1m 。因此在抽水時，限制含水層的有效應力應在 1m 左右，所以土粒骨架的比蓄水量（初壓）取在此部分斜率的平均值，其結果爲 $S = 9.29 \times 10^{-5} 1/\text{m}$ ，參閱圖八的虛線。在解壓時，應力與應變間的關係曲線與初壓時的大不相同，所以此時的比蓄水量也跟着明顯地改變；如果根據最大有效應力與最小有效應力的兩種情況來衡量，比蓄水量降爲 $0.27 \times 10^{-5} 1/\text{cm}$ 。



圖八 砂層應力與應變關係圖

五、砂箱實驗與理論分析之比較與討論

實驗數據詳列於附錄，其結果與理論解間之比較與討論可分為兩方面來探討：儀壓頭洩降與限制含水層的地層下陷。如式(23)所示，如果比蓄水量 S 可視為常數，則儀壓頭洩降 η 與地層下陷量 ζ 呈線性型關係。因此，比較與討論的重點在於儀壓頭洩降，所得的大部分結論自然而然可直接引用於地層下陷。

(一)儀壓頭洩降

參閱式(22)，由於漸近解包含一未定係數 A ，所以比較實驗結果與理論解（漸近解）之首要工作就是由數據分析來決定式(22)的未定係數。假設未定係數只視土層的性質與抽水情況而定，且不受時間與位置的影響。易言之，在同一土層與同一抽水的情況下，任一時刻與任一位置上的未定係數 A 都相同。這個假設是否正確，那就決定於是否能從實驗結果的數據分析求得未定係數的數值；相反地，如果數據分析顯示未定係數為時間與半徑的函數，則此假設就無法成立。其次，由於漸近解之建立是基於時間趨近於無窮大的條件，因此令時間 t 趨近於無窮大，則式(22)就可簡化為

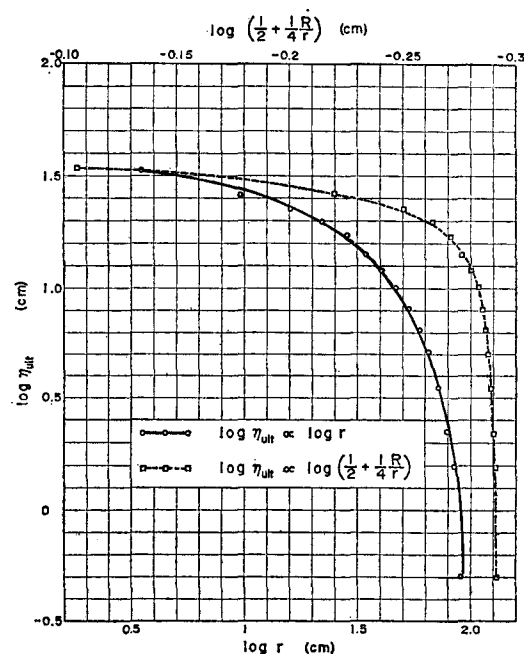
$$\eta_{ult} = \frac{QR^2}{4KH} \left(-\frac{A}{2} - \frac{1121}{3840} \right) + \left(-\frac{A}{4} - \frac{1}{4} \right) \times \frac{R}{r} \quad (24)$$

式中， η_{ult} 稱為終極儀壓頭洩降 (Ultimatic piezometric head drop)，即為時間趨近於無窮大時的儀壓頭洩降。由式(24)，吾人得知 $\eta_{ult} \propto r^{-1}$ ，故儀壓頭洩降與半徑間的關係為冪數型。是否真如此，那就視實驗數據展示在全對數圖紙上是否能夠座落在一直線上而不是一曲線上，唯有如此，吾人才能由直線的斜率或截距來決定未來係數的大小，否則的話未定係數就受半徑的影響了。參閱附錄，吾人即可發現當 $t = 37800$ 秒時，儀壓頭洩降大致保持不變了，因此將此時的儀壓頭洩降展示於圖上，以 $\log r$ 與 $\log \eta_{ult}$ 分別為水平與垂直座標軸。圖九的實線很清楚地顯示實驗數據是座落在一直線上，而不是一曲線上。換言之，如果未定係數 A 的呈現如式(24)的關係式，未定係數並不是一個常數，且決定於離抽水管的遠近。

如果實驗結果的數據分析確定顯示 $\eta_{ult} \propto r^{-1}$ ，由直線的斜率與截距共同來決定未定係數的大小，那麼這也是件相當不肯定的事。除非分別由斜率與

截距所求得數值都相同；不然的話，從這兩個不同的數值中，吾人也得設法決定未定係數要採用那一個數值。因此，吾人必須稍微更改式(24)的型式，使未定係數 A 的大小只要須由斜率（或截距）單獨來決定即可，故式(24)修正為

$$\eta_{ult} = \frac{QR^2}{4KH} (A-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{R}{r} \right) \quad (25)$$



圖九 終極儀壓頭洩降與位置之關係圖

其實式(24)中的1121/3840只是基於前六階次 Bessel 函數的計算結果，如果階次增加很可能趨近於 1/2。針對式(24)的函數關係式，實驗結果標示於以 $\log (1/2 + 1/4 \times R/r)$ 與 $\log \eta_{ult}$ 為水平與垂直座標軸的方格紙上， $(A-1)$ 就可由通過原點的直線截距求得。參閱圖九的虛線，以式(24)的關係式而言，實驗數據也同樣落在一直線上而不是一曲線上，以式(24)與式(25)而言，無論採用那一個型式的函數關係式，吾人都無法由實驗結果的數據分析來決定未定係數 A 的值；但是這兩種關係式是基於理論分析的結果。

另一方面，如果再進一步深入分析式(24)的組合型式，吾人不難發現式(24)顯示儀壓頭洩降與半徑的關係呈現指數型遞減，而且是半徑的平方，即 $\eta \propto \exp(-r^2)$ 或 $\ln \eta \propto r^2$ 。同樣地，以 $\ln \eta$ 與 r^2 分別為垂直與水平座標軸，吾人可將實驗數據表示於

方格紙上，其結果示於圖十，數據的分佈以虛線表示。圖十的虛線顯示，除了靠近與遠離抽水管的數據外，座落於中間部分的數據確實呈現線性型的關係型式。這一現象正與圖十的情況相反，圖九的數據分佈顯示除了中間部份的數據外，靠近與遠離抽水管的數據分佈較傾向於線性型。因此，比較這兩圖的數據分佈，吾人不妨採用式(24)的關係型式同時再加一指數，即：

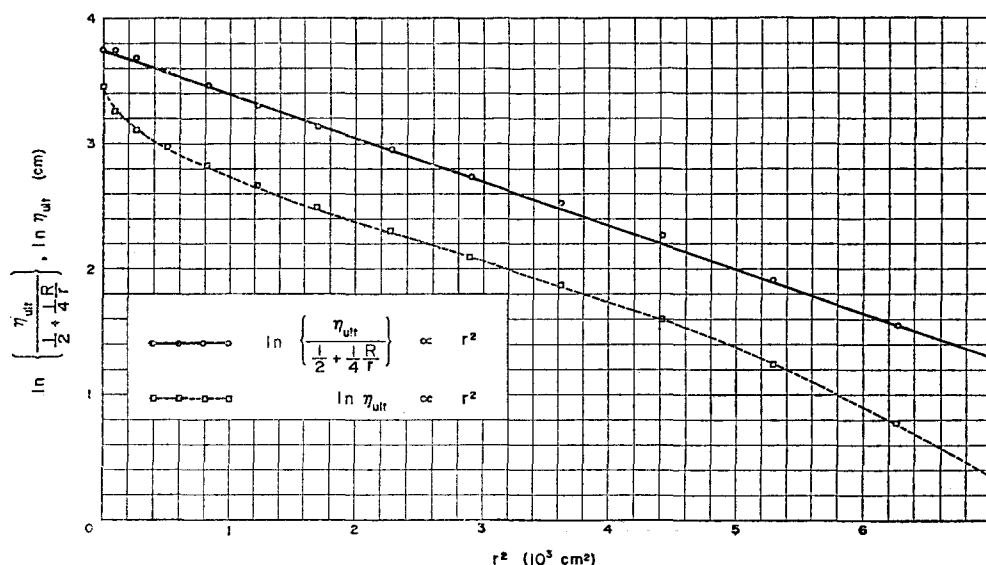
$$\ln \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{R}{r}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{R}{r}} \right] \propto r^2 \quad (26)$$

重新以 $\ln[\eta_{ult}/(1/2+1/4+R/r)]$ 與 r^2 分別為垂直與水平座標軸，再將實驗數據展示於圖十上，數據的分別改以實線表示。圖十的實線顯示除了遠離抽水管的少數讀數外（大約指半徑 r 介於八十公分至一百公分間的讀數），其餘絕大部分的數據分佈相當明顯地傾向於線性型。靠近砂箱邊界的讀數之所以不太傾向於線性型分佈，或許是由於砂箱邊界的影響，使儀壓頭洩降的梯度較其餘的陡。這一點非常類似於管流，在管的進口區與出口區儀壓頭洩降比較陡，因為除了摩擦水頭損失外，還有幾何因素所導致的水頭損失。

參閱附錄，除了遠離抽水管的三個讀數外，利用最小二乘法就可決定其餘十五個讀數（ $t = 37800$ 秒）的線性型關係式，即 $\ln[\eta_{ult}/(1/2+1/4 \times R/r)] = ar^2 + b$ ，所求得之斜率 a 與截距 b 分別等於一

3.4461484×10^{-4} 與 3.760577 。斜率小於零代表儀壓頭洩降隨著半徑的增加而遞減。

參閱式(24)，儀壓頭洩降 η 與 Qt/SH_0 的因次均為長度，因此式(24)中，其餘的各種參數，例如 $Sr^2/4Kt$ ， $SR^2/4Kt$ 與 r/R 均為無因次。因此式(24)的指數也必須是無因次。為了使指數無因次化，吾人必須尋一長度尺度，尺度的選擇決定於當時時間趨近於無窮大時，該尺度是否能反映在這個時候儀壓頭洩降的特徵。毫無疑問的，經過一段相當長的時間後，儀壓頭洩降會趨近於穩定狀態，不受時間的影響，正如式(24)所示。在此情況下，由達西定理吾人得知流速的快慢決定於滲透係數與儀壓頭洩降的梯度；換一句話說，流量的多寡同樣地決定於滲透係數與儀壓頭洩降的梯度。而式(24)正敘述在這種情況下的儀壓頭洩降，所以長度尺度可由地下水的抽取量 Q_p （ $Q_p = Q\pi R^2$ ）與滲透係數 K 組成。故吾人採用 $\sqrt{Q_p/K}$ 為長度尺度。因此，基於線性型關係式的意義，如式(26)所示，由實驗結果的數據分析而得的斜率應該等於 Q_p/K （不計負號）。本實驗 $Q_p = 370/60 \text{ ml/sec}$ 或 cm^3/sec ，所以 $K = 3.4461484 \times 10^{-4} \times 370/60 = 2.1251248 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$ ，此值非常接近於實驗前由單獨土樣試驗而得的滲透係數（ $K = 6.1111111 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$ ）。正如本章第三段的討論，吾人將式(24)的型式轉換為式(26)的型式，主要的用意是為了避免由直線關係式的斜率與截距共同來決定未定係數 A 的大小，同時由



圖十 終極儀壓頭洩降與位置之關係圖

兩個方程式決定同一係數的值，其結果往往都不一致而造成無所適從的困境。轉換成式(23)的形式後，只須由一個條件（斜率或截距）求未定係數的值，而另一個條件可供其他用途。這樣的轉換除了上述的目的外尚有其他方面的重要性。一是經由比較由斜率所求得的滲透係數與單獨土樣試驗而得的滲透係數之後，吾人發現由這兩種不同的方法所求得的值相當接近，這一點至少可顯示理論分析的觀點是相當恰當的。其次，抽水過程中土層的滲透係數與單獨土樣試驗的滲透係數並不太相同，則上述由直線斜率求滲透係數的方法可用於求正在抽水過程中土層的滲透係數。其實，這兩種方法是非常相似，同樣地都須測定流量與儀壓頭洩降的梯度，唯一不同的就是土樣試驗測定垂直梯度，而上述方法測定水平梯度。

在此後的分析中，滲透係數採用 $K=2.1231248 \times 10^{-3}$ cm/sec。利用所求得的滲透係數，就可由直線截距 $b=3.7605077$ 決定未定係數的大小。由式(23)，吾人得知 $QR^2/4KH_0 \times (A-1) = \exp(3.7605077)(H_0=30\text{m}, Q=370/60/\pi R^2 \text{ cm/sec}, r=3.9569618 \text{ cm}, K=2.1251248 \times 10^{-3} \text{ cm/sec})$ ，故 $A=6.5825538$ 。此值符合未定係數必須大於

1 的條件。

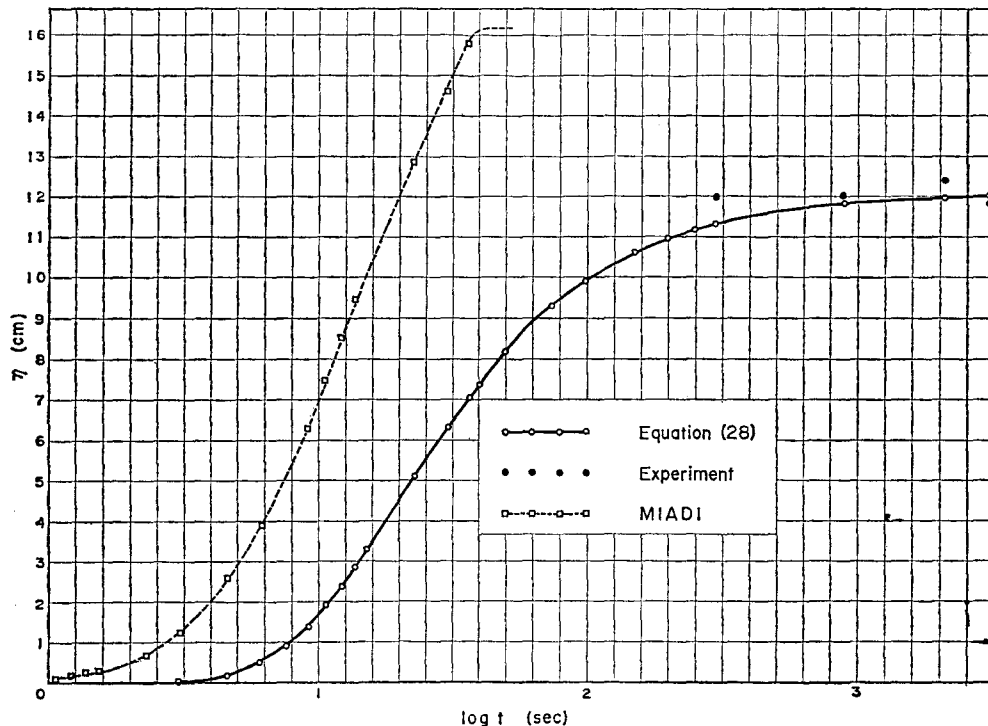
經由上述比較實驗結果與理論分析的推測，吾人得知終極儀壓頭洩降應加一指數型遞減函數，故式(23)變為

$$\eta_{ult} = \exp\left(-\frac{Kr^2}{Q_p}\right) \frac{QR^2}{4KH_0} \times (A-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{R}{r}\right) \quad (27)$$

而式(23)的地層下陷量也對應地改為：

$$\eta = \frac{Qt}{SH_0} \exp\left(-\frac{Kr^2}{Q_p}\right) \exp\left(-\frac{Sr^2}{4Kt}\right) \left\{ \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{4}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{SR^2}{4Kt}\right)\right] - \frac{1}{4} \frac{SR^2}{4Kt} + \left(\frac{A}{4} - \frac{1}{4}\right) \frac{SR^2}{4Kt} \left(\frac{R}{r}\right) \right\} \quad (28)$$

式(28)顯示終極儀壓頭洩降 η_{ult} 與比蓄水量 S 無關，洩降的大小及其梯度完全受制於滲透係數 K 。式(28)的函數型式並不複雜，如果予以無因次化，令 $\psi = \eta_{ult} / [QR^2/4KH_0 \times (A-1)]$ ，則 $\psi \propto \exp[-(r/R)^2][1/2 + 1/4 \times R/r]$ 。其次，由式(28)吾人可發現比蓄水量的主要影響為儀壓頭洩降的速率；式 K/S 的因次為長度的平方除以時間，所以 K/S 正代表擴散係數 (Diffusivity)。式(27)與(28)的函數圖形



圖十一 儀壓頭洩降之歷線圖

將於比較分析解、實驗結果與數值解時詳加討論。

由於時間與儀壓頭洩降都是使用最簡單的方法而非精密的電子儀器測得，時間採用馬錶與一般用的鐘錶，而儀壓頭洩降直接由透明塑膠管內的液面高量得。因此，無法於整個實驗過程中，比較式(28)的分析解與實驗結果。圖十一的實線是根據式(28)繪畫而得，所取的位置 $r = 42.43$ 公分。為了易於顯示實質上的大小概念，圖十一的座標軸直接採用儀壓頭洩降與時間（但時間取對數），不予以無因次化。水平座標軸所展示的範圍大約自抽水起，儀壓頭洩降在一個小時內的變化。在這一段時間內，只有三個實驗讀數（以圓形實心點表示），最早的讀數是五分鐘。從實驗數據及分析解的分佈看來，兩者都同樣顯示只須經過短暫的時間，儀壓頭洩降就已趨近於穩定狀態，即儀壓頭洩降業已非常接近終極儀壓頭洩降 η_{ult} 。在這個位置上的終極儀壓頭洩降為 12.1 公分，如果吾人以百分之九十九做為標準，圖十一的實線顯示大約十五分鐘後，儀壓頭洩降就已經趨近於終極儀壓頭洩降。參閱附錄，吾人也同樣發現，在所有不同位置上的讀數只有在剛抽地下水時有相當明顯的變化，而後就幾乎保持不變了；至於在這一段時間有些讀數呈現小幅度不規則的變動，這是由於抽水機的不穩定，參閱圖六。其次，由於客觀條件的限制，本實驗並沒有（也無法）自一開始抽取地下水，就即刻用電精密電子儀器記錄儀壓頭的連續變化，而是每經過一段時間用肉眼觀測十五根塑膠管內的液面高。

為了進一步瞭解在剛抽取地下水時分析解（式(28)）的準確性，尤其是剛自限制含水層抽取地下水的前幾分鐘，吾人只能訴之於數值解（Numerical solution）。數值解取自周氏的分析，參閱文獻(3)的圖 7.1。周氏使用修正反覆交替方向隱性法（Modified iterative alternating-direction implicit method，簡稱為 MIADI⁽¹¹⁾）解式(19)，其結果展示為函數圖形，圖上的水平與垂直座標軸分別採用無因次化的參數 tK/R^2S 與 $r\pi^2KH_0\eta/Q_pR^2$ ， R 為砂箱的半徑（ $R = 100$ 公分）， $K = 6.111111 \times 10^{-3}$ cm/sec， $S = 9.29 \times 10^{-5}$ 1/cm。此二參數的組合完全基於因次分析，並不是適當的長度尺度，應該採用抽水管的半徑，如式(19)所示。經由換算後，數值解的結果以虛線展於圖十一。就儀壓頭洩降的變化傾向而言，分析解與數值解所推測的大致還相當一致（參閱圖十一的實線與虛線），儀壓頭洩

降隨著時間的增加，首先緩慢地遞增，而後再急劇增快，最後趨近於終極儀壓頭洩降而成穩定情況。數值解顯示大致在三十至四十秒之間就已成穩定狀態，而此時的終極儀壓頭洩降大約等於 16.2 公分。這兩點是分析解與數值解的差異所在，主要的原因是兩者並不是使用相同的滲透係數。分析解採用抽水過程中的滲透係數， $K = 2.1251248 \times 10^{-3}$ cm/sec，而數值解採用抽水前單獨土樣的滲透係數， $K = 6.111111 \times 10^{-3}$ cm/sec。就滲透係數所扮演的角色而言（ K/S 為擴散係數），如果分析解採用較大的滲透係數，自然提早達到穩定狀態；另一方面，數值解以參數 tK/R^2S 代表時間，此參數顯示較小的滲透係數，將使數值解延後達到穩定狀態。其次無論就式(28)或參數 $\pi r^2KH_0\eta/Q_pR^2$ 而言，分析解與數值解都顯示終極儀壓頭洩降與滲透係數成反比。圖十一指出數值解所推測的終極儀壓頭約為分析解的 1.3 倍。如果數值解的滲透係數改為 2.1251248×10^{-3} cm/sec，同時分析解的滲透係數也改為 6.111111×10^{-3} cm/sec，則這些倍數更加擴大，由 1.3 倍提高為 4.2 倍，這時候數值解所推測的終極儀壓頭由 1.2 公分提高為 46 公分，而實際的讀數只有 12.1 公分。

同樣為了易於顯示實質上的大小概念及彼此之間（由不同的方法求得之結果）的差距，圖十二的垂直與水平座標軸分別直接採用儀壓頭洩降與半徑，未予以無因次化。分析解與數值解分別以實線與虛線表示，而實驗結果則以圓形實心點標示於圖上，時間 $t = 37800$ sec，相當於儀壓頭洩降已經達到穩定狀態。除了最遠的兩個讀數外，圖十二顯示式(28)的分析解與實驗結果非常吻合，這是可期待的，因為式(28)的分析解包含一個未定係數 A ，其大小是根據在這個時候的實驗結果求得的（ $A = 6.5825538$ ）。但是由圖十二的吻合事實看來，分析解的函數型式是很恰當的。其次，圖十二的實線也顯示終極儀壓頭洩降的變化情形大致可分為三種不同的型式。靠近抽水管的附近，終極儀壓頭洩降以冪數型式遞減，即 $\eta_{ult} \propto r^{-1}$ ；稍微遠離抽水管幾乎以線性型式遞減，即 $\eta_{ult} \propto r$ ；最後再以指數型式遞減，即 $\eta_{ult} \propto \exp(-r^2)$ 。這些不同的遞減型式之形式完全視式(28)的函數關係式是以 $\exp(-r^2)$ 或 r^{-1} 為主。至於終極儀壓頭洩降是以那一型式為主，這就決定於離抽水管的遠近。然而由於這兩種型式的遞減快慢（或梯度）並不一致，因而才形成在部分範圍內

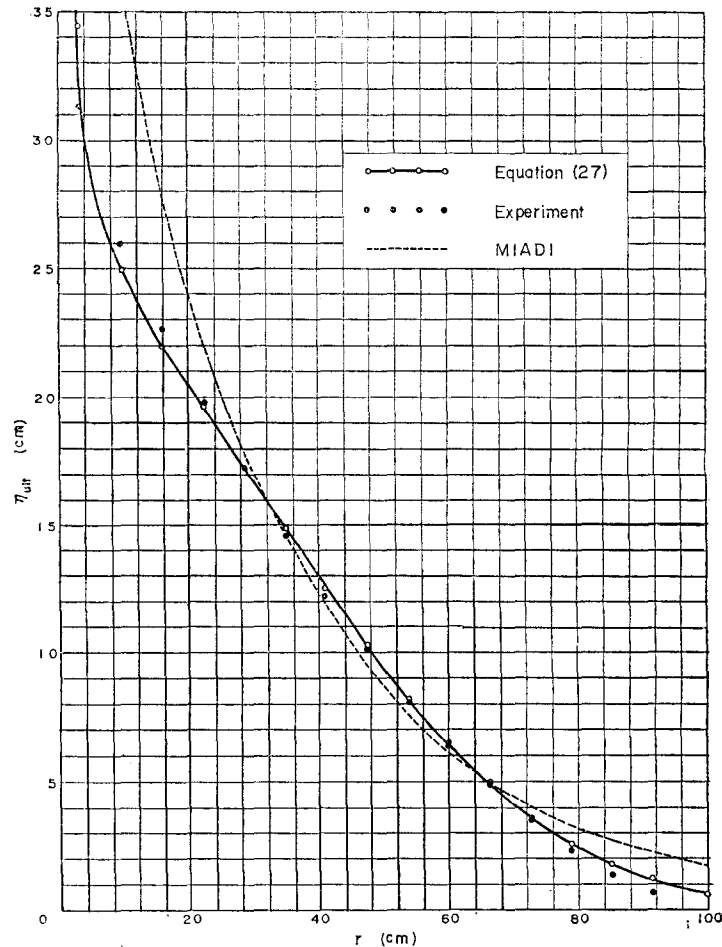
呈現線性型式變化。其次，圖十二的數值解是取自參考文獻(3)的圖 7.2，參閱本章前段數值解的說明。從終極儀壓頭洩降的整個分佈而言，數值解的遞減情形大致與分析解，實驗結果一致。但是以「量」而言，其間的差距相當明顯。數值解使用的滲透係數為 6.1111111×10^{-3} cm/sec，如果減小為 2.1251248×10^{-3} cm/sec，則終極儀壓頭洩降大致會增加三倍，其間的差距更加擴大。

(二) 限制含水層之地層下陷量

限制含水層的厚度為 $H = H(r, t)$ ，而未抽水前的厚度為 H_0 ($H_0 = 30$ cm)，因為地層下陷量 ζ 定義為 $\zeta = H_0 - H$ 。由式(9)，吾人得知 $\zeta = \alpha \Delta P_e H = S \eta H_0$ 。砂箱實驗的限制含水層是由砂所構成的，在未將砂置放於砂箱前，經壓密試驗測得的比蓄水量 S 等於 9.29×10^{-5} /cm。如果比蓄水量採用

9.29×10^{-5} /cm，當 $r = 42.43$ cm 與 $t = 37800$ sec 時，根據式(9)，分析解與實測儀壓頭洩降都推測限制含水層的地層下陷量大約等於 0.33 m/m；然而使用測微計測沉陷棒的下陷量只有 0.03 m/m。這樣大的偏差反映兩方面的困惑。

(1) 首先，以一般常用的水利實驗設備而言，其大小通常都是好幾公尺以上甚至也可高達好幾十公尺，小到 0.03m/m 的尺寸或讀數確實令人懷疑。測微計的最大讀數是 10m/m，最小讀數是 0.01m/m，測微計本身的誤差比較小。但以如此簡陋的原理與設施（沉陷棒）來量測在這樣大的設備之下如此微小的下陷量（只有 0.03m/m），其結果確實無法令人採納與相信。這樣小的讀數都不及一張紙的厚度。總之，無論採用何等精密的儀器，以水利實驗設備與其本身的特徵而言，小於 0.1m/m 的讀數都失去了意義。易言之，以地層下陷的實驗而言，為了



圖十二 終極儀壓頭洩降之剖面圖

要能够使實測的地層下陷讀數足以被採信，砂箱設備必須要顯著地增大，或是抽水量顯著地增加。

(2)另一方面，如果吾人暫且承認砂箱實驗所測得的地層下陷讀數，那麼吾人可發現由儀壓頭洩降所推測的地層下陷量大約為實測的十倍，這是根據初壓時的比蓄水量 ($S=9.29 \times 10^{-5} \text{ l/cm}$)，參閱圖八。然而在解壓時，比蓄水量降為 $0.27 \times 10^{-5} \text{ l/cm}$ 。不同的荷重或壓密程度，土層的比蓄水量竟然會有如此巨大的差距，確實為探討地層下陷的關鍵所在。初壓時的比蓄水量大致是解壓時的三十五倍；因此根據同一實測的儀壓頭洩降，但依據初壓時的比蓄水量與解壓時的比蓄水量，式(2)推測的地層下陷量分別為 0.3 m/m 與 0.0098 m/m ，大致分別為實測的地層下陷量的十倍與三分之一。從這個角度來看，實測的地層下陷量也是相當合理的，問題是自限制含水層的抽水過程中，比蓄水量確實應該等於多少？很明顯地介乎於 $9.29 \times 10^{-5} \text{ l/cm}$ 與 $0.27 \times 10^{-5} \text{ l/cm}$ 之間。如果以實測的儀壓頭洩降與地層下陷量，由式(3)來推估比蓄水量，其值等於 $0.83 \times 10^{-5} \text{ l/cm}$ 。

參閱附錄，當儀壓頭洩降達到穩定狀態時，除了最遠一點 ($r=91.7 \text{ cm}$) 的儀壓頭洩降小於一公分外，其餘各點的讀數都是好幾公分，甚至好幾十公分。所以，終極儀壓頭洩降的實驗結果是相當可採信的。不像實測的地層下陷量只不過幾百分之釐米而已。易言之，地層下陷的理論分析與實驗探討應以儀壓頭洩降為主，然後再經由式(3)計算地層下陷量。由這途徑來研究地層下陷，吾人所面臨的最大困難，就是無法知道在抽水過程中比蓄水量確實等於多少？不過單獨土樣試驗可提供一個相當準確的範圍。

六、結 論

自一限制含水層 (Confined aquifer) 抽取地下水後，層內的儀壓頭洩降 (Piezometric head drop) η 如式(8)所示。如果吾人的分析重點並不在於剛抽取地下水時的短暫變化，而是當時間趨近無窮大時的漸近情況 (Asymptotic state)，利用展開為漸近數列 (Asymptotic sequence) 的技巧，積分式(8)即可求得儀壓頭洩降的漸近解 (Asymptotic solution)，參閱式(2)，式中包含一個未定係數 A 。經過一段相當長的時間後，儀壓頭洩降逐漸趨近於穩定狀態，此時的儀壓頭稱之為終極儀壓頭洩

降 (Ultimatic piezometric head drop) η_{ult} ，適用的方程式也因此由式(2)簡化為式(4)。其次為了使未定係數只視土層的性質與抽水的情況而定，但不受時間 t 與位置 r 的影響，實驗結果顯示除了式(4)的係數須由 $1121/3840$ 改為 $1/4$ 外，同時式(4)必須含蓋另一指數遞減函數，即 $\exp(-Kr^2/Q_p)$ 。配合實驗結果的比較與分析後，完全基於理論解析而得的式(2)與(4)分別修改為式(5)與(6)。實驗數據除了用以求式(5)與(6)的未定係數 A 外，還可用於求抽水過程中的滲透係數 K ，根據終極儀壓頭洩降的實測數據，吾人求得 $K=0.1251248 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$ ，非常接近於單獨土樣試驗的結果 ($K=6.1111111 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$)。一般而言在抽水過程中，土層的滲透係數並不易求得，然式(6)可解決此困難。

由式(6)轉換為線性型關係式後，利用實測終極儀壓頭洩降的數據分析，首先由斜率決定限制含水層的滲透係數而後由截距求得未定係數 $A=6.5825538$ ，再代入分析解 (式(5)與(6))，吾人就可比較由三種不同方法所求得的结果 (分析解、實驗、數值解)。以儀壓頭洩降與終極儀壓頭洩降而言，無論就在同一位置上而不同時間的變化，或是在同一時間而不同位置上的變化，實驗結果與分析解的推測都相當吻合，參閱圖十一與十二。由於理論分析必須同時配合實驗，因此分析解與實驗結果在「量」方面的比較就變為次要了。但是就圖十一與十二的分佈而言，實驗結果與分析解的吻合現象充分顯示，式(5)與(6)的函數型式相當恰當。而此函數型式的建立大部份是由理論解析求得，只有含半徑平方的指數遞減函數是經由數據分析求得的。另一方面，數值解與分析解 (實驗結果) 的吻合情況只限於「傾向」而已，在「量」的比較兩者之間的差異相當明顯；一般而言，數值解的推測都偏高了好幾倍。數值採用由單獨土樣試驗而得的滲透係數 ($K=6.1111111 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$)，如果為了符合實驗的結果，數值解必須採用較大的滲透係數，可是這一增加後，滲透係數可能會超過尋常的範圍。

參閱式(3)，如果比蓄水量 (Specific storage or specific storage) S 可視為常數，則地層下陷量 ζ 與儀壓頭洩降 η 間的關係式為線性型。以 $t=37800 \text{ sec}$ 與 $r=42.43 \text{ cm}$ 的情況而言，根據同一實測的終極儀壓頭洩降 ($\eta_{ult}=12.1 \text{ cm}$)，採用初壓時的比蓄水量 ($S=9.29 \times 10^{-5} \text{ l/cm}$)，由式(3)所得的地層下陷量大約為實測的十倍，如果

採用解壓時的比蓄水量 ($S=0.27 \times 10^{-5}$ 1/cm), 則計算的地層下陷量變為實測的三分之一左右。然而實測的地層下陷量非常非常小, 只有 0.03 m/m。如果吾人姑且承認實測的終極儀壓頭洩降與地層下陷量, 由式(23)吾人得知在抽水過程中的比蓄水量等於 0.83×10^{-5} 1/cm, 這個大小剛好在初壓時比蓄水量與解壓時的範圍內。

以一般常用的水利實驗設備與其本身的特徵而言, 小於 0.1m/m 的讀數是很難被採信的。以此觀點而言, 為了使實測的地層下陷量有明顯的讀數, 實驗設備必須相當龐大而且抽水量也必須足夠大, 但這往往為客觀條件所不容許。然而以本實驗的砂箱模型而言, 其大小也不過一公尺見方而已, 而且抽水量也非常小, 大約為 $Q_p=370/60 \text{ m}^3/\text{sec}$ 。在這種小規模的實驗設備之下, 儀壓頭洩降的讀數却相當明顯, 一般的讀數都在一公分以上甚至好幾十公分 (參閱附錄)。因此, 地層下陷的研究應該以儀壓頭洩降的探討為主, 而後再由式(23)計算地層下陷量。然而循此途徑來探討地層下陷, 吾人所面臨的困難就是無法瞭解在抽水過程中, 比蓄水量確實等於多少? 目前必須仰賴單獨土樣試驗來決定比蓄水量。可是不同的壓密程度, 比蓄水量可能相差三十多倍 (參閱圖八), 由式(23)計算而得的地層下陷量也因此會相差三十多倍。總而言之, 吾人必須首先要能充分地瞭解抽水量對比蓄水量的影響後, 才能引用式(23)來分析地層下陷。在此之前, 初壓時的比蓄水量與解壓時的比蓄水量可提供一相當合理的範圍。

正如前段所述, 實測的地層下陷量固然太小失去意義。然而根據實測的終極儀壓頭洩降與實測的地層下陷量, 由式(23)吾人得知水的比蓄水量為 0.83×10^{-5} 1/cm。這個數值正好在初壓時的比蓄水量與解壓時的範圍內。參閱圖八的應力應變關係曲線, 圖中的比蓄水量是利用實驗結果的數據分析求得的, 可靠性應該相當高。因此, 實測的地層下陷量也是很合理的, 只是太小了難以被採用。

七、致 謝

本研究承淡江大學額外提供經費製造砂箱模型與採購多種量測的儀器, 及水資源研究所邱瑞玲小姐抄寫, 作者在此謹致衷心謝意。

參 考 文 獻

- (1) Bear, J., and M. Yavuz Corapcioglu. "Mathematical Model for Regional Land Subsidence Due to Pumping, 1, Integrated Aquifer Subsidence Equations Based on Vertical Displacement Only" *Water Resour. Res.*, Vol.17, No.4. (1981), pp.937-946.
- (2) Bear, J., and M. Yavuz Corapcioglu. "Mathematical Model for Regional Land Subsidence Due to Pumping, 2, Integrated Aquifer Subsidence Equations for Vortical and Horizontal Displacements" *Water Resour. Res.*, Vol.17, No.4. (1981), pp.947-951.
- (3) 周志芳: 地下水抽取引起地盤下陷之研究 (1984), 淡江大學碩士論文。
- (4) Das, B.M. "Advanced Soil Mechanics" (McGraw-Hill Inc., 1983), pp.54-257.
- (5) Lofgren, B.E. "Analysis of Stress Causing Land Subsidence" *U.S. Geol. Surv. Prof. Pap.* 600-B. (1968), pp. B219-B225.
- (6) James W. Daily and Donald R.F. Harleman. "Fluid Dynamics" (Reading, Mass; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1973). Chap. 1-3.
- (7) Peter S. Eagleson. "Dynamic Hydrology" (New York McGraw-Hill Co., 1970).
- (8) 施清吉: 地盤下陷與超額地下水抽取量間關係分析, 土木水利季刊, 三卷二期, (1976), pp.1-16.
- (9) 施清吉: 地盤下陷之漸近解, 中國農業工程學報, 二十九卷二期, (1983), pp.13-23.
- (10) Ali Hasan Nayfeh. "Introduction to Perturbation Techniques" (1981).
- (11) A. R. Mitchell. "Computational Methods in Partial Differential Equations" (1969), Chap 2.

附 錄

觀 測 時 間		水 位 (儀 壓 頭) (cm)															地層下陷量 (mm)×1/100					
		3.5 (1)	9.8 (2)	16.1 (3)	22.4 (4)	28.7 (5)	35.0 (6)	41.3 (7)	47.6 (8)	53.9 (9)	60.2 (10)	66.5 (11)	72.8 (12)	79.1 (13)	85.4 (14)	91.7 (15)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
*73/3/20																						
11.00	00.00	0.0	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	0	0	0	0	0	
11.05	0.50	413.0	47.5	73.	89.8	87.2	84.6	82	80	78	76	74.5	73	71.5	70.2	69.3	68.6	1.3	1.2	1.2	1	0.6
11.15	0.15	410	97.7	93.3	90.0	87.4	85.0	82.2	80.0	78.0	76.1	74.5	73.0	71.5	70.3	69.3	68.6	1.8	1.7	1.6	1.1	0.8
11.35	0.35	410	98.3	93.7	90.5	87.8	85.2	82.6	80.4	78.5	76.5	75.0	73.5	72.0	70.8	69.8	69.1	2.0	2.1	1.9	1.5	1.0
11.50	0.50	410	97.6	93.1	89.8	87.2	84.6	82.0	79.9	77.9	76.0	74.5	73.0	71.4	70.2	69.2	68.6	2.1	2.2	2.1	1.8	1.1
12.10	1.10	407.5	97.9	93.3	90.0	87.4	84.9	82.1	80.0	78.0	76.0	74.5	73.0	71.4	70.2	69.2	68.6	2.2	2.6	2.2	1.8	1.1
12.40	1.40	402.5	97.5	93.0	89.7	87.0	84.6	82.0	79.8	78.0	76.0	74.4	73.0	71.4	70.2	69.2	68.5	2.2	2.8	2.6	1.9	1.2
13.05	2.05	387.5	96.0	91.3	88.3	85.9	83.5	81.0	79.0	77.2	75.3	74.0	72.6	71.1	70.0	69.1	68.5	2.2	2.6	2.3	1.5	1.1
15.00	4.00	410.0	98.5	93.5	90.2	87.4	84.8	82.1	80.0	78.0	76.0	74.5	73.0	71.4	70.2	69.2	68.5	2.3	2.9	2.3	1.6	1.2
15.45	4.45	397.5	98.7	93.6	90.3	87.5	84.8	82.1	80.0	78.0	76.0	74.5	73.0	71.4	70.2	69.2	68.5	2.3	3.0	2.3	1.5	1.2
16.30	5.30	365.0	97.8	93.0	89.7	86.9	84.5	81.8	79.7	87.9	76.0	74.4	72.9	71.3	70.1	69.2	68.5	2.5	3.0	2.7	1.8	1.3
17.30	6.30	385.0	97.4	92.6	89.4	86.6	74.1	81.6	79.5	77.5	75.6	74.2	72.8	71.3	70.1	69.2	68.5	2.3	2.8	2.3	1.3	1.3
18.30	7.30	393.5	97.2	92.5	89.5	86.7	74.2	81.6	79.6	77.6	75.6	74.3	72.8	71.3	70.1	69.2	68.5	2.3	2.9	2.4	1.5	1.3
19.30	8.30	386.0	97.0	92.0	88.9	86.3	83.9	81.4	79.4	77.6	75.6	74.2	72.7	71.2	70.1	69.2	68.5	2.4	3.0	2.5	1.6	1.3
20.30	9.30	397.5	97.5	92.5	89.6	86.6	74.4	81.7	79.6	77.7	75.9	74.3	72.8	71.3	70.1	69.2	68.5	2.6	3.0	2.5	1.7	1.4
21.30	10.30	403.0	99.3	94.0	90.6	87.7	85.1	82.4	80.1	78.1	76.1	74.5	73.0	71.5	70.2	69.2	68.5	2.5	3.0	2.5	1.8	1.4
*73/3/21																						
8.35	21.35	412.5	97.7	92.5	89.2	86.5	74.1	81.5	79.4	77.8	75.9	74.1	72.7	71.2	70.1	69.2	68.5	2.4	3.0	2.6	1.8	1.7
9.40	22.40	384.5	99.6	94.0	90.6	87.7	85.0	80.2	80.0	78.0	76.0	74.4	72.9	71.2	70.1	69.2	68.5	2.6	3.1	2.7	1.8	1.8
12.00	25.00	396.0	98.8	93.4	89.9	87.1	84.5	81.7	79.6	77.6	75.6	74.2	72.7	71.2	70.1	69.2	68.5	2.7	3.1	2.7	1.9	1.9
14.00	27.00	367.5	90.2	91.0	82.8	85.3	83.0	80.5	78.5	76.9	75.3	73.6	72.2	70.9	69.9	69.1	68.5	2.8	3.2	2.7	1.9	2.1
16.00	29.00	352.5	90.2	91.1	88.0	85.4	83.0	80.5	78.5	76.8	75.1	73.6	72.2	70.9	69.9	69.1	68.5	2.8	3.2	2.7	2.0	2.2
18.00	31.00	350.0	90.0	91.0	87.9	85.5	83.1	80.6	78.5	76.7	75.0	73.3	71.9	70.6	69.7	69.0	68.5	2.8	3.2	2.8	2.2	2.3
*73/3/22																						
7.45	44.45	328.0	93.2	88.6	85.6	83.4	81.1	79.0	77.2	75.6	74.0	72.9	71.7	70.4	69.6	68.9	68.5	3.4	4.0	3.9	3.2	3.2
*73/3/23																						
5.15	66.15	352.2	93.5	90.2	87.0	84.5	82.1	79.7	77.7	76.1	74.3	73.0	71.7	70.4	69.5	68.9	68.4	4.0	5.0	5.1	4.3	4.3
9.10	70.10	356.0	90.7	89.6	86.0	83.6	81.5	79.3	77.4	76.0	74.2	72.8	71.7	70.4	69.6	68.6	68.5	4.1	5.1	5.2	5.1	5.2
12.10	73.10	359.0	92.2	91.5	87.8	85.2	82.6	80.2	77.9	76.4	74.7	73.1	71.8	70.5	69.7	68.6	68.5	5.0	6.0	6.2	6.0	5.9