

# 地層下陷對水面線之影響

## Effect of Land Subsidence on Water Surface Profile

淡江大學水利系教授

施 清 吉

Ching-chi Shih

### 摘 要

以在控制斷面上的已知深度與均勻流深度間之相對偏差為擾動，利用擾動方法尋求地層未下陷前，水面線的漸近展開式。而後，再以地層下陷之最大幅動為擾動，採用上述的漸近展開式為第零階近似解，利用擾動方法續求地層下陷後，水面線的漸近展開式；此式的第一階漸似解顯示，地層下陷促進 Backwater 型水面線的水位加速遞增，而 Drawdown 型水面線的水位加速遞減。

利用擾動方法分析水面線的變化為一正規擾動問題，只能符合在控制斷面上的邊界條件，無法同時符合遠離控制斷面很遠的邊界條件，這是由於水面線方程式為一階微分方程式。

### Abstract

The relative difference between the given depth at the control section and the normal depth can be treated as the perturbation term, in terms of which an asymptotic expansion of water surface profiles before the land subsidence was obtained by utilizing the perturbation method; based the above obtained asymptotic expansion, the same method was used to analyze water surface profiles after the land subsidence with the maximum amount subsidence as the perturbation term. The first approximation of the asymptotic expansion predicts that the land subsidence results in an increase of water level for backwater curve, and an decrease for drawdown curve.

To analyze the water surface profile by making use of the perturbation method is a regular perturbation problem, since the governing equation is of the first order differential equation which can satisfy only one boundary condition at the control section.

### 一、前 言

近幾年來，由於臺灣工商業之突飛猛進，需水量突增，自來水廠又無法充分供應各方面的需求，

於是造成了大量且廣泛地自受制飽和含水層(Confined saturated aquifer)抽取地下水。此外，再加上地面上的建築物如雨後春筍般地興建

，增加含水層之負荷；因此，在全省各地已陸陸續續發現地層下陷 (Land subsidence)。地層下陷對很多方面都有相當大的影響，其中之一，就是對洪水位的影響。如果洪水峯的波形保持不變，同時代表距離的空間座標軸以波速前進，再配合 Kinematic 波的假設，則變量流 (Unsteady flow) 的運動方程式 (Equations of motion) 可簡化為頗類似定流量 (Steady flow) 的水面線方程式 [1]\*。因此，為了避免分析上無法克服的困難，採用定流量水面線為分析的對象。分析的方法是使用擾動 (Perturbation) 之技巧，視地層下陷之幅度為一擾動，將水面線展開為以此擾動為主的漸近展開式 (Asymptotic expansion)，式中包括第零階近似解 (The zeroth order approximation) 與第一階近似解 (The first order approximation)。第零階近似解即為基礎解，是未下陷前的水面線，此線可由水面線方程式積分而得，積分的方法甚多，不過其結果均為數據結果，而不是一個函數的關係式，不適宜引用為基礎解。簡易情況的水面線方程式可積分而得一函數的關係，唯此關係式過於複雜了適宜採用 [2]。基於上述的理由，吾人採用擾動方法尋求未下陷前之水位變化的簡易分析解。如眾所週知，若渠道非常長，水面線終極要趨近於正常深度線 (Normal depth line)；水面線之所以偏離正常深度線，是由於在控制斷面上的已知深度並不等於正常深度。因此，吾人同樣可視此深度的相對偏差為一擾動，將未下陷前的水位展開為以此擾動為主的漸近展開式；以低階近似解所組成的展開式，做為地層下陷後水位的漸近展開式之基礎解。

總而言之，本論文探討地層下陷對水面線的影響，實際上是採用雙重擾動方法，分別視在控制斷面上的深度偏差與地層下陷的幅度為擾動，由此依次循進，以求得現象之分析解 (Analytical solution)。

## 二、理論分析

考慮如圖一所示的河川或渠道橫斷面，定流量 (Steady flow) 之水面線 (Water surface profile) 方程式為

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{S_0 - S_f}{1 - F_r^2} \quad (1)$$

式中  $y'$ ：垂直深度 (vertical depth)，

$x'$ ：縱向流動距離  
(Longitudinal distance)，

$S_0$ ：縱向渠底坡度  
(Longitudinal bottom slope)，

$S_f$ ：能量線坡度 (Energy line slope)，

$Fr$ ：Froude 數。

能量線坡度與 Froude 數分別定義為  $S_f = V'^2 n^2 / (1.486)^2 R'^4$  與  $Fr = V' / \sqrt{gD}$ ，式中  $V'$  為斷面平均速度 (Sectional mean velocity)， $n$  為粗糙度 (Roughness)， $R'$  為水力半徑 (Hydraulic radius)， $D$  為水力深度 (Hydraulic depth)，此深度定義為流動面積 (Flow area)  $A$  除以頂寬 (Top width)  $B$ 。假設寬矩形渠道 (Wide open channel)；同時 Chezy 常數  $C$  又可視為常數，式(1)即可簡化為

$$\frac{dy'}{dx'} = S_0 \frac{1 - \left(\frac{y'_n}{y'}\right)^3}{1 - \left(\frac{y'_c}{y'}\right)^3} \quad (2)$$

式中  $y'_n$ ：均勻流 (Uniform flow) 或正常流 (Normal flow) 深度，俗稱為正常深度 (Normal depth)

$y'_c$ ：臨界深度 (Critical depth)。

如果流動屬於定流量，在河川或渠道內，水的流動終極要趨近於均勻流，或水面線係以正常深度線 (Normal depth line) 為漸近線 (Asymptotic line)。因此，深度尺度 (Depth scale) 須採用均勻流深度，無因次深度 (Dimensional depth)  $y$  即定義為

$$y = \frac{y'}{y'_n} \quad (3)$$

其次，水面線的分析常因流況屬於次臨界流 (Subcritical flow) 或超臨界流 (Supercritical flow) 而有所不同，因為前者的控制斷面在下游而後者却在上游。這兩種不同流況的區分決定於臨界深度與正常深度間的相對比值。所以吾人定義

$$\alpha = \frac{y'_c}{y'_n} \quad (4)$$

參數  $\alpha$  小於 1，等於 1，或大於 1 分別代表次臨界流，臨界流 (Critical flow) 與超臨界流等三種不同的流況。此外，一般所指的緩變流 (Gradually varied flow)，水面線的變化往往須經一段相當長的距離，水位才會有明顯的變化；這一點正是緩變流水面線與局部現象 (Local phenomenon)

兩者分析間的最大差異。因此，流動距離必須予以縮小，採用不同的長度尺度，才能使無因次化的流動距離  $x$  與無因次深度  $y$  為同一大小等級 (Same order of magnitude)。故

$$x = \frac{x' S_0}{y_n'} \quad (5)$$

其實，如果吾人採用正常深度為深度尺度，而無因次深度的定義如式(3)所示，則衡量距離的長度尺度必須採用  $y_n'/S_0$ 。式(5)，才能使無因次化的水面線方程式不再包含坡度。這一點也正說明了緩變流的特徵，其流動是指在長距離內的水位變化。將式(3)，(4)與(5)代入式(2)，則次臨界流與超臨界流的無因次水面線方程式分別變為

$$\text{次臨界流：} (y^3 - \alpha^3) \frac{dy}{dx} = (y^3 - 1), \quad x \leq 0 \quad (6a)$$

$$\text{與 超臨界流：} (\alpha^3 - y^3) \frac{dy}{dx} = (1 - y^3), \quad x \geq 0 \quad (6b)$$

由於參數  $\alpha$  大於 1 或小於 1 分別代表截然不同的流況，同時為了便於說明與分析起見，此後的分析結果，均針對這兩種不同的流況分別敘述。其次，由於次臨界流的控制斷面在下游，此斷面設為距離的起點 (即  $x=0$ )，而後逆乎座標軸  $x$  的方向，向上游逐點分析，所以  $x$  是負的。另一方面，超臨界流適巧相反，控制斷面在上游，座標軸  $x$  的原點也同樣設在此斷面上，分析的方向與座標軸的指向一致，故  $x$  是正的。

如上段所述，如果流動屬於定量流，在河川或渠道內，水的流動最後總要趨近於均勻流。而緩變流的形成是由於在控制斷面上的水位深度不等於均勻流深度，而是等於由人為或自然因素所造成的已知深度  $y'_{cont}$ 。因是，遠離控制斷面，往上游或往下游經一相當長的距離後，水位就會逐漸趨近於均勻流深度。因此，這已知深度與均勻流深度間的相對偏差可視為擾動  $\epsilon$  (Perturbation)，即

$$\epsilon = \frac{y'_{cont}}{y_n'} - 1 \quad (7)$$

藉此擾動，將水位組合成含  $\epsilon$  的漸近展開式 (Asymptotic expansion) (參閱參考文獻 [3] 式(12))，尺度數列 (Scale sequence) 採用擾動的多項式，即  $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2, \dots$ ；漸近展開式係由各不同階的近似解組成。將深度的漸近展開式及其導函式代入式 (6a) 與 (6b)，分別比較等號左、右

兩邊含擾動  $\epsilon$  的同次項，吾人即可求得一組不同大小等級的微分方程式 (大小等級以  $\epsilon$  之冪數表示)，由此，即可積分求得各階近似解。第零階近似解等於 1 (相當於含  $\epsilon^0$  的項)。第一階近似解的微分方程式 (相當於含  $\epsilon^1$  的各項) 是屬於均勻型，邊界條件為在  $x=0$ ，函數值等於 1；此階近似解視流況而言。流況為次臨界流時，解為  $\exp(3x/(1-\alpha^3))$ ，流況為超臨界流時，解為  $\exp(-3x/(\alpha^3-1))$ 。其餘高階近似解的微分方程式均為非均勻型，邊界條件均為在  $x=0$ ，函數值均等於 0。因此，包括第零階與第一階的擾動解就變成

$$\text{次臨界流：} y = 1 + \epsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right), \quad x \leq 0 \quad (8a)$$

$$\text{與 超臨界流：} y = 1 + \epsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right), \quad x \geq 0 \quad (8b)$$

式中  $\alpha$  代表流況 (參閱式(4))，而  $\epsilon$  為已知的擾動，可直接由在控制斷面上的已知深度求得。由式(4)

，吾人得知  $\alpha = \frac{1}{n} (y')^{1/6} / \sqrt{S_0} \sqrt{g}^{2/3}$ ，此式顯示

深度的變化對  $\alpha$  值的影響並不大，大略只相當於深度的六分之一次方。若深度的變化範圍設為自一公尺至一百公尺；其次，再假設粗糙度的可能範圍在 0.012 至 0.040 之間，而渠底坡度假設介於 0.0005 至 0.5 之間。在此可能的變化範圍之下，則  $\alpha$  的最大值與最小值就分別等於 4 與 0.3。參數  $\alpha$  等於 4 時，流況即屬於坡度非常陡而且粗糙度非常小的超臨界流；相反地， $\alpha$  等於 0.3 時，則表示坡度非常緩且粗糙度極小的次臨界流。此外，由式(7)， $\epsilon$  代表已知的擾動，為在控制斷面上，已知深度以均勻流深度無因次化後與 1 之間的差距，也就是代表已知水深與均勻流深度間的相對偏差，此值可正亦可負。為了使尺度數列能急速收斂，使得漸近展開式僅須包含前面少數低階近似解，就可得高精確度的擾動解。在此情況之下，擾動值  $\epsilon$  的絕對值必須非常小，決不能大於 1。圖二為本論文所分析的四種水面線。圖二顯示為了僅須包含前面的低階近似解，擾動解就可相當準確了，除了必須符合擾動值非常小的條件外，尚須受制於參數  $\alpha$  的大小。 $M_2$  型水面線須符合條件： $0 > \epsilon > 1 - \alpha$ ； $S_2$  型水面線則須滿足條件： $\alpha - 1 > \epsilon > 0$ 。另外兩型水面線  $M_1$  與  $S_3$  就不受  $\alpha$  值的影響； $M_1$  型與  $S_3$  型水面線分別只須符合  $1 > \epsilon > 0$  與  $0 > \epsilon > -1$  即可，或擾動  $\epsilon$

的絕對值必須小於 1，否則就失去尋求漸近展開式的意義了。此外， $S_0$  型水面線介於渠底與均勻流深度線之間， $\epsilon$  趨近於 -1 則代表水面線趨近於渠底，式(1)也就變成 0 除以 0 的不定式了。

當坡度沿流動方向保持不變時，水面線的擾動解如式(8a)與(8b)所示，此解的結構相當簡單，而且解的穩定性與規則性均很適當，下一章將詳細分析與探討此擾動解的特性。總之，吾人可以式(8a)與(8b)做為基礎解(Basic solution)，進一步尋求再增加另一代表地層下陷的擾動時，式(1)的漸近展開式。如圖一所示，假設相對於原來未下陷前的渠底，地盤或地層下陷可以指數函數模擬，即

$$\text{次臨界流: } z' = \eta' \exp[-(-x'/L' - 1/2)^2], \quad x \leq 0 \quad (9a)$$

$$\text{與 超臨界流: } z' = \eta' \exp[-(x'/L' - 1/2)^2], \quad x \geq 0 \quad (9b)$$

式中  $z'$ : 相對於原來未下陷時的渠底高程，  
 $\eta'$ : 最大下陷量，  
 $L'$ : 下陷範圍，最大下陷設在  $L'/2$ 。

地盤未下陷前，渠底坡度為  $S_0$ ，而相對於未下陷前的渠底，下陷後的渠底高程如式(9a)或(9b)所示。因此，下陷後渠底坡度  $S_{0Ls}$  即為原來坡度  $S_0$  與  $-\frac{dz'}{dx'}$  之和。故

$$\text{次臨界流: } S_{0Ls} = S_0[1 - \eta(-\beta x - 1) \exp(-(-\beta x - 1)^2)], \quad x \leq 0 \quad (10a)$$

$$\text{與 超臨界流: } S_{0Ls} = S_0[1 + \eta(\beta x - 1) \exp(-(\beta x - 1)^2)], \quad x \geq 0 \quad (10b)$$

式中  $\eta$  代表無因次最大下陷量，定義為

$$n = \frac{\eta'}{L'S_0} \quad (11)$$

而  $\beta$  則為無因次下陷範圍，定義為

$$\beta = \frac{S_0 L'}{2y_n'} \quad (12)$$

以式(10a)與(10b)的坡度分別取代式(2)內的坡度  $S_0$ ，則地層下陷後，次臨界流與超臨界流的水面線方程式分別為

$$\begin{aligned} \text{次臨界流: } (y^3 - \alpha^3) \frac{dy}{dx} &= [1 - \eta(-\beta x - 1) \exp(-(-\beta x - 1)^2)] \times \\ &\quad (y^3 - 1), \quad x \leq 0 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \text{與 超臨界流: } (\alpha^3 - y^3) \frac{dy}{dx} &= [1 + \eta(\beta x - 1) \exp(-(\beta x - 1)^2)] (1 - y^3), \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (13b)$$

類似尋求地層未下陷前，水面線的漸近展開式，吾人改以  $\eta$  為擾動項，以此項的幕數  $\eta^0, \eta^1, \dots$  為尺度數列，同樣地將深度以此擾動項的漸近展開式表示，即

$$y((x; \epsilon); \eta) = y_0(x; \epsilon) + \eta y_1(x; \epsilon) + o(\eta^2) \quad (14)$$

式中“ $o$ ”代表大小等級，即表示漸近展開式(14)所忽略的項中，最大的大小等級為  $\eta^2$ ，未定函數  $y_0$  代表未下陷前的基礎解，而  $y_1$  則為所尋求的第一階近似解。將漸近展開式(14)及其導函式分別代入式(13a)與(13b)，比較等號左、右兩邊擾動項  $\eta$  的同次項，吾人可得到一組不同大小等級的微分方程式(大小等級以  $\eta$  的幕數表示，示於各項的左邊)：

$$\eta^0 \text{ 次臨界流: } (y_0^3 - \alpha^3) \frac{dy_0}{dx} = (y_0^3 - 1), \quad x \leq 0 \quad (15a)$$

$$\eta^0 \text{ 超臨界流: } (\alpha^3 - y_0^3) \frac{dy_0}{dx} = (1 - y_0^3), \quad x \geq 0 \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \eta^1 \text{ 次臨界流: } (y_0^3 - \alpha^3) \frac{dy_1}{dx} + 3y_0 y_1 \times \\ \frac{dy_0}{dx} - 3y_0^2 y_1 = -(-\beta x - 1) \times \\ \exp(-(-\beta x - 1)^2) (y_0^3 - 1), \quad x \leq 0 \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \eta^1 \text{ 超臨界流: } (\alpha^3 - y_0^3) \frac{dy_1}{dx} - 3y_0 y_1 \times \\ \frac{dy_0}{dx} + 3y_0^2 y_1 = (\beta x - 1) \times \\ \exp(-(\beta x - 1)^2) (1 - y_0^3), \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (16b)$$

式(15a,b)，(16a,b)分別為第零階與第一階近似解的微分方程式，其他高階近似解的微分方程式同樣可由比較擾動項  $n$  的高幕數求得。

第零階近似解  $y_0$  的微分方程式(15a,b)是屬於均勻型，此型式與式(6a,b)完全相同。其次，為了便於分析吾人假設控制斷面的渠底高程不受地層下陷的影響。如果此斷面的深度已受地層下陷的影響，這也不礙於上述假設，吾人也同樣必須先設法求得某一斷面的深度。所以，第零階近似解的邊界條件為在  $x=0, y_0=1+\epsilon$ ，受制於此邊界條件

，則第零階近似解即為

$$\text{次臨界流: } y_0 = 1 + \varepsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right), \quad x \leq 0 \quad (17a)$$

$$\text{與 超臨界流: } y_0 = 1 + \varepsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right), \quad x \geq 0 \quad (17b)$$

除第零階近似解的微分方程式外，其他各階的

$$\begin{aligned} \text{次臨界流: } \frac{dy_1}{dx} + \left[ -3 + 3\varepsilon \left( \frac{1+2\alpha^3}{1-\alpha^3} \right) \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) \right] / \left[ 1-\alpha^3 + 3\varepsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) \right] y_1 \\ = \left\{ -3\varepsilon(-\beta x - 1) \exp[-(-\beta x - 1)^2] \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) \right\} / \left[ 1-\alpha^3 + 3\varepsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) \right], \quad x \leq 0 \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \text{超臨界流: } \frac{dy_1}{dx} + \left[ 3 + 3\varepsilon \left( \frac{1+2\alpha^3}{\alpha^3-1} \right) \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right) \right] / \left[ \alpha^3 - 1 - 3\varepsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right) \right] y_1 \\ = \left\{ -3\varepsilon(\beta x - 1) \exp[-(\beta x - 1)^2] \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right) \right\} / \left[ \alpha^3 - 1 - 3\varepsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right) \right], \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (19b)$$

式(19a,b)為一階非均勻微分方程式，受制於邊界條件一式(18)，則此二微分方程式之解分別為

$$y_1(x; \varepsilon) = y_1^{(1)} + y_1^{(2)} + y_1^{(3)} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{或 次臨界流: } y_1(x; \varepsilon) = \frac{6\varepsilon(1-\alpha^3)}{\beta} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4}\right) / (1-\alpha^3 + 3\varepsilon) \frac{4+2\alpha^3}{3} - \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) \exp \right. \\ \left. \left[ -\frac{1}{4}(\beta x + 1)^2 \right] / \left[ 1-\alpha^3 + 3\varepsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) \right] \frac{4+2\alpha^3}{3} \right\} + \frac{6\varepsilon^2(1+2\alpha^3)}{\beta} \times \\ \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4}\right) / (-\alpha^3) \frac{4+2\alpha^3}{3} - \exp\left[ \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{6}{\beta(1-\alpha^3)} \right]^2 - \frac{1}{4} \right] \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) \times \right. \\ \left. \exp\left[ -\left[ \frac{x\beta}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{\beta(1-\alpha^3)} \right]^2 \right] / \left[ 1-\alpha^3 + 3\varepsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) \right] \frac{4+2\alpha^3}{3} \right\} \\ + \frac{36\varepsilon^2(1+2\alpha^3)}{\beta^2(1-\alpha^3)} \left\{ \exp\left[ \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{6}{\beta(1-\alpha^3)} \right]^2 - \frac{1}{4} \right] \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) / \left[ 1-\alpha^3 + 3\varepsilon \exp \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) \right] \frac{4+2\alpha^3}{3} \int \frac{x\beta}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{\beta(1-\alpha^3)} \exp(-r^2) dr \right\} \quad (20a) \\ \left. \frac{1}{2} - \frac{3}{\beta(1-\alpha^3)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{與 超臨界流: } y_1(x; \varepsilon) = \frac{-6\varepsilon(\alpha^3-1)}{\beta} \left\{ -\exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right) \left[ \exp - \frac{1}{4} (x\beta - 1)^2 \right] / \left[ \alpha^3 - 1 - 3\varepsilon \exp \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right) \right] \frac{4+2\alpha^3}{3} - \exp(-1/4) (\alpha^3 - 1 - 3\varepsilon) \frac{4+2\alpha^3}{3} \right\} + \frac{6\varepsilon^2(1+2\alpha^3)}{\beta} \times \\ \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4}\right) / (\alpha^3 - 1 - 3\varepsilon) \frac{4+2\alpha^3}{3} - \exp\left[ \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{6}{\beta(\alpha^3-1)} \right]^2 - \frac{1}{4} \right] \times \exp \right. \\ \left. \left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right) \exp\left[ -\left[ \frac{x\beta}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{\beta(\alpha^3-1)} \right]^2 \right] / \left[ \alpha^3 - 1 - 3\varepsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{4+2\alpha^3}{3} \left\{ -\frac{36\epsilon^2(1+2\alpha^3)}{\beta^2(\alpha^3-1)} \left[ \exp\left\{ \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{6}{\beta(\alpha^3-1)} \right]^2 - \frac{1}{4} \right\} \exp\left( \frac{-3x}{\alpha^3-1} \right) \right] \right. \\ \left. - 3\epsilon \exp\left( \frac{-3x}{\alpha^3-1} \right) \right\} \frac{4+2\alpha^3}{3} \times \int \left[ \frac{x\beta}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{\beta(\alpha^3-1)} \exp(-r^2) \right] \exp(-r^2) dr \quad (20b)$$

式(20a)與(20b)均顯示第一階近似解包括三大項(以大刮弧表示),這三大項的大小第級分別 $+6\epsilon(\alpha^3-1)/\beta$ ,  $6\epsilon^2(1+2\alpha^3)/\beta$ 與 $+36\epsilon^2(1+2\alpha^3)/\beta^2(\alpha^3-1)$ ;若流況為次臨界流時,第一項與第三項的分母含有共同因子 $(1-\alpha^3)$ ,若為超臨界流時,則改為 $(\alpha^3-1)$ 。由於 $\alpha=1$ 的情況不在本論文的分析範圍內,所以這三項的大小等級主要決定於擾動項與代表地層下陷的相對範圍。此外,各項的其餘部份均為距離 $x$ 的函數。這些函數都是指數型,又可分為二類:一類是代表在控制斷面上的擾動對水位的影響,這一類的指數為 $\exp\left(-\frac{3x}{1-\alpha^3}\right)$ ,影響

最大的地方是在控制斷面上,因此影響隨着離控制斷面的距離之增加而急速遞減。其餘的指數函數代表地層下陷的擾動對水位的影響,最大的影響地方就在地層的最大下陷處,同樣地,隨着距離的增加而更急速減小它的影響。第三項尚包含一誤差函數,在控制斷面上此函數的值等於0,距離增加函數值則稍微增加,最後趨近於一極限值 $\sqrt{\pi}/2$ 。式(19a)與(19b)還分別包含 $\left[1-\alpha^3+3\epsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right)\right]$ 與 $\left[\alpha^3-1-3\epsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right)\right]$ 。流況為次臨界流時, $\alpha < 1$ ,若 $\epsilon > 0$ 時,則 $\left[1-\alpha^3+3\epsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right)\right]$ 恆大於0,若 $\epsilon < 0$ 時,例如 $M_2$ 型水面線,由於 $(1-\alpha^3)/3 > (1-\alpha) > -\epsilon$ ,故 $\left[1-\alpha^3+3\epsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right)\right]$ 亦恆大於0。流況為超臨界流時, $\alpha > 1$ ,若 $\epsilon < 0$ 時,則 $\left[\alpha^3-1-3\epsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right)\right]$ 也恆大於0;若 $\epsilon < 0$ 時,例如 $S_2$ 型水面線,由於 $(\alpha^3-1)/3(\alpha-1) > \epsilon$ ,所以 $\left[\alpha^3-1-3\epsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right)\right]$ 也同樣恆大於0。水面線為 $M_2$ 與 $S_2$ 時,擾動 $\epsilon$ 與代表流況的參數 $\alpha$ 並不自為獨立的,而

必須符合上述的不等於條件,圖二因幾何因素說明了這必要性,而式(20a,b)却因冪數的條件。

將式(15a),(20a)與(15b),(20b)分別代入式(14),吾人即可獲得地層下陷時的水面線。

$$\text{次臨界流: } y[(x;\epsilon);\eta] = 1 + \epsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right) + \eta y_1(x;\epsilon) + 0(\eta^2), \quad x \leq 0 \quad (21a)$$

$$\text{超臨界流: } y[(x;\epsilon);\eta] = 1 + \epsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right) + \eta y_1(x;\epsilon) + 0(\eta^2), \quad x \geq 0 \quad (21b)$$

### 三、結果與討論

由圖二,吾人得知水面線的計算必須自控制斷面開始,屬於超臨界流的 $S_2$ 與 $S_3$ 兩型水面線,控制斷面在上游,計算順序由上而下;而 $M_1$ 與 $M_2$ 兩型水面線屬於次臨界流,控制斷面在下游,故由下而上的順序計算。其次, $S_2$ 與 $M_1$ 兩型水面線都在均勻流深度線之上,終端深度採用1.02;而 $M_2$ 與 $S_3$ 兩型水面線都在均勻深度線之下,終端深度採用0.98。計算水面線時,首先將在控制斷面上的已知深度與終端深度分成四十等分,利用(6a,b),求其相鄰兩斷面間的對應距離 $\Delta x$ ,即

$$\Delta x = \int_{y_n}^{y_{n+1}} f(\xi) d\xi \quad (22)$$

式中 $f(\xi) = (\xi^3 - \alpha^3)/(\xi^3 - 1)$ 或 $f(\xi) = (\alpha^3 - \xi^3)/(1 - \xi^3)$ ,而右下註脚“n”與“n+1”分別代表第n與第n+1斷面,利用數值法積分式(22),首先令 $h = (y_{n+1} - y_n)/6$ [4],故

$$\Delta x = \frac{h}{840} \left[ 41f(y_n) + 216f(y_n + h) + 27f(y_n + 2h) + 272f(y_n + 3h) + 27f(y_n + 4h) + 216f(y_n + 5h) + 41f(y_n + 6h) \right] \quad (23)$$

由前章所述， $M_2$  與  $S_2$  兩型水面線，參數  $\alpha$  與擾動值  $\epsilon$  有下列的關係： $|\alpha-1| > |\epsilon|$ 。為了使尺度數列能急速收斂，使漸近展開式只須包含少數低階近似解，擾動解就已相當準確了，擾動值必須小於 1，因此吾人設想，上述的不等式應該改為  $1 > |\alpha-1| > |\epsilon|$  較為適當。這兩型水面線的  $\alpha$  值分別採用： $M_2$  型水面線  $\alpha = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ ；而  $S_2$  型水面線  $\alpha = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9$ 。最小的擾動值  $\epsilon$  取 0.1，而最大值由上述條件來決定；例如  $M_2$  型水面線當  $\alpha = 0.5$  時，最大  $\epsilon$  值應  $0.5-1 = -0.5$ ， $S_2$  型水面線當  $\alpha = 1.8$  時，最大  $\epsilon$  值則  $1.8-1 = 0.8$ 。另外兩型水面線 ( $M_1$  與  $S_3$ ) 的  $\alpha$  值分別取自 0.3 至 0.9, 1.1 至 1.9，而  $\epsilon$  值的範圍取自 0.1 至 0.7 左右。所有計算結果展示於參考文獻 [3] 的表一至表四。

式 (14) 的擾動解包括兩部分：一是地盤未下陷的基礎解  $y_0$ ，詳列於式 (17a, b)，另一是第一階近似解  $y_1$ ，詳列於式 (20a, b)。這兩階的近似解分別討論於下：

#### (一) 基礎解

第零階近似解  $y_0$  (式 (17a, b)) 即為地盤下陷時水面線的基礎解。如果吾人以相對標準偏差，來衡量近似解的精確度。下列的情況可使基礎解 (式 (17a, b)) 的精確度高達百分之九十八，即  $\sigma = 2\%$ 。 $M_2$  型水面線： $\alpha < 0.9, \epsilon < 0.2$ ； $S_2$  型水面線： $\alpha > 1.4, \epsilon < 0.2$  及  $\alpha > 1.8, \epsilon < 0.3$ ； $M_1$  型水面線： $\alpha < 0.7, \epsilon > 0.2$ ； $S_3$  型水面線： $\alpha > 1.3, \epsilon < 0.2$ 。圖三至圖六分別為  $M_2, S_2, M_1$  與  $S_3$  等四種不同型別的水面線之典型代表，圖中的實線與虛線分別為確實水面線 (由式 (6a, b) 積分而得) 與基礎解的推測結果 (式 (17a, b))。這四圖的水面線都是根據四十一個斷面繪畫而成的，相對標準偏差均選擇在百分之二左右；其他偏差在百分之二以下的情況，圖上的實線與虛線將比目前圖上所顯示的更吻合。

參數  $\alpha$  與擾動  $\epsilon$  的值在上段所述的範圍內，基礎解 (式 (17a, b)) 只須包含地層未下陷的第零階與第一階近似解，基礎解就已相當準確了；第零階與第一階近似解分別為 1 與  $\exp(-|3x/(1-\alpha^3)|)$ 。如果擾動值超過上述的範圍，基礎解必須再加入其他未下陷的高階近似解，才能使基礎解的精確度不至於降低。例如， $M_2$  型水面線當  $\alpha = 0.3$  與

$\epsilon = 0.3$  時，如果只包含未下陷的第零階與第一階近似解，基礎解 (式 (17a, b)) 的相對標準偏差將高達 3.51%，加入未下陷的第二階近似解，相對標準偏差就降為 2.07%；再加入未下陷的第三階近似解，相對標準偏差更下降為 0.91%。未下陷的第二階與第三階近似解 (參閱參考文獻 [3] 式 (20) 與 (21))。相對標準偏差代表四十一個斷面的平均偏差，若僅就某一斷面的偏差 (可大於 1，也可小於 1)，最大偏差也顯示相同的傾向，基礎解包含愈高階未下陷時的近似解，精確度就愈高。以上述的同一例子而言，僅包括未下陷的第零階與第一階近似解，基礎解大致有 -7% 至 0% 的最大偏差，加入未下陷的第二階近似解就降為自 -4% 至 1%，再增加未下陷的第三階近似解，最大偏差就縮小為自 -2% 至 1%。這是一般漸近展開式所具有的特性。 $M_2$  與  $S_2$  這兩型水面線確實具有這種特性，擾動值不一定要非常小，只要符合下列條件： $1 > |1-\alpha| > |\epsilon|$ ，像上述的例子， $\epsilon$  值已高至 0.3，吾人可以於基礎解 (17a, b) 加入未下陷的高階近似解，以提高基礎解的精確度，然而另二類型的水面線 ( $M_1$  與  $S_3$ ) 在某些情況下，基礎解就失去這種特性，尤其是  $\alpha$  值接近 1 時，擾動值必須非常小，高至 0.4 以上時，基礎解加入未下陷的高階近似解，非但不能提高精確度，反而使精確度下降。 $M_1$  與  $S_3$  兩型水面線的擾動  $\epsilon$  與參數  $\alpha$  本來是相互獨立的；但是從上述的情形看來，這兩型水面線的擾動  $\epsilon$  與參數  $\alpha$  似乎也應該符合條件： $1 > |1-\alpha| > |\epsilon|$ 。總之，為了提高基礎解的精確度，而額外多加入未下陷的高階近似解，這往往會是基礎解的形式過於複雜，失去易於分析與簡單的優點；尤其是本論文所探討的是以地層未下陷時的水面線做為基礎解，進一步分析地層下陷對水面線的影響。在此情況之下，代表地層未下陷時的水面線之基礎解必須簡單且易於分析；因此，基礎解只適宜於包含未下陷的第零階與第一階近似解，不適宜再包含其他高階近似解。

上一段吾人已針對各種不同的參數  $\alpha$  值與擾動值  $\epsilon$ ，比較由式 (6a, b) 及由基礎解計算而得的兩種水面線，並由此而曉得基礎解的適用範圍。此外，吾人尚可針對式 (6a, b) 與 (17a, b) 的函數結構，予以分析與比較。圖三至圖六的實數代表由式 (6a, b) 計算而得的確實水面線，而虛線則為由基礎解 (式 (17a, b)) 的結果。圖三與圖四

分別為  $M_2$  與  $S_2$  型水面線，此二圖均顯示未下陷的第一階近似解 ( $\exp(-|3x/(1-\alpha^3)|)$ ) 的值偏高，原因如下：水面線為  $M_2$  型時， $\epsilon < 0$ ，所以圖三的實線高於虛線；水面線為  $S_2$  型時， $\epsilon > 0$ ，所以圖四的實線低於虛線。這兩型之水面線坡度都小於零，為一般常稱的 Drawdown 型水面線。另一方面，當水面線為  $M_1$  與  $S_3$  時，則未下陷的第一階近似解的值却呈相反的傾向，不是偏高而是偏低。因此，水面線為  $M_1$  型時， $\epsilon > 0$ ，故圖五的實線高於虛線；水面線為  $S_3$  型時， $\epsilon < 0$ ，故圖六的實線低於虛線。這兩型的水面線坡度都大於零，是屬於 Backwater 型水面線。以本論文所探討的四型水面線而言，基礎解(式(17a, b))所推測的水面線都是非常穩定貼近由式(6a, b)計算而得的水面線，沒有時而高與時而低的相互交錯現象；至於虛線是高於或低於實線，那就視水面線的類型而定。計算結果顯示，如果基礎解包含高於第二階以上的近似解，繪於圖上代表兩種不同方法求得的水面線，會呈現相互交錯的現象。

基礎解所推測的水面線坡度可由式(17a, b)微分求得，其結果  $\frac{dy}{dx} = \frac{3\epsilon}{1-\alpha^3} \exp\left(\frac{3x}{1+\alpha^3}\right)$  或  $\frac{dy}{dx} = \frac{-3\epsilon}{\alpha^3-1} \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right)$ 。指數部分恆大於 0，所以水面線斜率是否大於 0 或小於 0 完全決定於  $\epsilon$  與  $\alpha$  等兩值的大小。以 Drawdown 型水面線而言，水面線為  $M_2$  型時， $\epsilon < 0$ ， $\alpha > 1$ ，所以  $3\epsilon/(1-\alpha^3) < 0$ ；水面線為  $S_2$  型時， $\epsilon > 0$ ， $\alpha > 1$ ，所以  $-3\epsilon/(\alpha^3-1) < 0$ 。因此，這兩型的水面線坡度都小於 0。相反地，另一 Backwater 型水面線，吾人同樣可證明  $M_1$  與  $S_3$  型的水面線坡度大於 0。這說明了基礎解所推測的水面線坡度符合該型的條件。

圖三的  $M_2$  型水面線，控制斷面在下游，水面線坡度又小於 0，虛線在實線之下，所以在控制斷面上，虛線的水面線坡度大於實線，令此差為  $\Delta(dy/dx)$ ，即  $\Delta(dy/dx) > 0$ 。其次，另一 Drawdown 型的水面線，如圖四所示的  $S_2$  型水面線，控制斷面在上游，虛線在實線之上，故  $\Delta(dy/dx) > 0$ 。上述兩型的水面線坡度都小於 0，另水面線坡度大於 0 的兩型水面線 ( $M_1$  與  $S_3$ )，也顯示相同的結果。總而言之，在控制斷面上，基礎解所推測的水面線坡度較大。其實上述的傾向可由這兩種水面線的微分方程式求得。如果流況是屬於

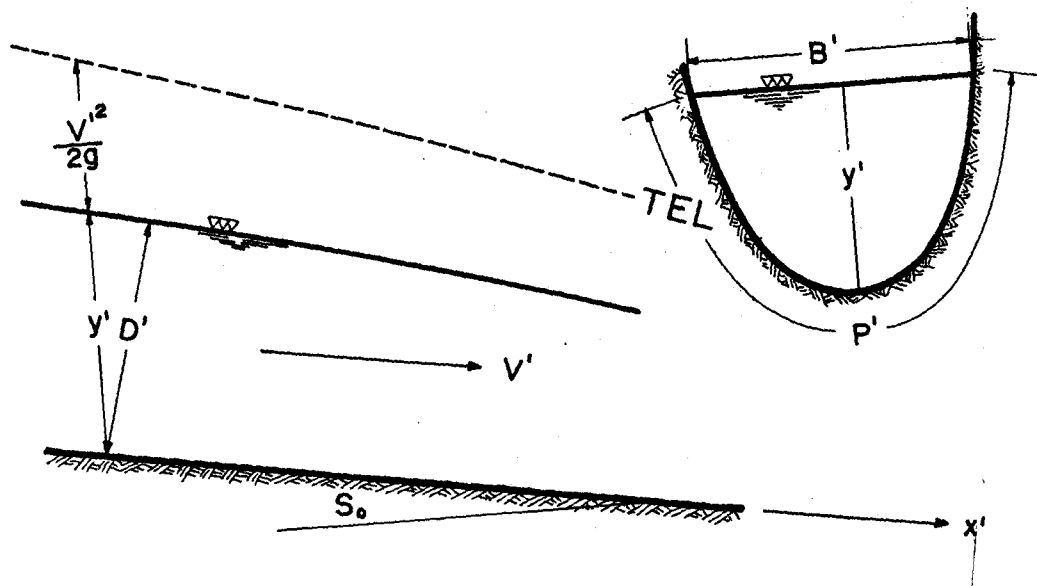
次臨界流，由式(17a)與(6a)，吾人即可得虛線與實線之斜率差， $\Delta(dy/dx) = [\epsilon^3(6+3\alpha^3) + \epsilon^3(8+\alpha^3) + 3\epsilon^4] / [(1-\alpha^3)(1+\epsilon^3-\alpha^3)]$  水面線為  $M_1$  型時， $\alpha < 1$  與  $\epsilon > 0$ ，所以  $\Delta(dy/dx) > 0$ ；若水面線為  $M_2$  型時， $\alpha < 1$ ，但  $0 > \epsilon > \alpha - 1$ ，即  $1 + \epsilon > \alpha > 0$ ，所以  $(1-\alpha^3)(1+\epsilon^3-\alpha^3) > 0$ ；再者，由於  $|\epsilon| < 1$ ，故中刮弧內的值也大於 0，最後則  $\Delta(dy/dx) > 0$ 。相反地，如果流況是屬於超臨界流，類似上述的分析，吾人同樣可證明  $\Delta(dy/dx) > 0$ 。

比較圖三至圖六的實線與虛線，吾人很明顯地可發現一個共同的現象，這就是基礎解(式(17a, b))所推測的水面線與由式(6a, b)求得的，在控制斷面的附近兩者的偏差較明顯，遠離控制斷面就愈來愈吻合。為了改善式(17a, b)在控制斷面附近的偏差，作者曾嘗試類似 Singular perturbation 的技巧，分區尋求不同尺度之下的漸近展開式(5)。如果遠離控制斷面與靠近控制斷面的範圍分別稱為外區與內區。外區的尺度採用式(3)與(5)。內區的深度尺度保持不變，但距離尺度未定。在這種情形下，除了水面線方程外，吾人還得須要一個額外的條件或方程式以求未定的距離尺度，因此作者只好試二種簡單的距離尺度：一是放大距離尺度，即  $x = x'/(y_n'/S_0\epsilon)$ ；二是縮小距離尺度，即  $x = x'/(y_n'/S_0\epsilon)$ 。這兩種距離尺度所得到的結果都相同，外區的各階近似解如式(17a, b)所示，但是內區的各階近似解却恒等於 0，其原因如下。分區尋求漸近展開式只能適用於二階或二階以上的微分方程式。以二階的微分方程式而言，外區的二階微分方程式往往比原來的二階少一階，只能符合一個邊界條件，而內區的二階微分方程式仍然為二階，以符合原來的另一邊界條件及內、外之配合條件。而目前的水面線方程只有一階，所以內區的各階近似解恒等於 0 是理所當然的。其他擾動法常用的方法，例如 Lindstedt-Poincare 技巧與 Multiple scales，也都嘗試過，所碰到的困難都與上述的相同[6]。

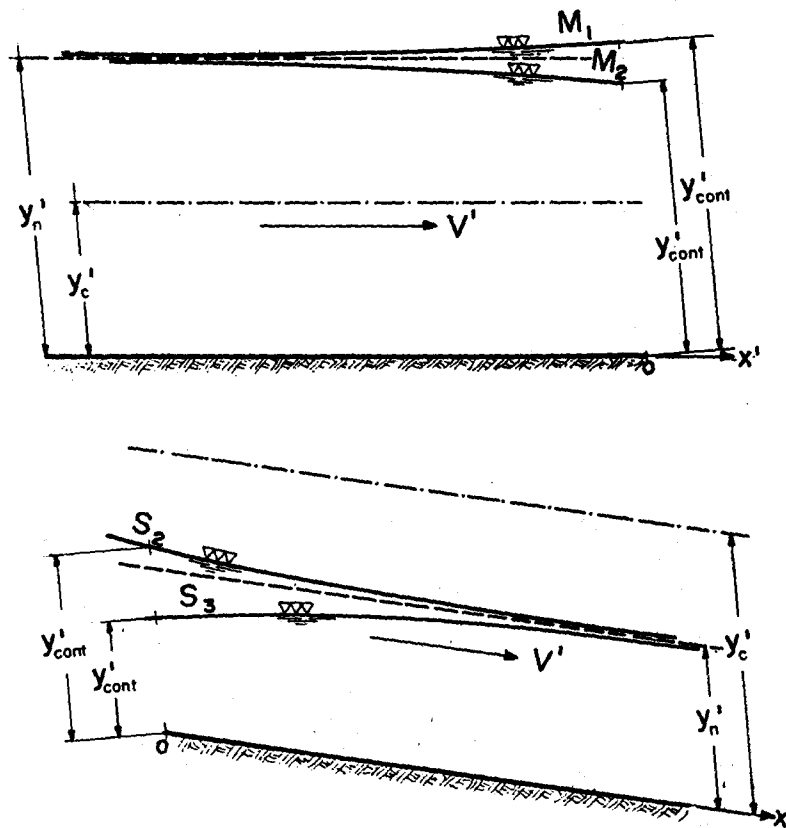
#### (二) 第一階近似解

如式(9a, b)所示的地層下陷，水面線的擾動解展示於式(21a, b)，式中  $y_1(x; \epsilon)$  為第一階近似解。參閱式(20a, b)，第一階近似解包括三項，即  $y_1(x; \epsilon) = y_1^{(1)} + y_1^{(2)} + y_1^{(3)}$ ，每一項又可分為兩部分：一是在大刮弧的函數，代表沿流動方向的變化；二是左邊的係數，代表各項的大小

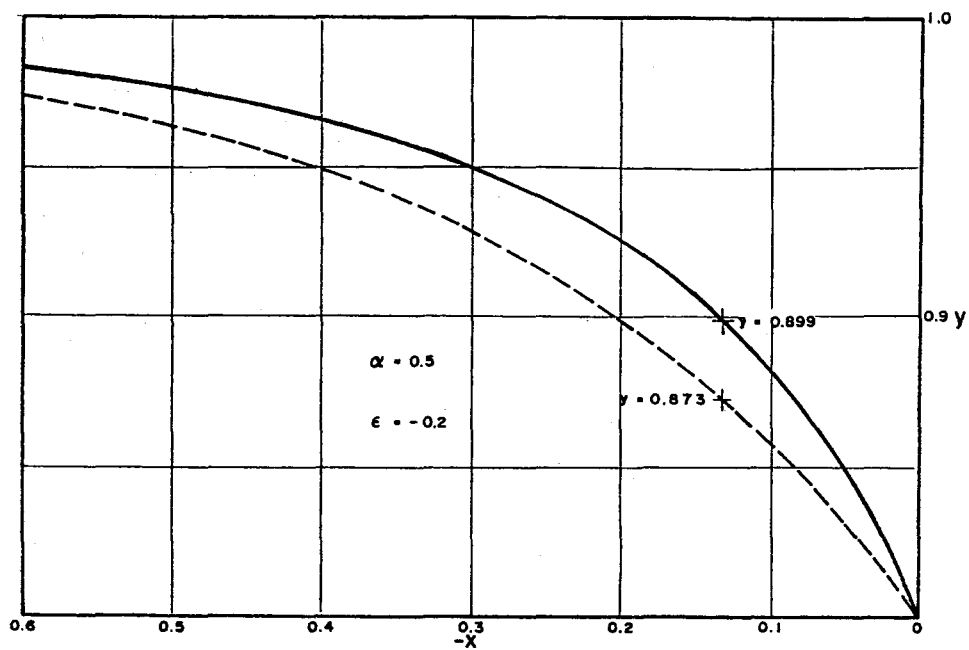




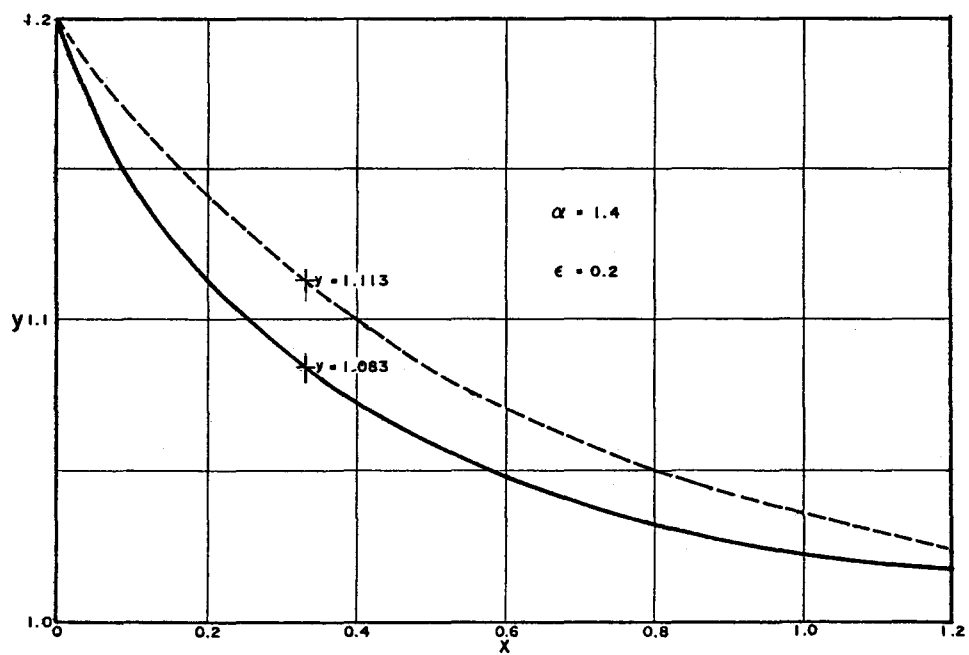
圖一 渠道示意圖



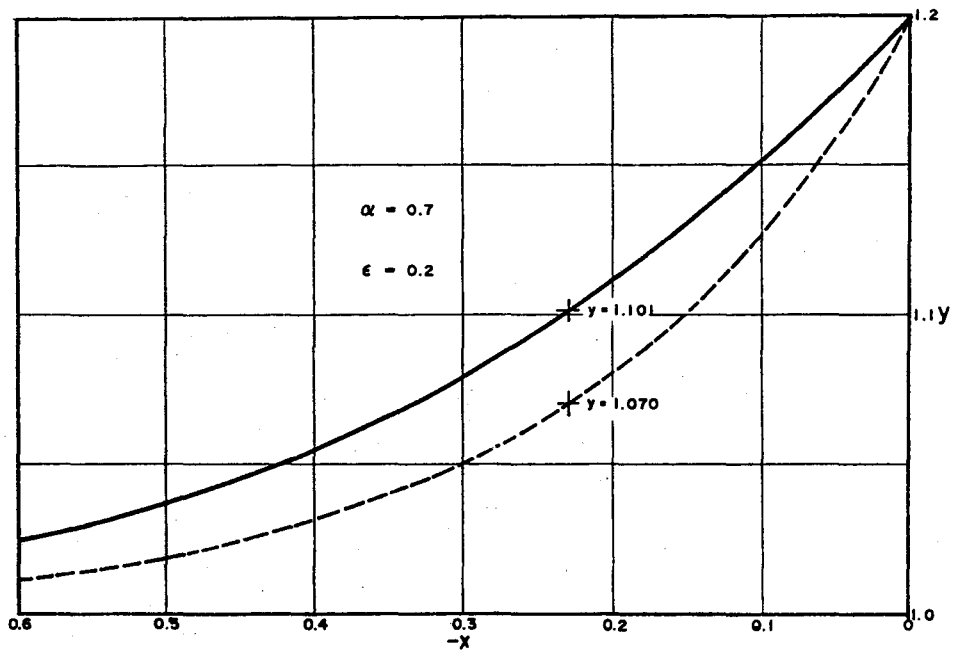
圖二 水面線之形成



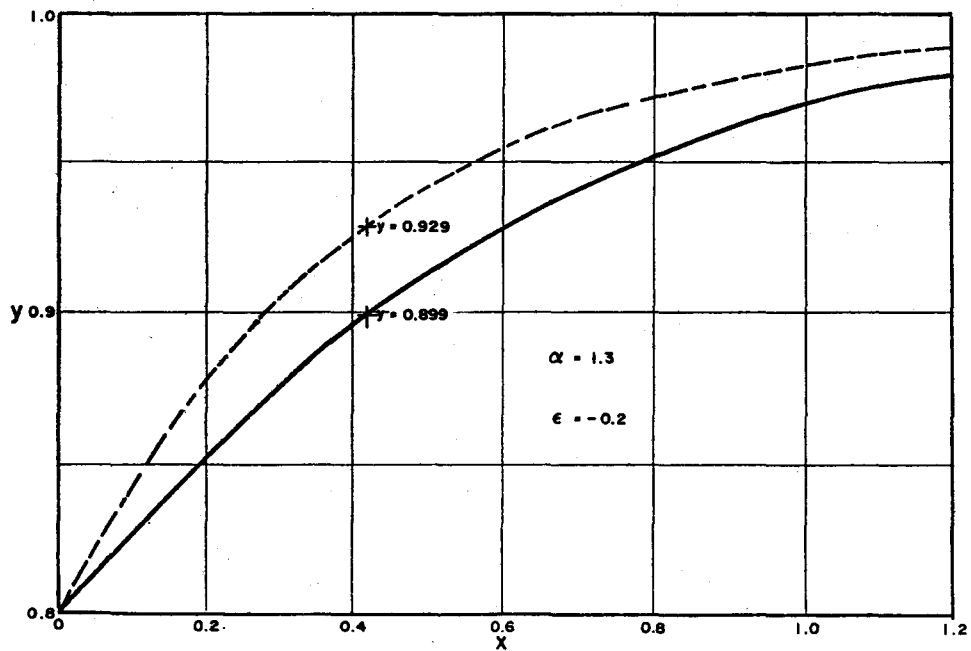
圖三 M<sub>2</sub> 型水面線



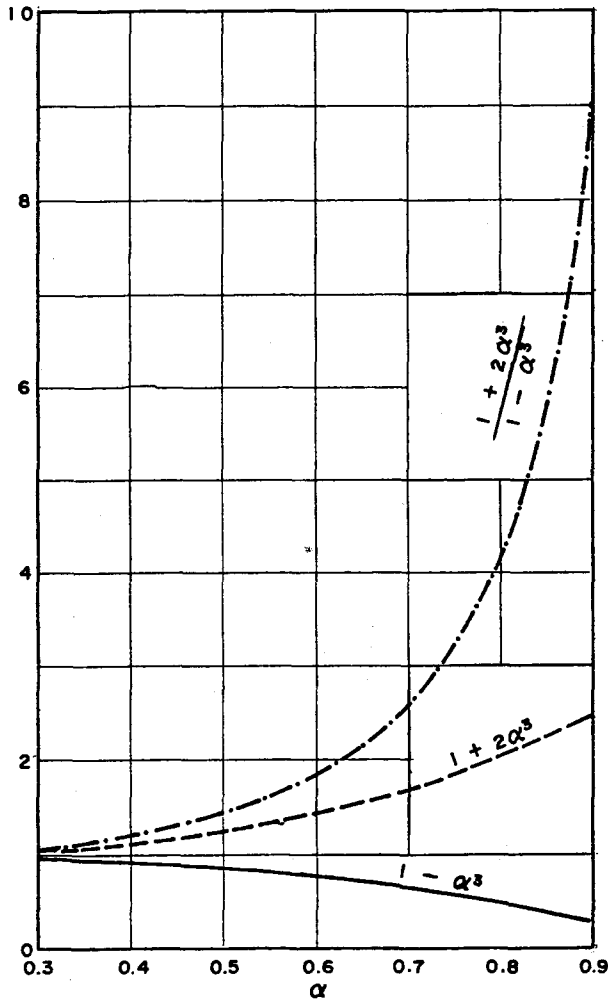
圖四 S<sub>2</sub> 型水面線



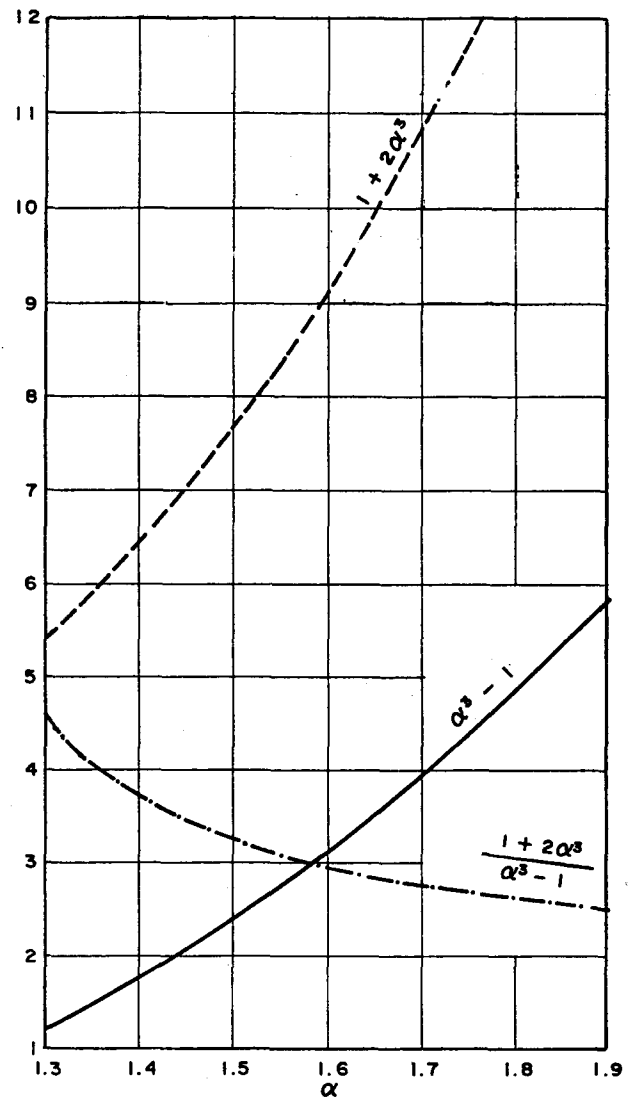
圖五  $M_1$  型水面線



圖六  $S_3$  型水面線



圖七 次臨界流參數  $\alpha$  之變化



圖八 超臨界流參數  $\alpha$  之變化

等級。由於牽涉的因素太多，第一階近似解的關係式顯得相當複雜而過於冗長，但是函數的型式却相當單純，因此在以下的分析與討論中；吾人首先分析各項的大小等級與其內的函數結構，而後再探討第一階近似解 $y_1$ 。

三項的大小等級視擾動 $\epsilon$ ，參數 $\alpha$ 與 $\beta$ 等值而定， $\alpha$ 與 $\beta$ 分別代表流況與地層的下陷範圍，各自定義為 $\alpha=y_c'/y_n'$ 與 $\beta=S_oL'/2y_n'$ 。這三項的大小等級分別為 $6\epsilon|1-\alpha^3|/\beta$ ， $6\epsilon^2(1+2\alpha^3)/\beta$ 與 $36\epsilon^2(1+2\alpha^3)/\beta^2|1-\alpha^3|$ ，次臨界流與超臨界流分別採用 $1-\alpha^3$ 與 $\alpha^3-1$ 。呈現於上述三個大小等級中的因子， $\epsilon$ 與 $\beta$ 的影響相當簡單與明顯，都是以冪數的形式出現於等級中，參數 $\alpha$ 的影響展示於圖七與圖八。當 $\alpha$ 的值趨近於0時， $(1-\alpha^3)$ ， $(1+2\alpha^3)$ 與 $(1+2\alpha^3)/(1-\alpha^3)$ 都趨近於1；若參數 $\alpha$ 的值漸次增加，則其間的差距也逐漸明顯，但 $\alpha$ 的值趨近於1時， $(1-\alpha^3)$ ， $(1+2\alpha^3)$ 與 $(1+2\alpha^3)/(1-\alpha^3)$ 分別趨近0，3與無窮大。易言之，在 $\alpha=1$ 的附近， $(1+2\alpha^3)/(1-\alpha^3)$ 或 $(1+2\alpha^3)/(\alpha^3-1)$ 都趨近於無窮大。其次， $\alpha$ 的值再由1漸次增大，則 $(1+2\alpha^3)/(\alpha^3-1)$ 就趨近於2，在本論文的分析中，流況為次臨界流與超臨界流時， $\alpha$ 的值分別介於0.3至0.9與1.3至1.9之間， $\alpha$ 等於1的情況不在討論的範圍內。當 $\alpha=0.9$ 時， $1-\alpha^3=0.271$ ， $1+2\alpha^3=2.458$ ， $(1+2\alpha^3)/(1-\alpha^3)=9.070$ ， $(1+2\alpha^3)/(1-\alpha^3)=33.47$ ；另一極端是 $\alpha=0.3$ 時 $(1+2\alpha^3)/(1-\alpha^3)=1.08$ 與 $\alpha=1.9$ 時 $(1+2\alpha^3)/(\alpha^3-1)=0.42$ 。總而言之，相對於 $|1-\alpha^3|$ ， $(1+2\alpha^3)/|1-\alpha^3|$ 介於1.08與9.07之間，而 $(1+2\alpha^3)/(1-\alpha^3)^3$ 則介於0.42與33.47之間。除了參數 $\alpha$ 影響各項之大小等級外，大小等級還決定於擾動 $\epsilon$ 與代表地層下陷的範圍 $\beta$ 。

相對於第一項的大小等級 $\frac{6\epsilon|1-\alpha^3|}{\beta}$ ，第二項的大小等級就等於 $\frac{\epsilon(1+2\alpha^3)}{|1-\alpha^3|}$ ，除非參數 $\alpha$ 的值趨近於1，第二項的取捨就完全決定於 $\epsilon$ 。由於本論文係探討擾動 $\epsilon$ 非常小時的漸近解，因此就式(20a, b)的形式看來，第二項的重要性就遠不如第一項。然而，如果擾動 $\epsilon$ 的值不是非常小的情況；例如 $\epsilon=0.1$ ，此時第二項的重要性尚決定於參數 $\alpha$ 的大小，以 $\alpha=0.5$ 或15為例，第二項的

值大致為第一項的百分之二十左右。因此，如果 $\epsilon=0(10^{-1})$ ，則第二項有予以考慮的必要；但若 $\epsilon$ 小於 $0(10^{-3})$ ，則第二項是可略而不計。另一方面，同樣相對於第一項的大小等級，第三項的大小等級就變為 $\frac{6\epsilon(1+2\alpha^3)}{\beta|1-\alpha^3|^3}$ ，這個比值的大小還決定於參數 $\beta$ 的值。參數 $\beta$ 代表地層下陷的範圍，根據坡度與均勻流深度的可能範圍，吾人可由式(12)推估其大小。如果 $S_o=0(10^{-3})$ ，下陷的相對範圍 $\frac{L'}{y'}$ 設為 $0(10^3)$ ，則 $\beta=0(10^6)$ 。以 $\beta=3$ 與 $\epsilon=0.1$ 為例，相對於第一項的大小等級，第二與第三項的大小等級之比值分別為

$\alpha$	$\frac{\epsilon(1+2\alpha^3)}{1-\alpha^3}$	$\frac{\epsilon(1+2\alpha^3)}{\alpha^3-1}$	$\frac{6\epsilon(1+2\alpha^3)}{\beta(1-\alpha^3)^3}$
0.3	0.1083		0.2227
0.5*	0.1429		0.3265
0.7	0.2566		0.7812
0.9	0.9070		0.6940
1.3		0.4506	0.7529
1.5*		0.3263	0.2748
1.7		0.2767	0.1414
1.9		0.2512	0.0858

\* 參閱圖九至圖十二

相反地，若參數 $\beta$ 的值小於 $0(10^6)$ ，表面上看來，第三項的大小等級將相當於第一項的大小等級，甚至比第一項的大小等級還大。實際上，以整個項而言，包括代表大小等級的係數與其後的函數（示於大刮弧內），第三項的值還是比第一項小得多，原因詳述於下一段。

參閱式(20a, b)的第三項，吾人得知大刮弧內的誤差函數(Error function)受制於距離 $x$ ，參數 $\alpha$ 與 $\beta$ 。流況為次臨界流或超臨界流時，積分之上、下限分別由 $\frac{1}{2}-\frac{3}{\beta(1-\alpha^3)}$ 至 $\frac{x\beta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{\beta(1-\alpha^3)}$ 或由 $-\frac{1}{2}+\frac{3}{\beta(\alpha^3-1)}$ 至 $\frac{x\beta}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{\beta(\alpha^3-1)}$ 。誤差函數之計算採用下列的近似式

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= \frac{1}{[1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6]^{10}} \quad (24)$$

式中  $a_1=0.0705230784$   
 $a_2=0.0422820123$   
 $a_3=0.0092705272$   
 $a_4=0.0001520143$   
 $a_5=0.0002765672$   
 $a_6=0.0000430638$

$E(X)$ 的誤差小於0.0000003。在控制斷面上 $x=0$ ，上、下限相同，故誤差函數等於零。由於參數 $\beta$ 同時出現於上、下限的分母，如果 $\beta$ 值太小， $x$ 值又不是非常大，則上、下限也幾乎相同，誤差函數就非常小了。遠離控制斷面後，上、下限的差值逐漸擴大，所以誤差函數的絕對值也就逐漸增加。為了使誤差函數的絕對值不致於太小，或以大於 $10^{-14}$ 為例，參數 $\beta$ 的值不能太小，同時也要遠離控制斷面。採用不同的距離 $x$ ，參數 $\alpha$ 自0.3至0.9, 1.3至1.9，誤差函數開始呈現大於 $10^{-14}$ 時，參數 $\beta$ 的大概臨界值列於表一。表一顯示流況接近臨界流時，參數 $\beta$ 的臨界值較大。此外，第三項 $y_1^{(3)}$ 的大刮弧除了含一誤差函數外，尚包含代表距離因素的指數函數 $\exp\left(-\left|\frac{3x}{1-\alpha^3}\right|\right)$ 與指數型的常數 $\exp\left[\frac{1}{4}\left[1-\left|\frac{6}{\beta(1-\alpha^3)}\right|\right]^2-\frac{1}{4}\right]$ ；前者以 $x=0$ 時為最大，而後隨着距離的增加而急速遞減，但後者的常數視參數 $\alpha$ 與 $\beta$ 的值而定， $\beta$ 值愈小則此指數常數的愈大。因此，對參數 $\beta$ 而言，誤差函數與指數型常數的反應適巧相反。總而言之，大刮弧的絕對值以在 $x=0$ 時為最小，而後稍微增加，其最大值在控制斷面的附近，最後遠離控制斷面後就急速遞減。最大值的確實位置可由 $y_1^{(3)}$ 對 $x$ 的微分求得，但其結果為一相當複雜的方程式，須由試差法求得。如果採用表一所述的距離之十分之一，參數 $\beta$ 分別採用表一所述的範圍之上、下限，則大刮弧的值 $\{y_1^{(3)}\}$ 列於表二。同一 $\alpha$ 值，表二的 $\beta$ 值有1.5倍的變化，但是大刮弧的值却有非常懸殊的差異。由此，吾人即可發現 $y_1^{(3)}$ 深受參數 $\beta$ 的影響，只要 $\beta$ 的值小於表一所述的臨界值，式(20a, b)的第三項 $y_1^{(3)}$ 可略而不計；因此，第一階近似解 $y_1(x; \epsilon)$ 只須包含第一項與第二項即可，即 $y_1(x; \epsilon) = y_1^{(1)} + y_1^{(2)}$ 。

除了代表大小等級的係數外，第一階近似解的其餘部分就是代表沿流動方向 $x$ 的變化，為了清楚起見，這一類的函數都示於式(20a, b)的大刮弧

內。第三項的函數結構已於上段討論過了。第一項與第二項純由指數函數組成，在控制斷面上，這兩項的值均等於零，以符合邊界條件(參閱式(18))。

因此，第一項與第二項都包括兩項：其中一項是指數型的常數係數 $\exp(-1/4)\sqrt{|1-\alpha^3|+3\epsilon\times$

$\exp\left(-\left|\frac{3x}{1-\alpha^3}\right|\right)$ ；另一項是指數遞減函數，

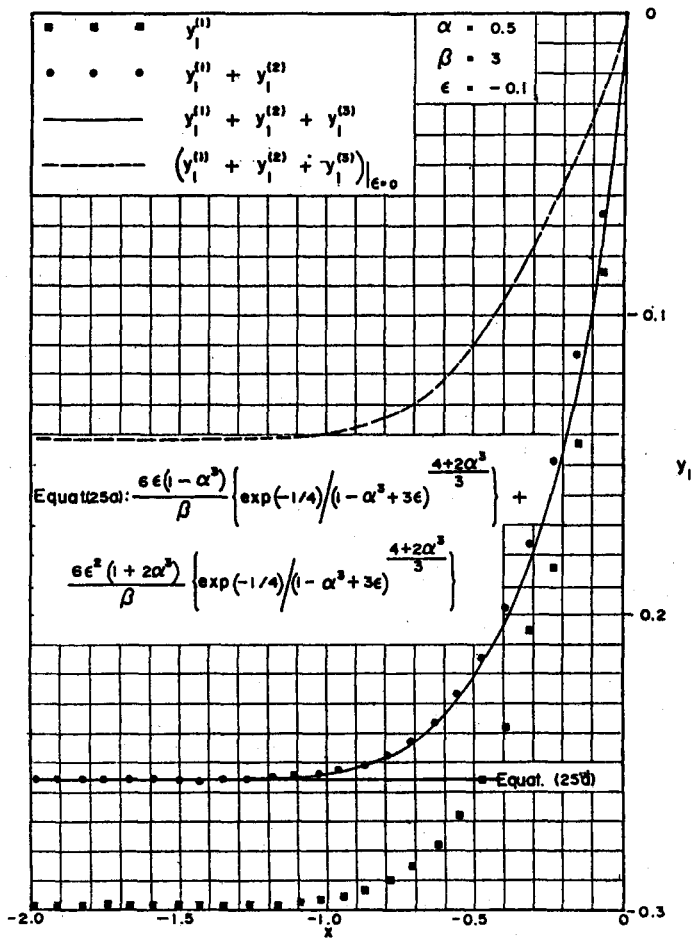
視 $x$ 而定。如果 $\epsilon$ 的值非常小，而且又遠離控制斷面，上述的常數係數就趨近於 $\exp(-1/4)/|1-\alpha^3|$ 。其次，這二項的指數遞減函數並不同於地層未下陷時的指數遞減函數，未下陷時的指數遞減函數

是 $\exp\left(-\left|\frac{3x}{1-\alpha^3}\right|\right)$ ；而地層下陷後，除了這個

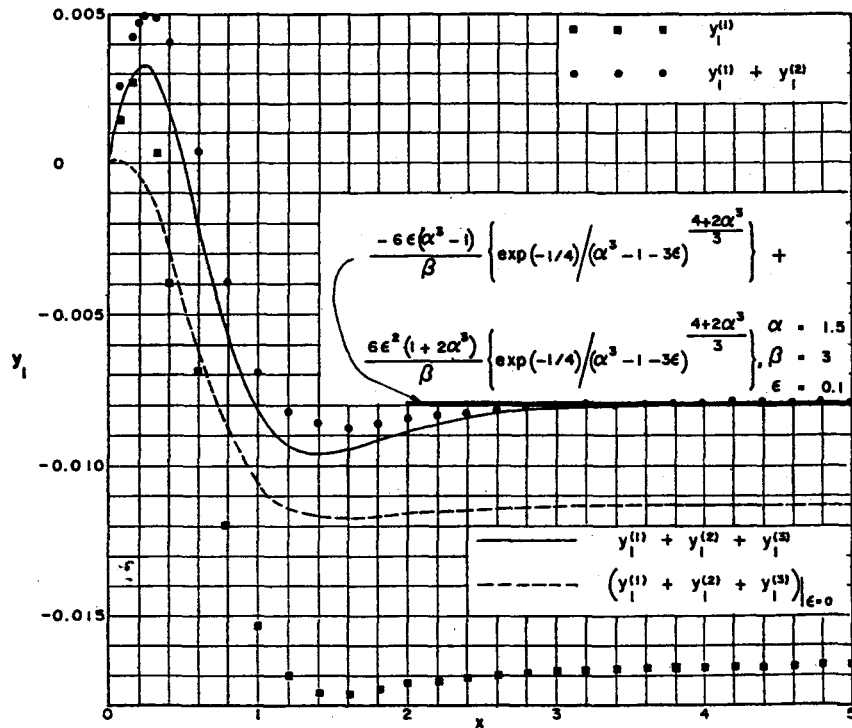
指數遞減函數外，尚須乘一類似 $\exp(-x^2)$ 型式的指數遞減函數。指數遞減函數的遞減率非常快，地層未下陷時，係以 $\exp(-|x|)$ 的速率遞減，而地層下陷後却增為以 $\exp(-x^2)$ 的速率遞減。

圖九至圖十二分別為 $M_2$ ,  $S_2$ ,  $M_1$ 與 $S_3$ 型水面線時的第一階近似解，圖中的實線代表式(20a, b)三項之和，即 $y_1^{(1)}+y_1^{(2)}+y_1^{(3)}$ ，圖上同時展示只包含第一項及第一、第二兩項之和的第一階近似解，即 $y_1^{(1)}$ 與 $y_1^{(1)}+y_1^{(2)}$ ，這兩種情況分別以實心圓點與方塊表示。比較實心點與實線，吾人即可發現第一階近似解只須包含第一與第二項，即已相當可靠了，無須再包含第三項，因為第三項太小了，可略而不計，這一點正如上段所述。但是如只包含第一項，則與實際上的結果有相當大的出入。這四圖均一致顯示，實心方塊與實線間的偏差太大。易言之，雖然第一階近似解以第一項為主，但是第二項仍然具有相當大的份量，除非擾動之值非常非常小。圖九至圖十二的擾動等於 $\pm 0.1$ 。

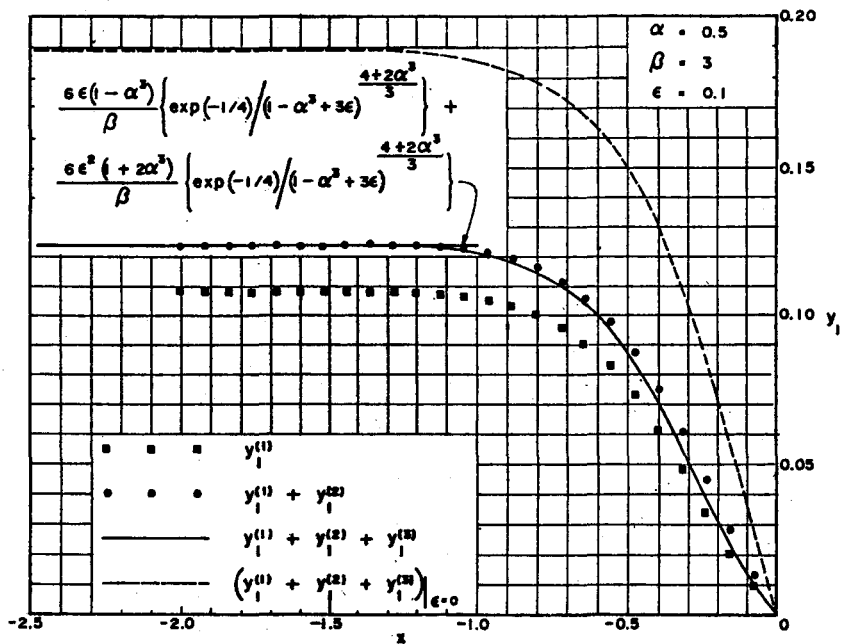
比較圖九，十，十一與十二的實心圓點與實線，吾人可發現只包含第一項與第二項的第一階近似解與三項均考慮的近似解相當吻合，這種吻合情況幾乎可含蓋整個縱剖面，只有在控制斷面的附近稍微有一點偏差，其原因是由於所省略的第三項，在控制斷面的附近為最大。實心圓點與實線間的偏差即表示式(20a, b)第三項的變化。遠離控制斷面，式(20a, b)的第三項趨近於零，所以第一階近似解完全以第一與第二項為主了；在此情形之下，離開控制斷面無窮遠的近似解就簡化為



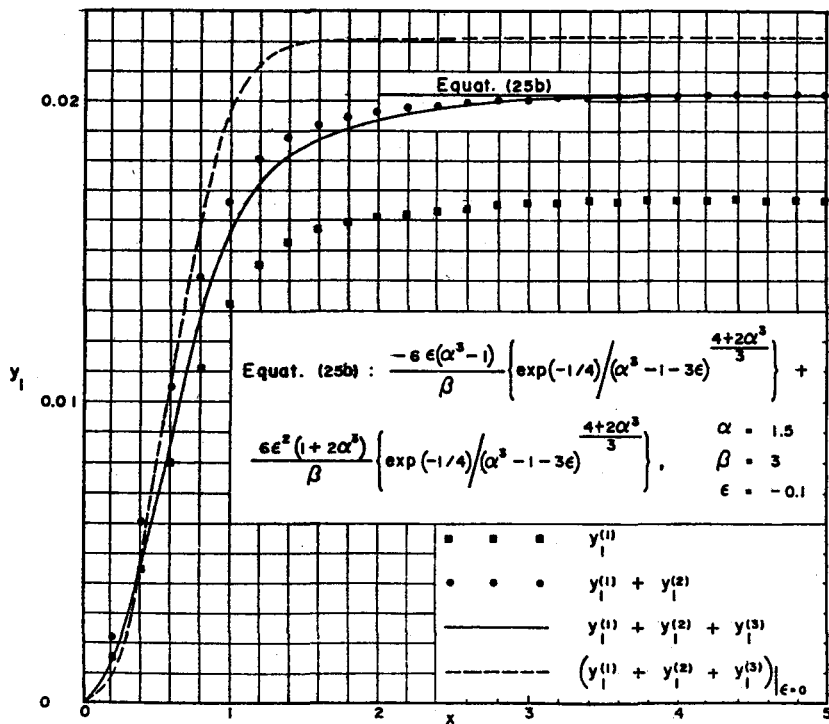
圖九 M<sub>2</sub> 型水面線第一階近似解



圖十 S<sub>2</sub> 型水面線第一階近似解



圖十一 M<sub>1</sub> 型水面線第一階近似解



圖十二 S<sub>3</sub> 型水面線第一階近似解



$$\text{次臨界流: } y_1(x; \varepsilon) \approx \frac{6\varepsilon(1-\alpha^3)}{\beta} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4}\right) / (1-\alpha^3+3\varepsilon) \frac{4+2\alpha^3}{3} \right\} + \frac{6\varepsilon^2(1+2\alpha^3)}{\beta} \times \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4}\right) / (1-\alpha^3+3\varepsilon) \frac{4+2\alpha^3}{3} \right\} \quad (25a)$$

$$\text{超臨界流: } y_1(x; \varepsilon) \approx \frac{-6\varepsilon(\alpha^3-1)}{\beta} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4}\right) / (\alpha^3-1-3\varepsilon) \frac{4+2\alpha^3}{3} \right\} + \frac{6\varepsilon^2(1+2\alpha^3)}{\beta} \times \left\{ \exp\left(-\frac{1}{4}\right) / (\alpha^3-1-3\varepsilon) \frac{4+2\alpha^3}{3} \right\} \quad (25b)$$

式 (25a, b) 等號右邊之第一項與第二項分別為式 (20a, b) 等號右邊第一項與第二項的極限值，因此第一階近似解式 (20a, b) 係以式 (25a, b) 為極限值。圖九至圖十二的粗實線即表示此極限值，此四圖的  $\beta$  值均等於 3，而  $\varepsilon$  與  $\alpha$  分別等於 -0.1 與 0.5; 0.1 與 1.5; 0.1 與 0.5; -0.1 與 1.5，所以式 (25a) 與 (25b) 的極限值分別等於 -0.2559, -0.007868, 0.1239, 與 0.02020。一般而言，第一階近似解的極限值是否大於或小於 0，完全決定於第一項。流況為次臨界流時，第一項是正的，所以  $M_2$  型 ( $\varepsilon < 0$ ) 的極限值小於 0，而  $M_1$  型 ( $\varepsilon > 0$ ) 却大於 0。流況為超臨界流時，第一項是負的， $S_2$  型 ( $\varepsilon > 0$ ) 的極限值小於 0，而  $S_3$  型 ( $\varepsilon < 0$ ) 就大於 0。第二項的極限值可由上述的極限值減掉第一項的極限值，而圖九至圖十二第一項的極限值分別等於 -0.2985, -0.01669, 0.1085, 0.01666。因此，第二項的極限值就分別等於 0.0426、0.008822、0.0154、0.00359。無論是那一類的水面線，第二項的極限值恒大於 0。相對於第一項的極值，圖九至圖十二顯示兩極限值之比值分別等於 0.1423785、0.5285799、0.1419314 與 0.2124849。實際上由式 (25a, b) 計算而得的比值應該分別等於 0.1429、0.3263、0.1429 與 0.3263。只有圖九與圖十一的比值符合，這即指計算這兩型水面線 ( $M_2$ ,  $M_1$ ) 所使用的距離已經足夠長，這二圖的最大  $x$  值均為 2。相反地，如圖十與圖十二所示，計算  $S_2$  與  $S_3$  型水面線，計算的距離必須超過目前所使用的最大距離，才能求得確實的比值。易言之，次臨界流只須稍微離開控制斷面，第一階近似解就很快地趨近於式 (25a) 的極限值；而流況為超臨界流則須較遠離控制斷面才會趨近於式 (25b) 的極限值。此外，式 (25a, b) 的極限值除了決定於代表大小等級的係數外，還受  $\frac{4+2\alpha^3}{3}$  或  $\frac{4+2\alpha^3}{3}$  的影

響，後者的大小視流況為次臨界流或超臨界流而有非常懸殊的差別。參數  $\beta$  等於 3 時，不同的  $\alpha$  值與  $\varepsilon$  值，式 (25a, b) 的極限值列於下：

$\varepsilon$	$\alpha$	式(25a)	式(25b)
-0.1	0.3	-0.2308	
-0.1	0.5	-0.2559	
-0.1	0.7	-0.3802	
+0.1	0.3	0.1212	
+0.1	0.5	0.1239	
+0.1	0.7	0.1377	
+0.1	0.9	0.2231	
-0.1	1.3	0.1399	
-0.1	1.5	0.02020	
-0.1	1.7	0.001343	
-0.1	1.9	0.00003078	
+0.1	1.3	-0.06193	
+0.1	1.5	-0.01124	
+0.1	1.7	-0.0006932	
+0.1	1.9	-0.00001839	

上述的結果顯示流況為次臨界流時，式 (25a) 的極限值大致等於 0 ( $10^{-1}$ )，此值的絕對值隨着參數  $\alpha$  的趨近於 1，而稍微增加。另一方面流況為超臨界流時，式 (25b) 的極限值，大致都小於 0 ( $10^{-2}$ )，其絕對值隨着參數  $\alpha$  的增加而急速遞減。由此，吾人發現地層下陷後所造成水位變化的極限值，以流況為次臨界流時的影響較顯著，流況為超臨界流時，其影響非常小，幾乎可略而言。流況為超臨界流，水位本來就比較淺，因此地層下陷後，其影響的幅度也就跟着減小。其次，如果吾人視地層下陷為一干擾，流況為超臨界流時控制斷面在上游，任何干擾均因流速大於干擾的傳遞速度，無法向上游傳遞而急速被傳遞到下游，水位無法累積其影響。所以地層下陷對水位的影響也就不明顯，因而式

(25b) 的極限值就非常小。

最後，式 (25a, b) 與式 (20a, b) 均包括以參數  $\alpha$  與擾動  $\epsilon$  為底之冪數，冪數只決定於參數  $\alpha$ ，為使其底的值大於 0，流況為次臨界流時，擾動  $\epsilon$  必須符合條件： $1-\alpha^3 > -3\epsilon$ 。水面線為  $M_1$  型時，擾動大於 0，任何擾動值均可符合上述條件。但水面線為  $M_2$  型，擾動小於 0，所以擾動的值就受上述條件的控制。另一方面，水面線為  $S_2$  ( $\epsilon > 0$ ) 型時，擾動必須符合條件： $\alpha^3 - 1 > 3\epsilon$ ；但  $S_3$  型 ( $\epsilon < 0$ ) 就不受限制了。其實，由於在控制斷面上，已知深度為最大的可能擾動，所以水面線為  $M_2$  或  $S_2$  型時，擾動本來就應該分別符合條件  $1-\alpha > -\epsilon$  或  $\alpha-1 > \epsilon$ 。而  $\alpha < 1$  時， $1-\alpha > \frac{1-\alpha^3}{3}$ ； $\alpha > 1$  時  $\frac{\alpha^3-1}{3} > \alpha-1$ 。因此，水面線為  $M_2$  或  $S_2$  型時，擾動  $\epsilon$  只須分別符合  $1-\alpha > -\epsilon$  或  $\alpha-1 > \epsilon$ ，則呈現於式 (20a, b) 與 (25a, b) 中的底數自然大於 0。

參閱式 (25a, b) 或 (20a, b)，第號右邊的第二項  $y_1^{(2)}$  恒為正，而第一項  $y_1^{(1)}$  則視流況而定，流況為次臨界或超臨界流時，第一項的係數分別為  $\frac{6\epsilon(1-\alpha^3)}{\beta}$  或  $\frac{-6\epsilon(\alpha^3-1)}{\beta}$ ，而此項內的大刮弧恒為正。所以水面線為  $M_1$  ( $\epsilon > 0$ ) 或  $S_3$  ( $\epsilon < 0$ ) 時，在任何斷面上，第一階近似解恒大於 0，然而水面線為  $M_2$  ( $\epsilon < 0$ ) 或  $S_2$  ( $\epsilon > 0$ ) 時，第一階近似解是否大於 0，就要視第一項與第二項之間的相對大小。除非是第二項的大小等級大於第一項的大小等級，或是第二項的極限值大於第一項的極限值，一般而言，遠離控制斷面，第一階近似解是否大於 0，就完全決定於第一項。靠近控制斷面斷面，第二項可能相當於第一項，甚至大於第一項，所以在控制斷面的附近，第一階近似解就可能變為以第二項為主了。圖十的情況正說明了這種轉變，靠近控制斷面，第一階近似解大於 0，稍一遠離控制斷面，第一階近似解變為小於 0，改為由第一項來決定了；因為此情況的擾動大於 0，故  $y_1^{(1)} < 0$ 。參閱圖九，吾人發現類似情況的  $M_2$  型水面線並沒有這種現象發生，因為流況為次臨界流時，第一階近似解的極限值遠大於超臨界流的極限值。

擾動  $\epsilon$  對第一階近似解的影響，除了顯示於代表大小等級的係數外，同時也呈現於代表深度縱剖面線的大刮弧內。參閱式 (20a, b)，吾人得知擾動影響第一，第二，與第三項，呈現的函數形式有二

種。第一種形式是

$$(1-\alpha^3+3\epsilon)^{\frac{4+2\alpha\epsilon}{3}} \text{ 或 } (\alpha^3-1-3\epsilon)^{\frac{4+2\alpha^3}{3}},$$

只影響第一階的極限值，但與距離  $x$  無關；另一形式為  $[1-\alpha^3+3\epsilon \exp(\frac{3x}{1-\alpha^3})]$  或  $[\alpha^3-1-3\epsilon \exp(\frac{-3x}{\alpha^3-1})]$ ，遠離控制斷面，此函數趨近於  $[1-\alpha^3]$

或  $[\alpha^3-1]$ ，並不受擾動的影響。為了簡化起見，如果大刮弧內的擾動略而不計，其結果以虛線示於圖九至圖十二。比較實線與虛線的圖形，吾人即可發現這兩種情形的第一階近似解非常相似，只不過大小略有差異。因此儘管擾動非常小 ( $\epsilon = \pm 0.1$ )，第一階近似解 (大刮弧內的函數) 應該不能忽略擾動的因素。

第一階近似解乘以  $\eta$  (即  $\eta y_1(x; \epsilon)$ ) 才代表真正的水位，但是  $\eta$  的影響相當明顯，所以下述的分析就直接以  $y_1$  解釋為水位高度。流況為次臨界流時， $y_1(x; \epsilon)$  是否大於 0 視擾動  $\epsilon$  之正或負而定，不過兩者之正或負一致，如果  $\epsilon > 0$ ，則  $y_1(x; \epsilon) > 0$ 。  $M_1$  型水面線， $\epsilon > 0$  故  $y_1(x; \epsilon) > 0$ ； $M_2$  型水面線， $\epsilon < 0$ ，所以  $y_1(x; \epsilon) < 0$ 。相反地，流況為超臨界流時，式 (20b) 顯示  $y_1(x; \epsilon)$  與  $\epsilon$  之正或負適巧相反，如果  $\epsilon > 0$ ，則  $y_1(x; \epsilon) < 0$ 。  $S_2$  型水面線， $\epsilon > 0$ ，故  $y_1(x; \epsilon) < 0$ ； $S_3$  型水面線， $\epsilon < 0$ ，所以  $y_1(x; \epsilon) > 0$ 。總之，若水面線屬於 Backwater 型時 ( $M_1$  與  $S_3$  型)，地盤下陷促使水位再增高；相反地，若水面線屬於 Drawdown 型時 ( $S_2$  與  $M_2$  型)，地層下陷促使水位更下降。易言之，若水位沿流動方向遞增，則地層下陷後水位比未下陷前更高，或地層下陷提高了水位；另一方面，若水位沿流動方向遞減，則地層下陷後比未下陷前更低，或地層下陷降低了水位。前者的水面線坡度大於 0，而後者却小於 0。因此，以水面線坡度而言，地層下陷是帶有「正」，或是具有「促進」作用。遞增的水位更加速遞增，遞減的水位更加速遞減，這很明顯地指出，地層下陷縮小了不同水位的斷面間距離；也就是說，未下陷前兩個不同水位的斷面間距較大，下陷後斷面的間距較小。斷面的間距縮小即指水頭損失增加，或能量線坡度增大，此關係可由水面線方程式看出。式 (1) 可改寫為  $\Delta x' = \Delta E' / (S_0 - S_f) m$ ，式中的右下註脚「m」代表平均值， $E'$  為比能。如果下陷前、後深度與速度均保持不變，假設渠底改變的幅度可略而不計，那

廢由上式吾人即可看出，增加了能量線坡度  $S_r$ ，自然縮小了兩斷面的間距  $\Delta x'$ 。能量線坡度以 Manning 式估計，即  $S_r = V'^2 n^2 / (1.486)^2 R'^{4/3}$ ，能量線坡度之增加，即指粗糙度的增加，也就是增加水頭損失。渠底未下陷時，水頭損失僅來自渠道的摩擦，地層下陷後除了渠道長度增加後，也由於渠底凹下去，導至非摩擦因素的非均勻流水頭損失，這也就相當於增加渠道的粗糙度。所以，以傾向而言，式(24a, b)的推測是合理的，地層下陷促使 Backwater 型水面線更加速遞增，Drawdown 型水面線更加速遞減。

遠離控制斷面，式(25a, b)的極限值並不等於 0；照理，式(25a, b)應該趨近於 0，而不是上述的極限值。這是目前本論文採用擾動法探討地層下陷對水面線的影響，無法克服的困難，而此困難的徵結在於式(1)的水面線方程是屬於一階微分方程式，其解只能符合一個邊界條件(式(18))，無法再能符合其他的邊界條件，除非水面線方程式可提高為二階微分方程式。

#### 四、結 論

如果擾動  $\epsilon$  的值小於 0.2，流況為次臨界流時， $0.3 < \alpha < 0.9$ ；或流況為超臨界流， $1.3 < \alpha < 1.9$ ，則水面可以下列簡易的擾動解表示

$$\text{次臨界流: } y(x; \epsilon) = 1 + \epsilon \exp\left(\frac{3x}{1-\alpha^3}\right), \quad x \leq 0$$

$$\text{超臨界流: } y(x; \epsilon) = 1 + \epsilon \exp\left(\frac{-3x}{\alpha^3-1}\right), \quad x \geq 0$$

誤差大致在百分之二左右。擾動  $\epsilon$  定義為在控制斷面上，已知的水深與正常深度間的相對偏差。利用擾動方法尋求水深的漸近展開式為一正規擾動問題 (Regular perturbation problem)，這是由於水面線方程式為一階微分方程式，不可分區採用不同的尺度，並尋求對應的漸近展開式。上述的擾動解，就其函數的結構與型式而言，是相當單純的，而且適宜於做為進一步分析其他現象的基礎解。此外，在上述的範圍，擾動解的結果與由其他方法計算而得的水面線，不但相當吻合而且也非常一致。

假設地層下陷可以類似常態分配的曲線表示(參閱式(9a, b))， $\beta$  與  $\eta$  分別代表無因次的下陷範圍與最大的下陷幅度，則以  $\eta$  為擾動，下陷後的水位可以下列漸近展開式表示

$$y[(x; \epsilon); \eta] = y_0(x; \epsilon) + \eta y_1(x; \epsilon) + O(\eta^2)$$

式中  $y_0$  為前段未下陷前水位的擾動解，以此解做為地層下陷後，水位之漸近展開式的第零階近似解或基礎解，而  $y_1$  為第一階近似解。第一階近似解由三大項組成，一般而言，第一階近似解以第一項與第二項來衡量就足夠了，而第三項可略而不計(參閱式(20a, b))。如果水面線坡度大於零 ( $M_1$  與  $S_2$  型水面線)，地層下陷促進水位沿流動方向加速遞增；相反地，如果水面線坡度小於零 ( $S_2$  與  $M_2$  型水面線)，則地層下陷同樣地促進水位沿流動方向加速遞減。這是由於地層下陷使渠道長度增長、使渠底彎曲，因而導至其他非摩擦的額外水頭損失，縮小了不同水位的間距。

遠離控制斷面，式(25a, b)為第一階近似解的極限值，式(25a, b)顯示地層下陷對終極水位的影響視流況而定：流況為次臨界流時，影響較顯著；相反地，流況為超臨界流時，影響就非常不明顯，幾乎等於 0。照理，遠離控制斷面，或是超過最大的下陷處，水位應該不受地層下陷的影響，或是第一階近似解  $y_1$  應該趨近於 0。造成這種偏差是由於水面線方程式為一階微分方程式，而不是二階微分方程式，無法符合二個邊界條件。分析中所引用的邊界條件是在控制斷面上，第一階近似解等於 0，而不是遠離控制斷面此解等於 0。其次，式(20a, b) 或 (25a, b) 的第一項與第二項的大小等級均與參數  $\beta$  成反比，此參數代表下陷的範圍；易言之，如果下陷的範圍趨近於無窮大，則第一階近似解就恒等於 0，即指在任何斷面上的水位均不受地層下陷的影響。

表一 參數  $\beta$  臨界值之範圍

$\alpha$	$x$	$\beta$ crit
0.3	- 2.512	1.453752—2.180628
0.4	- 2.417	1.511219—2.266828
0.5	- 2.257	1.616572—2.424858
0.6	- 2.024	1.804210—2.706315
0.7	- 1.696	2.152969—3.229454
0.8	- 1.260	2.898567—4.347851
0.9	- 0.070	3.479707—5.219560
1.3	3.090	1.1817050—1.7725570
1.4	4.053	0.8110669—1.2166000
1.5	6.132	0.5955792—0.8933687
1.6	7.993	0.45628801—0.6853321
1.7	10.010	0.3614875—0.5422313
1.8	12.470	0.2927361—0.4391041
1.9	15.100	0.3414236—0.3621354

表二 第一階近似辦第三項  $y^{(3)}_1$  大刮弧之值

$\alpha$	$x$	$\beta$	$\{y^{(3)}_1\}$
0.3	-0.2512	1.493752 ~ 2.180628	大於 $-10^{-14}$ ~ -0.342810 <sup>-3</sup>
0.4	-0.2417	1.511219 ~ 2.266828	大於 $-10^{-14}$ ~ -0.366510 <sup>-3</sup>
0.5	-0.2257	1.616572 ~ 2.424858	大於 $-10^{-14}$ ~ -0.414010 <sup>-3</sup>
0.6	-0.2024	1.804210 ~ 2.708315	大於 $-10^{-14}$ ~ -0.512410 <sup>-3</sup>
0.7	-0.1696	2.152969 ~ 3.229454	大於 $-10^{-14}$ ~ -0.948610 <sup>-3</sup>
0.8	-0.1260	2.898567 ~ 4.347851	大於 $-10^{-14}$ ~ -0.156010 <sup>-2</sup>
0.9	-0.070	3.479707 ~ 5.219560	大於 $-10^{-14}$ ~ -0.105810 <sup>-1</sup>
1.3	0.3090	1.1817050 ~ 1.7725570	小於 $10^{-14}$ ~ 0.119610 <sup>-3</sup>
1.4	0.4053	0.8110669 ~ 1.2166000	小於 $10^{-14}$ ~ 0.363310 <sup>-4</sup>
1.5	0.6132	0.5955792 ~ 0.8933687	小於 $10^{-14}$ ~ 6.988110 <sup>-5</sup>
1.6	0.7993	0.4568801 ~ 0.6853321	小於 $10^{-14}$ ~ 0.227610 <sup>-5</sup>
1.7	0.0100	0.3614875 ~ 0.5422313	小於 $10^{-14}$ ~ 0.425410 <sup>-6</sup>
1.8	1.2470	0.2927361 ~ 0.4391041	小於 $10^{-14}$ ~ 0.620810 <sup>-7</sup>
1.9	1.5100	0.2414236 ~ 0.3621354	小於 $10^{-14}$ ~ 0.683010 <sup>-8</sup>

### 五、致 謝

淡江大學工學院電算中心之鼎力協助，致本論得以順利完成，作者在此謹致深厚謝意。

### 參 考 文 獻

(1) M. J. Lighthill and G. B. Whitham. "On Kinematic Waves; I-Flood Movement in Long Rivers" Proc. Roy. Soc. (London) vol. 229, no. 1178. (May 10, 1955), p. 281.

(2) F. H. Henderson. "Open Channel Flow" (1966), p. 131.  
 (3) 施清吉。擾動法之應用於水面線分析 中國農業工程學報 第二十八卷第二期 (1982), p. 1-20.  
 (4) Carl-Eril Froberg. "Introduction to Numerical Analysis" (1968), p. 178.  
 (5) Milton ven Dyke. "Perturbation Method in Fluid Mechanics" (New York; Academic Press Company, Inc., 1964). Chap. 1.  
 (6) Ali Hasan Nayfeh. "Introduction to Perturbation Techniques" (1981), Chap. 3-4.

專營土木、水利、建築等工程

## 朴 漢 營 造 股 份 有 限 公 司

負責人：陳 聖 河

地址：嘉義市友愛路二〇五號

電話：(〇五) 二三七四一〇〇・二三七一六五三