

# 專 論

## 邊界積分法應用於地下水海水入侵之研究

### A Study of Boundary Integral Equation Method Applied in Seawater Intrusion of Ground Water Aquifers

國立臺灣大學農工研究所教授兼主任

臺灣電力公司電源開發處能源課一般工程師

曹 以 松

林 鍾 洋

Yii-Soong Tsao

Chun-Yang Lin

#### 摘 要

本文之目的在建立海水入侵數學模式，依地下水及海水入侵之理論，配合本文之數學方法，藉電子計算機加以模擬，解析海水入侵含水層之流況，預估在各種地下水位異動下，海水入侵趾部所達之位置，以供地下水資源管理規劃及保育之用。

本文之數學模式乃利用目前最新之邊界積分方程式法 (BIEM-Boundary Integral Equation Method) 模擬海水入侵交界面位置之近似解。本文首先解析均勻流經圓柱流場之等勢能網與理論值比較，驗證本法之準確性。再以黑蕭模型模擬垂直斷面限制含水層及非限制含水層海水入侵之情況與本文之數學模擬比較，最後乃以本法配合單值勢能之理論 (single potential)<sup>(2)</sup>，建立限制含水層及非限制含水層水平斷面海水入侵之數學模式，供現地建立合理性抽水方案之參考，期消彌局部地區過量抽水造成海水入侵之現象，以確保地下水資源之長期利用。

本研究不僅提供水資源規劃之參考，具有實用價值，而本研究所採用之邊界積分方程式法亦可解析一般流場，是繼有限元素之後，一種新興之數學模式，在國外亦在發展階段，而本文首將此法引進國內，祈能對國內學術研究上有所貢獻。

#### Abstract

The purpose of this research is to develop a mathematical model for seawater intrusion in ground water. By means of computer simulation, the model analyzes the flow system of seawater intrusion in Yun-Lin basin, and forecasts, Under the tendency of variation of ground water, the location of seawater intrusion toe. So the model can be used as a base for planning and management of ground water resources in this area or other areas subject to seawater intrusion.

The mathematical model is boundary integral equation method. This model is utilized to simulate the approximated value of the location of seawater intrusion toe. First, the flow field describing a uniform flow pass a circular cylinder is analyzed and the results are then compared with theoretical values in order to show the correctness of this method. Secondly, the model is used to simulate saltwater intrusion patterns in a vertical plane of both the confined aquifers and unconfined aquifers. The results are compared with those obtained form a Hele-Shaw model. Finally, numerical results of the present method are found to be in good agreement with those

obtained by the single potential theory for seawater intrusion in confined aquifer and unconfined aquifer in horizontal planes. The present model can be used as the base for the adjustment of real pumping patterns in Yun-Lin area. It is hopeful that the over-pumping in some part of the basin could be eliminated and that the ground water resources in this basin could be utilized wisely and permanently.

The objective of this study is not only aimed at betterment of ground water resources management in Yun-Lin area but also to establish an example for areas with similar problems. It is also expected that the boundary integral equation method may be introduced into this counting for uses in the analysis of similar flow problems as well as other problems to provide a new tool in advancing researches.

## 壹、前 言

地下水為世界上除兩極冰冠以外最大的淡水資源，在全世界陸地之下蘊藏 $8 \times 10^{15}$ 噸<sup>(1)</sup>之地下水，此數中之一半係在現有最深水井之汲取範圍之內，而其數量已等於地球上水庫、池沼、湖泊中蓄儲水量之三十五倍<sup>(1)</sup>矣，因此地下水數量與其在水資源上之重要性，可想而知。

在利用開發地下水資源，由於其深在地下較地面水開發困難，故其地下水水文分析極為重要，無論開發新的地下水資源或評估現有之地下水資源均需在事前先對該一地區之水源作詳盡之地下水水文分析，否則漫無計劃之盲目開發，必造成嚴重後果。地下水水文分析各步驟為：

(一)水文分析：預測未來需水量及供水量，推估排水之去路、地下水補注能力、及各種替代計劃之分析。

(二)地下水分析：地下水含水層之輸水能力之分析，安全出水量，地下水數學模型之建立與驗證，最佳抽水型態之推定等。

(三)經濟分析：就各種開發計劃及替代計劃，加以分析，就其每一計劃之設施、能量消耗、效益及所需經費加以分析比較，以為抉擇之參考。

臺灣位處亞熱帶地區，屬海島型氣候，雨量充沛，每年平均雨量達 2,430 公厘，約為世界年平均雨量三倍之多，可得水量為 874 億立方公尺，但由於分佈不均，多為熱帶性暴雨，且各河川坡陡流短，故大部份迅速宜洩入海，因此實際利用者約 172 億立方公尺，僅佔百分之二十左右，其中大部分為

河川引水，另外則為水庫調蓄及地下水抽取者，往往不足各地之需求。

臺灣在水資源利用上已達相當程度，但工商業急速發展，使現有水源不敷使用，並造成水資源污染之現象，於是乎地下水資源的開發日益重要，本省地下水資源之蘊藏，依其地質與水文特性可分為十個地下水區域<sup>(4)</sup>，其中以濁水溪沖積扇及屏東平原為最多，其地下水開發之程度與臺北盆地同居全省之冠，對各地方之建設頗多助益，但同時因缺乏地下水水文分析，及漫無計劃之過度開發，至今亦引致諸多問題簡述如下：

(一)水位下降：由於抽取量超過補注量，而導致地下水位下降，水井效率減低，灌溉系統因而發生障礙，如雲林之北港，水林地區即是。

(二)地盤下陷：由於人口密度集中，大廈之林立，以及天然補注之減少而造成地表之負荷增加，加以過度抽取地下水，導致孔隙水壓力降低，地盤下陷，如臺北蘆洲、五股及屏東平原沿海地區之海水倒灌，影響人民之生計。

(三)地下水污染：由於地下水水壓下降使一般污水、工業廢水、農業污水等，皆可能流入河道滲入地下或直接自井中經由擴散作用滲入含水層而造成污染，不僅對人體健康不利，對公用環境及水資源而言亦造成莫大損傷，所以必須經由各種保護措施，保障地下水之水質。

(四)海水入侵：因水位降低，淡水之壓力無法抵禦海水壓力，破壞原始壓力平衡條件，使得海水入侵面，向內陸延伸，達成新的平衡位置，含水層水

質受到污染，鹽分劇增，水質惡化，貯水功能消失，如雲林、屏東地區，必須經由多年清洗及大量淡水的補注方可恢復。

地下水開發，其營運是極重要之問題，營運得當，福澤社會，否則上述各項惡果，將逐一發生，其影響必累及後世，使後人無點滴可用之地下水源，因此必須對此一問題加以正視及重視。

而臺灣四面環海，故海水入侵之問題不可忽略，本文即針對海水入侵問題及地下水之流場，做一學理性之探討，並建立海水入侵數學模式，藉電子計算機，探討在不同抽水量條件下，界面面趾部移動之情形與自由水面及界面形狀之變化，以為日後對區域性地下水海水入侵問題研究之參考，俾對地下水之經營規劃有所助益。

## 貳、文獻檢討

海水入侵含水層問題，從1889年至今，已有許多專家研究過，從靜力平衡分析至動力分析，從實驗觀測至理論分析，數學模擬，而獲致若干結論。

吉本 (Ghyben) 首先於1889年視淡水與海水為不相混合之液體，界面無擴散現象，依靜力平衡，認為海水與淡水交界面乃位於海平面下淡水水位高出海平面距離 40 倍處，此一現象經海茲培格 (Herzberg) 應用於給水工程，故稱為吉本——海茲培格理論。

赫伯特 (Hubbert, M. K.) 於1940年，仍視淡水與海水為不相混合之流體，依動力平衡求得海水入侵交界面應較吉本海茲培格者為深，若淡水水頭為一直線則入侵面為上凹之曲線。

吉柏 (Cooper, H. H.) 於1959年，指出在動力平衡狀態下，界面有擴散之現象，因淡水流向海洋故擴散之鹽分有流回海洋之趨勢，形成一循環，可減輕海水入侵之現象。

托德 (Todd, D.K.) 於1959年據實際觀測結果知海水入侵交界面為狹長擴散帶僅數呎，故依達西定律視淡水為運動狀態，配合海茲培格之關係式經兩項假設①海水入侵交界面明顯而無任何水流橫越②淡水為水平流，導得淡水流量及限制含水層厚度與海水入侵交界面趾部。

亨利 (Henery, H.R.) 於1964年以淡水與海水為兩種不相混合之流體之理論，用作圖法解析含水層二維穩定狀態下海水入侵問題，發現除靠近海岸線附近外，交界面之位置可依水平流假設得到近

似解。

盧英 (Rumer, R.R.) 與哈里曼 (Harleman, D. R. F.)，以限制含水層砂箱模型實驗，證明亨利之理論，即假設淡水與海水為兩種不相混合之流體為可行，指出海水入侵交界面擴散現象與海水入侵長度之比例極為微小，故可忽略。

貝爾 (Bear, J.) 與達貢氏 (Dagan, G.) 於1964年以限制含水層黑蕭模型 (Hele-Shaw model) 實驗，求得突然改變淡水流速時，海水入侵交界之移動情形，並依五項假設導得不同適用範圍理論解之公式，該五項假設為①杜布假設 (Dupuit assumption) ②改變流量後其流量屬定流量且海水入侵交界面之移動終趨靜止③含水層為限制含水層，流場為二維④含水層為均勻 (homogeneous) 且等向性 (isotropic) ⑤交界面明顯而無擴散現象，該實驗所得之數據為後來研究海水入侵數學模式之重要參考文獻。

大偉士 (Davis, S.N.) 與狄威斯特 (DeWiest, R. J. M.) 於1966年指出海茲培格理論乃是靜力平衡，兩不同密度不相混合之液體，在靜止狀態下，二者之交界面終必成為水平故以動力平衡之理論導得交界面方程式

$$\sin \alpha = + \left[ \frac{\gamma_s}{\gamma_s - \gamma_f} \frac{1}{K} V_f - \frac{1}{K} \frac{\gamma_s}{\gamma_s - \gamma_f} V_s \right]$$

$V_f$  : 沿交界面之淡水流量

$V_s$  : 沿交界面之海水流量

阿克曼 (Ackermann, N. L.) 與沈氏 (Shen, H.T.) 於1969年研究海水入侵實驗，在被海水包圍住之淡水中，設定一連串排水管，以重力排水研究海水入侵交界面上揚錐 (upconing) 之情形，得到交界面之幾何繪圖解，阿克曼與張氏 (Chang, Y. Y.) 於1971年以電類比模型試驗，驗證上述結果，並推展理論至任一抽水量之通解。

史特雷克 (Strack, O. D. L.) 於1976年將均質等向限制含水層及非限制含水層之三維地下水海水入侵流場，利用杜布假設沿高程積分，轉為二維流場，再利用海茲培格理論求出海水入侵交界面位置，其中海水入侵之趾部位置，所對應之勢能為單值可由公式求得，並以此勢能將含水層分為淡水區及海水區，個別處理。

Sa Da Costa, A. A. G. 與威爾遜 (Wilson J. L.) 於1979年以有限元素法建立數學模式，模擬垂直斷面海水入侵之研究，並與黑蕭模型驗證，更

而應用於模擬水平海水入侵趾部位置之估算。

劉立方 (Liu, Philip L-F) 陳氏 (CHENG, H-D) 與李蓋格 (Liggett, J. A.) 於1981年, 以邊界積分方法模擬垂直斷面海水入侵, 並與1964年貝爾之黑蕭模型實驗驗證, 此數學模式無須杜布假設與事實符合, 且淡水區與海水區皆以動力分析, 故其結果較貝爾之數學模擬為佳。

貝爾 (Bear, J.) 與克卜勒 (Kaupuler, I.) 於1981年以不同之流量研究多層含水層 (Layered aquifer) 海水入侵現象, 觀測各含水層海水入侵交界面之變動, 並依杜布假設以有限差分法建立數學模式。

### 叁、地下水之特性及理論、控制方程式

#### 3-1 特性與理論

①低流速：地下水的流動雷諾係數 ( $N_R$ ) 小於1, 流速極緩慢, 一旦造成污染補救也就相當困難, 即以海水入侵為例, 人工補注亦須數年方能恢復含水層功能, 然因缺水而抽取地下水, 又何來大量淡水供人工補注。

②趨近連體 (continuum approach): 在飽和地下水中, 水分充滿空隙, 可視為連體, 故基本流體運動力學理論皆可適用。

③非旋性 (irrotation) 流場: 達西 (Darcy) 氏於1856年提出達西定律 (Darcy's law) 說明地下水的流況, 其流速與水力坡降成正比, 即

$$\vec{V} = -K \nabla \phi \quad (3-1)$$

$$\phi = \frac{P}{\rho g} + Z + C$$

K: 含水層水力傳導係數 (hydraulic conductivity)

$\rho$ : 水之密度

g: 重力加速度

P: 壓力能量

$\phi$ : 管壓水頭 (piezometric head)

$\vec{V}$ : 速度向量

Z: 位置水頭

C: 常數

達西定律說明地下水流場為一純量場, 故其流速可以由純量梯度表示, 而純量場必為非旋性 (irrotation)。

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} \quad (3-2)$$

$\vec{\Omega}$ : 渦度 (vorticity)

將 (3-1) 式代入 (3-2) 式

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times (-K \nabla \phi) \quad \text{因 } \nabla \times \nabla = 0$$

$$\text{故 } \vec{\Omega} = 0 \quad (3-3)$$

$\vec{\Omega} = 0$  必為非旋性

#### 3-2 地下水控制方程式:

在飽和含水層一控制體積 (control volume) 中

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) = S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3-4)$$

此為地下水運動方程式, 在定量流

$$(\frac{\partial}{\partial t} = 0) \text{ 與等向性 } (K_x = K_y = K_z = K) \text{ 之}$$

假設下, 則 (3-4) 式可改寫成下式

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3-5)$$

### 肆、邊界積分法對二維理想流場之解析

#### 4-1 邊界積分方法 (BIEM) 簡介:

邊界積分方法是一種解積分方程的方法, 將不規則的邊界分成許多直線, 並以結點相聯, 每一結點應兼具德黎區條件 (Dirichlet condition) 及紐曼條件 (Neumann condition), 將此二邊界條件代入積分式中, 沿邊界積分, 以求得內部任一點之解, 因它可以解任一點, 故對於大區域而僅需少數部份解的問題, 是非常方便的, 這亦是優於有限元素法 (FEM) 的地方, 因為是解積分方程, 若控制方程式是微分方程或偏微分方程時, 則需將其化為積分方程, 在轉化技巧中, 應用到葛林函數 (Green's function), 使控制方程式很容易的變成了積分方程式, 而本文針對二維理想流場, 將拉普拉氏方程式 3-5 式 (Laplace eq) 化為積分方程之形式, 若邊界條件僅知德黎區條件或紐曼條件, 則先將所求點置於邊界上, 若邊界共有 N 個點, 在邊界每改變一點可得一個方程式, 移動 N 次, 可建立 N 個方程式解 N 個未知數之矩陣, 將邊界之條件求得後, 方可解內部之點。

#### 4-2 二維理想流場之拉普拉氏控制方程式化為積分方程之形式:

流體之運動若不考慮流體之滯性, 流體之速度場 ( $\vec{q}$ ) 可以表為純量之梯度 ( $\vec{q} = -\nabla \Phi$ ), 其中  $\Phi$  為速度勢函數 (Velocity potential),

而在數學上， $\nabla \times \nabla \Phi = 0$  恆成立，即  $\nabla \times \vec{q} = 0$  此說明非滯性流體之運動為非旋性理想流場，由連續方程式知  $\nabla \cdot \vec{q} = 0$  即  $\nabla^2 \Phi = 0$  則流場特性可以拉普拉氏方程式表示，依達西定律，地下水之速度場 ( $\vec{q}$ ) 亦可以表為純量場之梯度 ( $-K\nabla\phi$ )，其中  $\phi$  為管壓水頭，視  $K$  為常數 (isotropic)，則  $\Phi = K\phi$ ，此說明地下水亦為無旋性之理想流場，而在地下水方面，由於土體為可壓縮性，故  $\nabla \cdot \vec{q} = -S_s \frac{\partial \phi}{\partial t}$ ，其中  $S_s$  為土壤膨脹係數，水膨脹係數及孔隙率之函數在定量流假設下  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ，即  $\nabla \cdot \vec{q} = 0$ ，並與達西定律聯立，得拉普拉氏 (Laplace) 控制方程式  $K\nabla^2 \phi = 0$ ，本文之 BIEM 數值方法即針對解析拉普拉氏 (Laplace) 二維流場而建立。

以下設  $\phi$  為管壓水頭

$$\text{則 } \nabla^2 \phi = 0 \quad (4-1)$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_R \int G \nabla^2 \phi dA &= \int_R \int \nabla \cdot (G \nabla \phi) dA \\ &\quad - \int_R \int G \cdot \nabla \phi dA \\ &= \int_R \int \nabla \cdot (G \nabla \phi) dA \\ &\quad - \left( \int_R \int \nabla \cdot (\nabla G \phi) dA \right. \\ &\quad \left. - \int_R \int \nabla^2 G \phi dA \right) \quad (4-2) \end{aligned}$$

$G$  : 格林函數 (Green's function)

$G$  與  $\phi$  在  $R$  定義域內皆為二次可微分

$$\begin{aligned} \text{Divergence theorem } \int_R \int (\nabla \cdot \vec{V}) dA \\ = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} ds \quad (4-3) \end{aligned}$$

$\vec{n}$  : 法線方向 (normal direction)

將 (4-3) 式代入 (4-2) 式得

$$\begin{aligned} 0 = \int_S G \nabla \phi \cdot \vec{n} ds - \int_S \phi \nabla G \cdot \vec{n} ds \\ + \int_R \int (\nabla^2 G) \phi dA \quad (4-4) \end{aligned}$$

由 Green's function for Laplace eq. 之定義  $\nabla^2 G = \delta(\epsilon - x, \eta - y)$

$$\text{知 } \int_R \int \nabla^2 G \phi dA = \phi(x, y) \text{ 且 } G = \frac{1}{2\pi} \ln r$$

$$r = ((\epsilon - x)^2 + (\eta - y)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int_S \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \\ \alpha \phi(x, y) &= \int_S \left( \phi \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right. \\ &\quad \left. - \ln r \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \quad (4-6a) \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta \quad \text{in } S \quad (\text{圖4-1}) \quad (4-6b)$$

$\beta$  可由下式決定

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta \\ \alpha &= 2\pi \quad \text{in } R \quad (4-6c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi \phi(x, y) &= \int_S \left( \phi \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. - \ln r \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \quad (4-6d) \end{aligned}$$

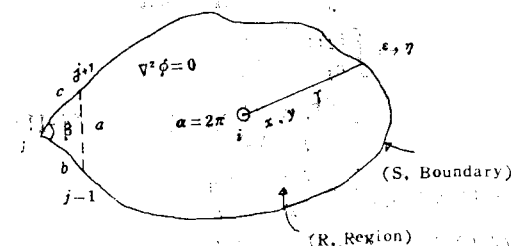


圖 4-1 邊界及定義域

#### 4-3 座標變換與係數方程式

如圖 4-2

$$\cos \theta = (x_{j+1} - x_j) / R \quad (4-7)$$

$$\sin \theta = (y_{j+1} - y_j) / R$$

$$\begin{aligned} \epsilon_j &= (x_j - x_i) \cos \theta + (y_j - y_i) \sin \theta \\ \epsilon_{j+1} &= (x_{j+1} - x_i) \cos \theta + (y_{j+1} - y_i) \sin \theta \\ \eta_{i,j} &= -(x_j - x_i) \sin \theta + (y_j - y_i) \cos \theta \end{aligned} \quad (4-8)$$

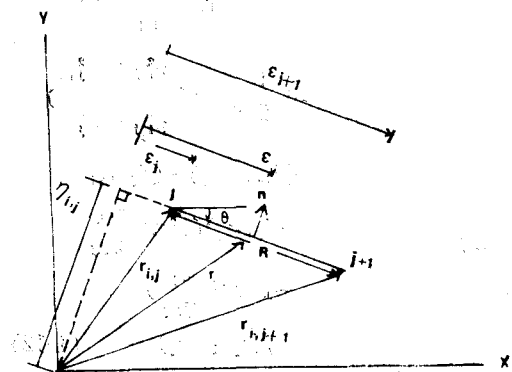


圖 4-2 座標系統

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_{j+1} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_j}{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j} \right) + \phi_j \left( \frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon}{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j} \right) \\ &= \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j} \varepsilon + \frac{\varepsilon_{j+1} \phi_j - \varepsilon_j \phi_{j+1}}{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j} \\ &= A' \varepsilon + B'\end{aligned}\quad (4-9)$$

同理

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial n} &= \frac{\left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j}{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j} \varepsilon \\ &\quad + \frac{\varepsilon_{j+1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j - \varepsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1}}{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j} \\ &= C \varepsilon + D\end{aligned}\quad (4-10)$$

將(4-6a)式寫成

$$\begin{aligned}\alpha \phi(x, y) &= \int_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \left( \frac{\phi}{r} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \ln r \right) d\varepsilon \\ &= \int_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \frac{\phi}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\varepsilon \\ &\quad - \int_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \frac{\partial \phi}{\partial n} \ln r d\varepsilon\end{aligned}\quad (4-11)$$

因  $r = (\varepsilon^2 + \eta_{1,j}^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\eta_{1,j}}{r}$

將(4-9)項代入(4-11)式前項:

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \left( \frac{\phi}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right) d\varepsilon &= \int_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \frac{\phi}{r^2} \eta_{1,j} d\varepsilon \\ &= \int_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \frac{(A' \varepsilon + B') \eta_{1,j}}{\varepsilon^2 + \eta_{1,j}^2} d\varepsilon \\ &= \int_{r_j}^{r_{j+1}} \eta_{1,j} \frac{A'}{r} dr \\ &\quad + B' \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{\eta_{1,j}} \Big|_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \\ &= \eta_{1,j} A' \ln r \Big|_{r_j}^{r_{j+1}} \\ &\quad + B' \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{\eta_{1,j}} \Big|_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \\ &= \left[ \frac{1}{2} \eta_{1,j} \ln \left( \frac{\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_{j+1}^2}{\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_j^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\phi_{j+1} - \phi_j) + (\phi_j \varepsilon_{j+1} \right. \\ &\quad \left. - \phi_{j+1} \varepsilon_j) \left( \tan^{-1} \frac{\varepsilon_{j+1}}{\eta_{1,j}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tan^{-1} \frac{\varepsilon_j}{\eta_{1,j}} \right) \right] \\ &\quad / (\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)\end{aligned}\quad (4-12)$$

$$\text{同理 } \int_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \frac{\partial \phi}{\partial n} \ln r d\varepsilon = \frac{1}{2(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1} \right.$$

$$\left. \left( \frac{A}{2} - \varepsilon_j B \right) - \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \cdot \left( \frac{A}{2} - \varepsilon_{j+1} B \right) \right]$$

$$A = (\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_{j+1}^2) [(\ln(\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_{j+1}^2) - 1)]$$

$$- (\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_j^2) (\ln(\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_j^2) - 1)]$$

$$B = \varepsilon_{j+1} \ln(\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_{j+1}^2) - \varepsilon_j \ln(\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_j^2)$$

$$\begin{aligned}&- 2(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j) + 2\eta_{1,j} \left( \tan^{-1} \frac{\varepsilon_{j+1}}{\eta_{1,j}} \right. \\ &\quad \left. - \tan^{-1} \frac{\varepsilon_j}{\eta_{1,j}} \right)\end{aligned}\quad (4-13)$$

綜合(4-11) (4-12) (4-13) 得(4-14)式

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N (a_{1j} \phi_j + a'_{1j} \phi_{j+1} + b_{1j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j + b'_{1j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1}) \\ = \alpha \phi_1\end{aligned}\quad (4-14)$$

其中

$$\begin{aligned}a_{1j} &= \left\{ \varepsilon_{j+1} \left( \tan^{-1} \frac{\varepsilon_{j+1}}{\eta_{1,j}} - \tan^{-1} \frac{\varepsilon_j}{\eta_{1,j}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \eta_{1,j} [\ln(\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_{j+1}^2) \right. \\ &\quad \left. - \ln(\eta_{1,j}^2 + \varepsilon_j^2)] \right\} / (\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)\end{aligned}\quad (4-15)$$

$$b_{1j} = \frac{B \varepsilon_{j+1} - \frac{A}{2}}{2(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)}\quad (4-16)$$

$$\begin{aligned}a'_{1j} &= \left\{ \frac{1}{2} \eta_{1,j} \left[ \ln \frac{(\varepsilon_{j+1}^2 + \eta_{1,j}^2)}{(\varepsilon_j^2 + \eta_{1,j}^2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varepsilon_j \left( \tan^{-1} \frac{\varepsilon_{j+1}}{\eta_{1,j}} - \tan^{-1} \frac{\varepsilon_j}{\eta_{1,j}} \right) \right] \right\} \\ &\quad / (\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)\end{aligned}\quad (4-17)$$

$$b'_{1j} = \frac{\frac{A}{2} - \varepsilon_j B}{2(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)}\quad (4-18)$$

德黎區條件 Dirichlet condition  $\phi$

紐曼條件 Neumann condition  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$

若每一節點僅知德黎區條件即(4-14)式中之 $\phi$ 或紐曼條件即(4-14)中之 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ , 則需將所求點放在

邊界上建立N個方程式解N個未知數之矩陣, 將邊界之未知條件求得後再解內部。

## 伍、二維理想流場之處理

### 5-1 目的與控制方程式

本節之目的在探討邊界積分方程式法之準確性, 以均勻流經過圓柱二維理想流場為例(如圖5-1)

，取兩種不同節點數解析流場，與理論值比較，說明誤差各若干。

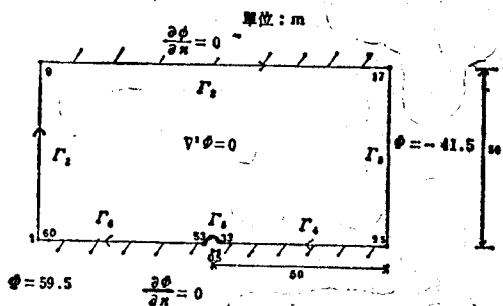


圖5-1 60節點邊界條件圖

### 5-2 邊界條件

邊界之分割分為60節點及96節點兩種分割方法，如圖(5-1)及(5-2)所示，邊界分為6段如 $\Gamma_1$ ， $\Gamma_2$ ， $\Gamma_3$ ， $\Gamma_4$ ， $\Gamma_5$ ， $\Gamma_6$ ，每段之節點皆均勻分佈其中，增加之節點皆在 $\Gamma_4$ 與 $\Gamma_6$ ，因該處速度勢之變化較大且非線性，而節點之增加，目的在求更精確之解。

設 $\Gamma_1$ 與 $\Gamma_3$ 為德黎區條件

$$\Phi_{\Gamma_1} = 59.5m$$

$$\Phi_{\Gamma_3} = -41.5m$$

$\Gamma_2$ 與 $\Gamma_4$ ， $\Gamma_5$ ， $\Gamma_6$ 為紐曼條件  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$

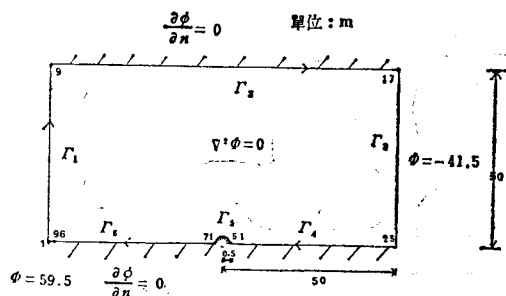


圖5-2 96點節邊界條件圖

### 5-3 建立係數矩陣

應用(4-6a)(4-6b)沿邊界積分可得下列矩陣

H：為(4-14)式之 $a_{ij}$ 矩陣

G：為(4-14)式之 $b_{ij}$ 矩陣

未知項置於「等號」之左邊，已知項置於「等號」之右邊，得下列矩陣。

$$[-G_{\Gamma_1} H_{\Gamma_2} - G_{\Gamma_3} H_{\Gamma_4} H_{\Gamma_5} H_{\Gamma_6}] \begin{pmatrix} (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{\Gamma_1} \\ \Phi_{\Gamma_2} \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{\Gamma_3} \\ \Phi_{\Gamma_4} \\ \Phi_{\Gamma_5} \\ \Phi_{\Gamma_6} \end{pmatrix}$$

$$= [-H_{\Gamma_1} G_{\Gamma_2} - H_{\Gamma_3} G_{\Gamma_4} G_{\Gamma_5} G_{\Gamma_6}] \begin{pmatrix} \Phi_{\Gamma_1} \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{\Gamma_2} \\ \Phi_{\Gamma_3} \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{\Gamma_4} \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{\Gamma_5} \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{\Gamma_6} \end{pmatrix} \quad (5-1)$$

解(5-1)聯立方程式即可得未知之 $(\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{\Gamma_1}$ ， $\Phi_{\Gamma_2}$ ，

$(\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{\Gamma_3}$ ， $\Phi_{\Gamma_4}$ ， $\Phi_{\Gamma_5}$ ， $\Phi_{\Gamma_6}$ ，以此邊界條件

可求內部任一點之值，若已知內部特定勢能值，反求X座標(設Y座標固定)則需將 $\Phi$ 值對X座標微分如下：

將(4-6a)式對X微分可得下式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left( \frac{\Phi}{r^3} \frac{\partial \eta_{1,j}}{\partial x} - 2\eta_{1,j} \frac{\Phi}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\epsilon \quad (5-2)$$

將(4-7)(4-8)(4-9)(4-10)式代入(5-2)式積分化簡

$$2\pi \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a_{1j} \Phi_j + a'_{1j} \Phi_{j+1} + b_{1j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j + b'_{1j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{j+1} \quad (5-3)$$

設  $A = \ln(\epsilon_j^2 + \eta_{1,j}^2)$

$$A' = \ln(\epsilon_{j+1}^2 + \eta_{1,j}^2)$$

$$B = \tan^{-1} \left( \frac{\epsilon_{j+1}}{\eta_{1,j}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\epsilon_j}{\eta_{1,j}} \right)$$

$$C = \epsilon_j^2 + \eta_{1,j}^2$$

$$C' = \epsilon_{j+1}^2 + \eta_{1,j}^2$$

其中

$$a_{1,j} = (-0.5 \sin \theta (A' - A + 2) - B \cos \theta + \sin \theta \cdot \frac{\eta_{1,j}^2 + \epsilon_j \epsilon_{j+1}}{C}) / (\epsilon_{j+1} - \epsilon_j) + (\eta_{1,j} \cos \theta / C)$$

$$a'_{1,j} = (0.5 \sin \theta (A' - A - 2) + B \cos \theta + \sin \theta \cdot \frac{(\eta_{1,j}^2 + \epsilon_j \epsilon_{j+1})}{C}) / (\epsilon_{j+1} + \epsilon_j) - (\eta_{1,j} \cos \theta / C')$$

$$b_{1,j} = -\cos \theta + \frac{((\eta_{1,j} \cos \theta - \epsilon_{j+1} \sin \theta) \cdot B + 0.5(\epsilon_{j+1} \cos \theta + \eta_{1,j} \sin \theta)(A' - A))}{\epsilon_{j+1} - \epsilon_j}$$

$$b'_{1,j} = \cos \theta + \frac{((\eta_{1,j} \cos \theta + \epsilon_j \sin \theta) \cdot B - 0.5(\epsilon_j \cos \theta + \eta_{1,j} \sin \theta)(A' - A))}{\epsilon_{j+1} - \epsilon_j}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left( \frac{\Phi}{r^2} \frac{\partial \eta_{1,j}}{\partial y} - 2\eta_{1,j} \frac{\Phi}{r^3} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right) de \quad (5-4)$$

將 (4-7) (4-8) (4-9) (4-10) 式代入 (5-4) 式積分化簡

$$2\pi \frac{\partial \Phi}{\partial y} = a_{1,j} \Phi_j + a'_{1,j} \Phi_{j+1} + b_{1,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j + b'_{1,j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{j+1} \quad (5-5)$$

其中

$$a_{1,j} = (0.5 \cos \theta (A' - A + 2) - B \sin \theta - \cos \theta \cdot \frac{(\eta_{1,j}^2 + \epsilon_j \epsilon_{j+1})}{C}) / (\epsilon_{j+1} - \epsilon_j) + \eta_{1,j} \sin \theta / C$$

$$a'_{1,j} = (-0.5 \cos \theta (A' - A - 2) + B \sin \theta - \cos \theta \cdot \frac{(\eta_{1,j}^2 + \epsilon_j \epsilon_{j+1})}{C}) / (\epsilon_{j+1} - \epsilon_j) - \eta_{1,j} \sin \theta / C'$$

$$b_{1,j} = -\sin \theta + \frac{((\eta_{1,j} \sin \theta + \epsilon_{j+1} \cos \theta) \cdot B + 0.5(\epsilon_{j+1} \sin \theta - \eta_{1,j} \cos \theta)(A' - A))}{(\epsilon_{j+1} - \epsilon_j)}$$

$$b'_{1,j} = \sin \theta + \frac{(-(\eta_{1,j} \sin \theta + \epsilon_j \cos \theta) \cdot B - 0.5(\epsilon_j \sin \theta - \eta_{1,j} \cos \theta)(A' - A))}{(\epsilon_{j+1} - \epsilon_j)}$$

### 5-5 BIEM 解析均勻流經過圓柱二維理想流場流程圖

#### 5-4 數值模擬結果與理論比較

本節以均勻流經過圓柱流場為例，設距圓柱左右各50公尺相當遠處勢能函數各為59.5及-41.5，其受半徑0.5公尺之圓柱影響很小，可視為均勻流，邊界條件如圖(5-1)及(5-2)所示，理論解與數值模擬比較，96節點者相對於同一勢能值其座標差最大為3.829公分，60節點者座標差最大為10.021公分，如表(5-1)所示，可知節點數增加時誤差可隨之減少，但節點數增加則計算機之容量及時間也會增加，故應慎重考慮選擇節點數時，邊界條件為非線性變化之部份，增加節點數可節省計算機之容量及時間，同時增加結果的精度。

本法之內部不必分割元素，故輸入資料較有限元素法方便，因解內部之點近似解析解精度甚高，並可利用牛頓——瑞福生法，解已知勢能值所在之位置，直接劃出流網，對於流場解析甚是方便。

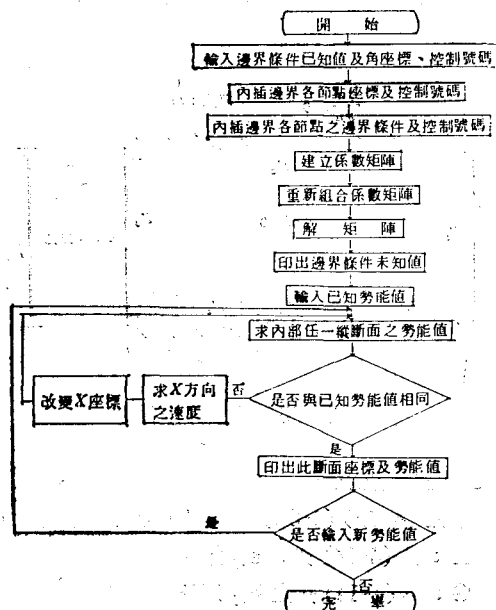




表 5-1 理論值與數值解等勢能值座標比較

座標 $\phi$	理論解		96 節點		60 節點		96 節點	60 節點
	X(m)	Y(m)	X(m)	誤差 $\Delta X$ (m)	X(m)	誤差 $\Delta X$ (m)	相對誤差( $\Delta X/L$ )%	相對誤差( $\Delta X/L$ )%
12.0	-2.40203	0.60000	-2.38563	0.01640	-2.30182	0.10021	0.01640	0.10021
	-2.41154	1.00000	-2.39666	0.01488	-2.33032	0.08122	0.01488	0.08122
	-2.43871	2.00000	-2.42952	0.00919	-2.38921	0.04950	0.00919	0.04950
	-2.45914	3.00000	-2.45367	0.00547	-2.42739	0.03175	0.00547	0.03175
11.5	-2.47215	4.00000	-2.46869	0.00336	-2.45082	0.02123	0.00336	0.02123
	-1.87928	0.60000	-1.84996	0.02932	-1.78102	0.09826	0.02932	0.09826
	-1.89687	1.00000	-1.87582	0.02105	-1.82024	0.07663	0.02105	0.07663
	-1.93753	2.00000	-1.92742	0.01011	-1.89303	0.04450	0.01011	0.04450
11.0	-1.96183	3.00000	-1.95641	0.00542	-1.93391	0.02792	0.00542	0.02792
	-1.97519	4.00000	-1.97206	0.00313	-1.95681	0.01838	0.00313	0.01838
	-1.34497	0.60000	-1.30668	0.03829	-1.25950	0.08547	0.03829	0.08547
	-1.38125	1.00000	-1.35727	0.02398	-1.31723	0.06402	0.02398	0.06402
10.5	-1.44072	2.00000	-1.43096	0.00976	-1.40447	0.03625	0.00976	0.03625
	-1.46711	3.00000	-1.46228	0.00483	-1.44461	0.02250	0.00483	0.02250
	-1.47966	4.00000	-1.47700	0.00266	-1.46501	0.01465	0.00266	0.01465
	-0.80000	0.60000	-0.76956	0.03044	-0.74472	0.05528	0.03044	0.05528
10.0	-0.87809	1.00000	-0.85689	0.01920	-0.83340	0.04269	0.01920	0.04269
	-0.95151	2.00000	-0.94381	0.00770	-0.92619	0.02532	0.00770	0.02532
	-0.97549	3.00000	-0.97184	0.00365	-0.95974	0.01575	0.00365	0.01575
	-0.98548	4.00000	-0.98354	0.00194	-0.97528	0.01020	0.00194	0.01020
9.8	-0.32539	0.60000	-0.31512	0.01027	-0.30720	0.01819	0.01027	0.01819
	-0.41195	1.00000	-0.40279	0.00916	-0.39303	0.01892	0.00916	0.01819
	-0.47205	2.00000	-0.46785	0.00420	-0.45918	0.01287	0.00420	0.01287
	-0.48682	3.00000	-0.48486	0.00196	-0.47872	0.00810	0.00196	0.00810
9.8	-0.49424	4.00000	-0.49139	0.00103	-0.48718	0.00524	0.00103	0.00524
	-0.18348	0.60000	-0.17837	0.00511	-0.17431	0.00917	0.00511	0.00917
	-0.24270	1.00000	-0.23742	0.00528	-0.23190	0.01080	0.00528	0.01080
	-0.28268	2.00000	-0.28011	0.00257	-0.27494	0.00747	0.00257	0.00747
9.8	-0.29197	3.00000	-0.29077	0.00120	-0.28708	0.00489	0.00120	0.00489
	-0.29541	4.00000	-0.29479	0.00062	-0.29225	0.00316	0.00062	0.00316
	-0.00000	0.60000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	-0.00000	0.60000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9.8	-0.00000	1.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	-0.00000	2.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	-0.00000	3.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	-0.00000	4.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

附註：L 為定義域全長 (100 m)

## 陸、海水入侵黑蕭模擬與數值模擬

黑蕭模型是由兩塊相隔極小平板所組成，其模擬海水入侵是將兩種密度不同之流體，由間隙通過，淡水在上海水在下，應屬粘性流場，以 Navier-Stokes 運動方程式分析，在定量流控制之下，由於流體之不可壓縮性，可將此二維流場轉化為勢能流，故海水區與淡水區為二種密度不同之理想流場，滿足拉普拉氏 (Laplace) 控制方程式，其中海水入侵交界明顯，其擴散現象極小。

### 6-1 初始條件與邊界條件

(a) 在限制含水層 (confined aquifer) 中交界面 (interface) 為初始條件可實測知其  $t=0(x,y)$  座標之位置，若為非限制含水層 (unconfined aquifer) 初始條件為交界面及自由水面 (free surface) 皆須由實測得知其  $t=0$  之位置，經由時間差分求得下一時段之位置，分述如下：

① 非線性移動自由水面 (nonlinear moving free surface) 以  $\zeta$  表移動自由水面 (moving free surface) 之高程函數

$$Z = \zeta, (x, y, t) \quad (6-1)$$

$$F = \zeta, (x, y, t) - Z \quad (6-2)$$

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{V}_o \cdot \nabla) F \quad (6-3)$$

$\vec{V}_o$  : 自由水面 (free surface) 移動之速度

$$(\vec{V}_o = \frac{\vec{V}}{ne})$$

$ne$  : 有效孔隙率

$$\text{其中: } \vec{V} = -K \nabla \phi \quad (6-4)$$

將(6-4)式代入(6-3)式

$$\frac{\partial \zeta(x, y, t)}{\partial t} + \left( \frac{-K \nabla \phi}{n_s} \cdot \nabla \right) F = 0 \quad (6-5)$$

將(6-5)改寫成下式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{K}{n_s} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (6-6)$$

令  $t^* = \frac{t \cdot K}{n_s}$  則(6-6)式可改寫成

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t^*} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \sqrt{\left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + 1} \quad (6-7)$$

參考圖(6-1)，若為二維空間

$z = \zeta(x, t)$  則(6-7)式可改寫成

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t^*} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \sqrt{\left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + 1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\tan \beta \quad (6-8)$$

$\beta$  : 交界面與水平之夾角

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t^*} = \frac{\partial \phi}{\partial n} / (-\cos \beta) \quad (6-9)$$

自由水面  $\zeta = \phi$  (6-10)

將(6-10)式代入(6-9)式且以  $k$  表示第  $k$  時段

$$\phi^{k+1} = \phi^k - \frac{\Delta t}{\cos \beta^k} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^k \quad (6-11a)$$

亦可寫成

$$\phi^{k+1} = \phi^k - \frac{\Delta t}{\cos \beta^k} \left[ \theta \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^k + (1-\theta) \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^{k-1} \right] \quad (6-11b)$$

② 非線性移動交界面 (nonlinear moving interface)

$$\text{淡水區 } \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{K_r}{n_s} \left( \frac{\partial \phi_r}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_r}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi_r}{\partial z} \right) \quad (6-12)$$

$$\text{海水區 } \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{K_s}{n_s} \left( \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_s}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \right) \quad (6-13)$$

$$K_r = \frac{\rho_r g k}{U_r}, \quad \frac{\rho_s}{\rho_r} = S, \quad \frac{U_s}{U_r} = \alpha \neq 1 \quad (6-14)$$

$$\text{令 } t^* = \frac{t \cdot K_r}{n_s}$$

$$\begin{aligned} \text{則 } \zeta^{k+1} &= \zeta^k - \frac{\Delta t^*}{\cos \beta^k} \left[ \theta \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^k \right. \\ &\quad \left. + (1-\theta) \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^{k-1} \right] \\ &= \zeta^k + \frac{S \Delta t^*}{\alpha \cos \beta^k} \left[ \theta \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^k \right. \\ &\quad \left. + (1-\theta) \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^{k-1} \right] \quad (6-15) \end{aligned}$$

$z$  : 交界上某點之位置水頭

$\phi_r$  : 交界面上某點之淡水管壓水頭

$\phi_s$  : 交界面上某點之海水管壓水頭

$\theta$  : 權重

$k$  : intrinsic permeability

$U_r$  : 淡水之黏滯性

$U_s$  : 海水之黏滯性

$\rho_r$  : 淡水之密度

$\rho_s$  : 海水之密度

$K_r$  : 淡水之傳導係數

K : 傳導係數 (6-16)

(b) 邊界條件 (參見圖6-2、6-3)

1. 紐曼條件 (Neumann condition)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = q$$

$\vec{n}$  : 法線向量 (normal direction)

2. 德黎區條件 (Dirichlet condition)

$$\phi = \phi(x, y, 0) \quad \text{on boundary}$$

6-2 奇異點 (singularity point) (參見圖6-4) 之處理

本文對節點與節點間之勢能及速度皆採線性內插, 在奇異點附近因其分佈非線性, 可由角流理論知其分佈情形, 故以角流處理奇異點, 可使準確性提高。

角流 (conner flow)

$$\omega = \phi + i\psi = Uz^m = Ur^m e^{im\theta}$$

其中  $\phi = Ur^m \cos m\theta$

$$\psi = Ur^m \sin m\theta \quad \text{且} \quad m\theta = \pi$$

如圖 6-4,  $\theta = 2\pi$ , 所以  $m = \frac{1}{2}$ ,  $\phi \propto r^{\frac{1}{2}}$

故 i-1 至 i 兩點間之勢能分佈為

$$\phi = \sqrt{\frac{r}{\delta_1}} \phi_{i-1} + (1 - \sqrt{\frac{r}{\delta_1}}) \phi_i$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \propto r^{-\frac{1}{2}} \quad (6-17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \sqrt{\frac{\delta_2}{r}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{i+1} \\ &\quad + (1 - \sqrt{\frac{\delta_2}{r}}) \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_i \end{aligned}$$

因  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_i = 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \sqrt{\frac{\delta_2}{r}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{i+1} \quad (6-18)$$

$\phi$  : 流線函數 (stream function)

$\delta_1$  : i 點至 i-1 點之距離

$\delta_2$  : i 點至 i+1 點之距離

6-3 建立係數矩陣

$\phi_{S11}$  表 : I ~ III 之  $\phi$  值

$\phi_{S21}$  表 : VI 之  $\phi$  值

$\phi_{S12}$  表 : IV 之  $\phi$  值

$\phi_{S22}$  表 : VII ~ VIII 之  $\phi$  值

$\phi_{I1}$  表 : V 之  $\phi$  (interface)

$\phi_{I2}$  表 : IX 之  $\phi$  值

$$\text{其中 } \phi_{I2} = \frac{1}{S} (\phi_{I1} + (S-1)\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_{I2}}{\partial n} = \frac{-\alpha}{S} \frac{\partial \phi_{I1}}{\partial n}$$

由 (4-14) 式將已知項置於等號右邊, 未知項置於等號左邊

(a) 限制含水層 :

$$\begin{pmatrix} H_{S11} & -G_{S12} & 0 & 0 & H_{I1} & -G_{I1} \\ 0 & 0 & -G_{S21} & H_{S22} & H_{I2}/S & \alpha/S G_{I2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{S11} \\ \partial \phi_{S12}/\partial n \\ \partial \phi_{S21}/\partial n \\ \phi_{S22} \\ \phi_{I1} \\ \partial \phi_{I1}/\partial n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_{S11} & -H_{S12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_{S21} & G_{S22} & H_{I2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \phi_{S11}/\partial n \\ \phi_{S12} \\ \phi_{S21} \\ \partial \phi_{S22}/\partial n \\ (1/S-1)\alpha_{I2} \end{pmatrix}$$

(b) 非限制含水層 :

$$\begin{pmatrix} H_{s11} & H_{s12} & -G_{s13} & -G_{s14} & -G_{s15} & 0 & 0 & H_{i1} & -G_{i1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{s21} & H_{s22} & H_{i2}/S & \frac{\alpha}{S} G_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{s11} \\ \phi_{s12} \\ (\frac{\partial \phi}{\partial n})_{s13} \\ (\frac{\partial \phi}{\partial n})_{s14} \\ (\frac{\partial \phi}{\partial n})_{s15} \\ (\frac{\partial \phi}{\partial n})_{s21} \\ \phi_{s22} \\ \phi_{i1} \\ (\frac{\partial \phi}{\partial n})_{i1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_{s11} & G_{s12} & -H_{s13} & -H_{s14} & -H_{s15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{s21} & G_{s22} & H_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{\partial \phi}{\partial n})_{s11} \\ (\frac{\partial \phi}{\partial n})_{s12} \\ \phi_{s13} \\ \phi_{s14} \\ \phi_{s15} \\ \phi_{s21} \\ (\frac{\partial \phi}{\partial n})_{s22} \\ + (\frac{1}{S} - 1)z \end{pmatrix}$$

代入解矩陣之副程式解之可得其餘未知項。

雖然本文之 BIEM 僅能解二維之拉普拉氏 (Laplace eq.) 方程式，但對於普依松方程式 (poisson eq.)，仍可經由邊界處理，將 poisson eq. 轉換為 Laplace eq. 後再以本文 BIEM 處理之。

求得 interface 之  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  後可用差分法求下一時段 interface 之位置，如(6-11)式。

6-4 流場有 source 或 sink 存在時之處理：

如有 source 或 sink 存在時，控制方程式為 poisson eq. 可寫成

$$\nabla^2 \phi_0 = \sum_{n=1}^M \frac{Q_n}{K} \delta(x-x_n, y-y_n) \quad (6-19)$$

$\delta$ : Dirac Delta function

$(x_n, y_n)$  表 M 個 source 或 sink 之座標。

$$\phi_0 = \phi_h + \phi_p$$

$\phi_0$  為滿足 (6-19) 式之解：

$\phi_h$  為滿足  $\nabla^2 \phi_h = 0$  之齊次解 (Homogeneous solution)

$\phi_p$  為特別解 (particular solution) 其解如下：

下：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \phi_p}{\partial r}) = \sum_{n=1}^M \frac{Q_n}{K} \delta(r-r_n)$$

$$\phi_p = \sum_{n=1}^M \frac{Q_n}{K} \ln(r-r_n)$$

$$\therefore \phi_0 = \phi_h + \sum_{n=1}^M \frac{Q_n}{K} \ln(r-r_n) \quad (6-20)$$

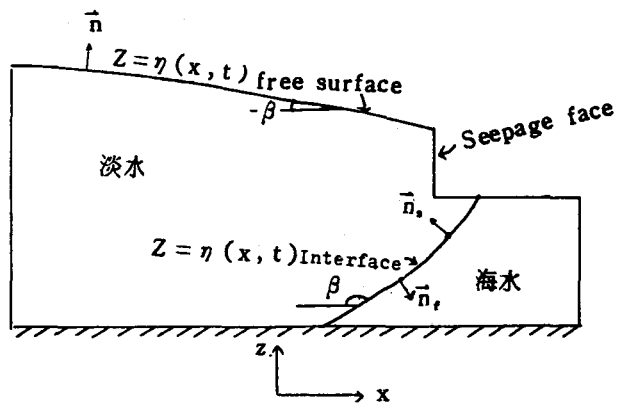


圖 6-1 自由水面及界面

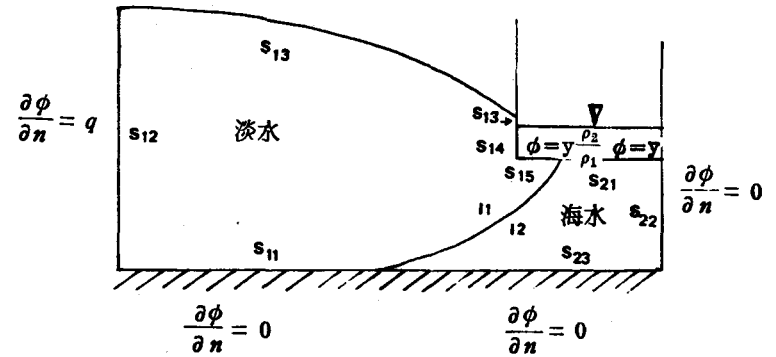


圖 6-3 非限制含水層邊界條件圖

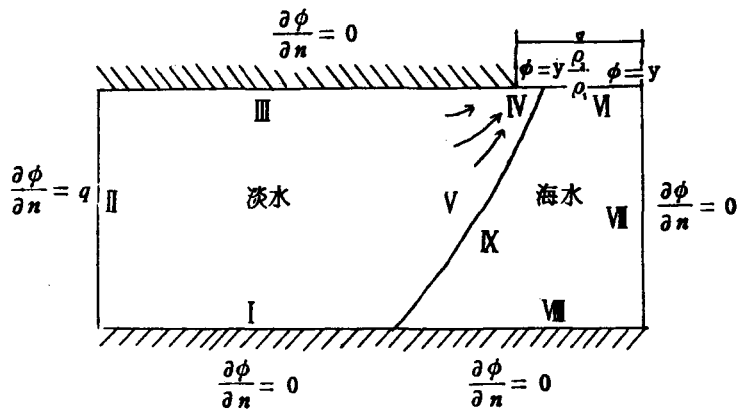


圖 6-2 限制含水層邊界條件圖

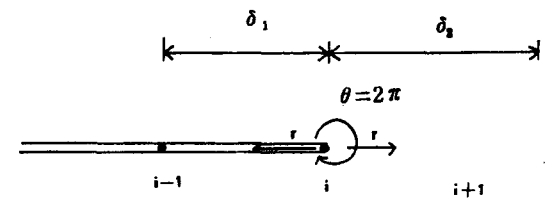


圖 6-4 奇異點示意圖

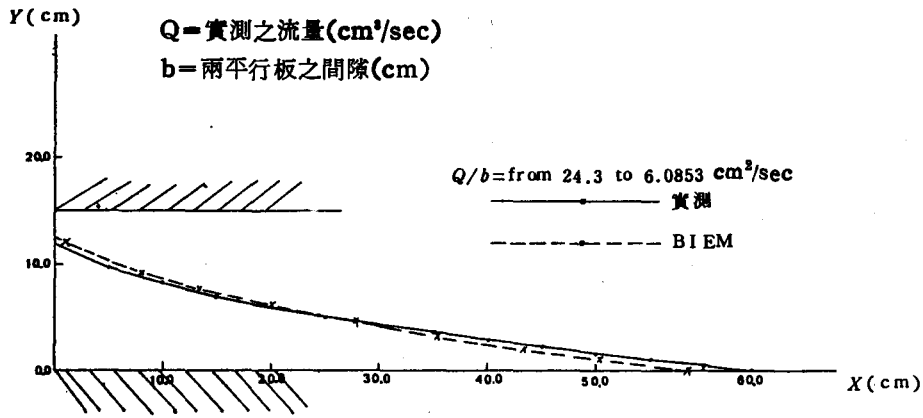


圖 6—5 限制含水層海水入侵界面實驗與教學模擬比較圖

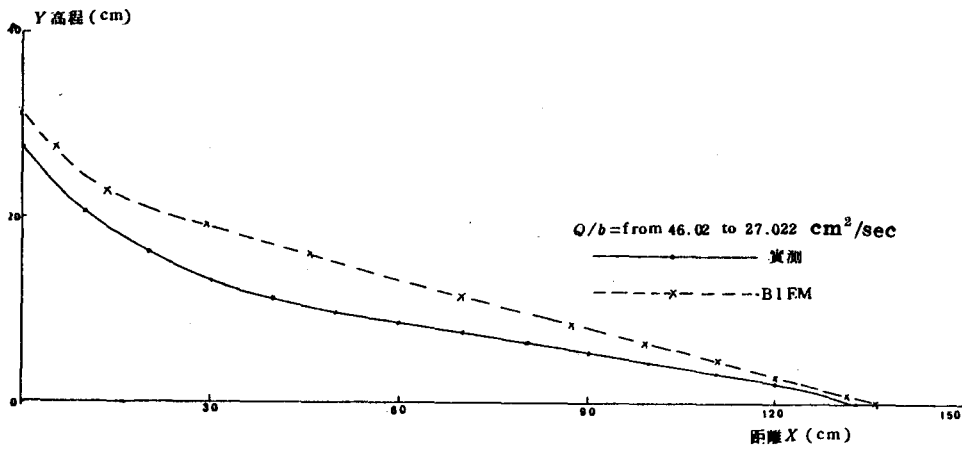


圖 6—6 非限制含水層海水入侵界面實驗與教學模擬比較圖

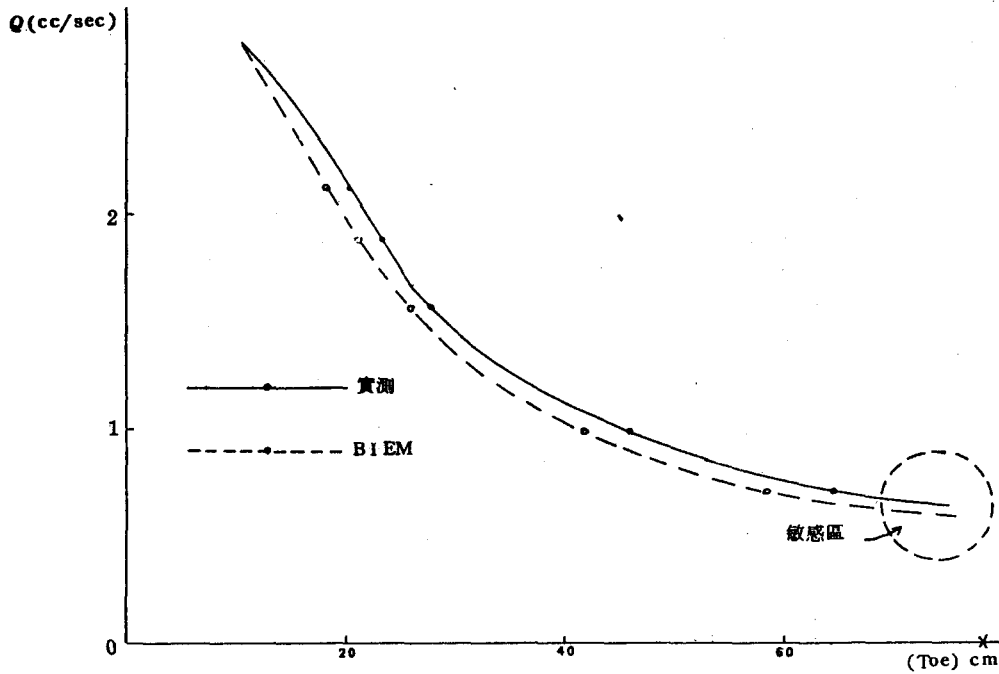


圖 6—7 海水入侵敏感性分析

$$\frac{\partial \phi_o}{\partial n} = \frac{\partial \phi_h}{\partial n} + \sum_{n=1}^M \frac{Q_n}{K} \frac{1}{(r-r_n)} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (6-21)$$

$$\phi_h = \phi_o - \sum_{n=1}^M \frac{Q_n}{K} \ln(r-r_n) \quad (6-22)$$

$$\frac{\partial \phi_h}{\partial n} = \frac{\partial \phi_o}{\partial n} - \sum_{n=1}^M \frac{Q_n}{K} \frac{1}{(r-r_n)} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (6-23)$$

邊界條件之 $\phi_o$ 及 $\frac{\partial \phi_o}{\partial n}$  (滿足 poisson eq.) 已知，將其代入 (6-22) 式及 (6-23) 式，轉換為滿足 Laplace eq. 之邊界條件，代入矩陣求得所欲求之點後再代入 (6-20) 及 (6-21) 式。

### 6-5 數值模擬與實驗結果比較

本節以實驗與數學模式比較，實驗分限制含水層與非限制含水層兩類，第一類：限制含水層，包括六組穩定性 (steady) 資料；以 BIEM 數值模擬，僅比較一組供參考如圖 (6-5)，其數值模擬結果頗似實驗狀況，第二類：非限制含水層，包括八組穩定性資料，僅比較一組供作參考，其誤差亦較限制含水層大，如圖 (6-6)。

以流量為縱座標，以趾部為橫座標，如圖 (6-7) 分析黑蕭模擬之敏感性 (sensitivity) 及數學模擬之敏感性，在海水入侵不嚴重時，敏感性較低，海水入侵嚴重敏感性較高，只要稍微改變流量，則趾部之移動相去甚遠，這更說明此時實驗誤差影響甚大，尤其此時流量小，實驗量得準確流量不易，只要稍微有殘存之水在量筒之中，誤差也就加大，而數學模式即以此測得之流量為邊界條件，所以海水入侵嚴重之流量模擬，誤差也就增高，圖 (6-7) 說明實驗與數學模擬皆說明海水入侵嚴重敏感性高，誤差也就增大。

## 柒、海水入侵自由含水層及限制含水層之模擬

### 7-1 控制方程式之假設

1. 定量 (steady)
2. 等向性 (isotropic)
  - $(K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = K)$
3. 不考慮濃度變化。
4. 交界面 (interface) 為明顯界限無擴散現象。
5. 杜布假設 (Dupuit Assumption) 成立。
6. 吉本海茲培格 (Ghyben-Herzberg) 理論適用。

上述六項假設第一項定量 ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) 及第二項等向性假設 ( $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = K$ ) 是使其控制方程式為拉普拉氏方程式，原控制方程式為：

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) = S_s \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

假設  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

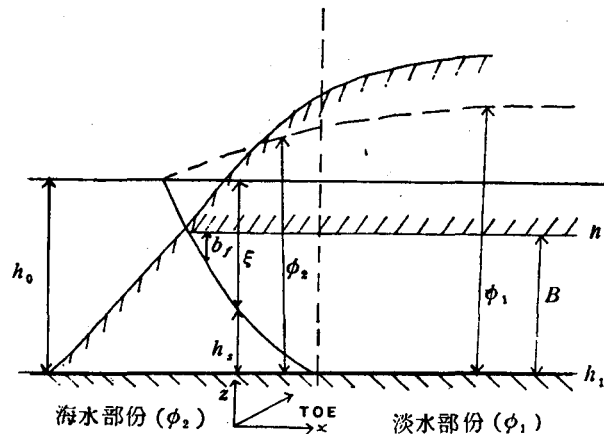
$$K_x = K_y = K_z = K$$

聯立上三式可得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

第三及第四項假設是使海水入侵交界面，可表為高程函數即  $z = h_s(x, y, t)$ ，第五項杜布假設是假設水流為水平則在一垂直斷面上各點之管壓水頭 ( $\phi$ ) 皆相等，第六項假設吉本海茲培格是假設海水為靜力平衡，則由靜力平衡之淡水管壓水頭，可求得海水入侵交界面之位置。

### 7-2 海水入侵水平斷面之理論及控制方程式



7-2-1 限制含水層(confined aquifer case)

假設限制含水層為水平  $\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial h_1}{\partial y} = 0$

$h_1$ : 限制含水層之下層

$h_2$ : 限制含水層之上層

$h_0$ : 海平面之位置水頭並以  $h_1$  為零位面

$\phi_1$ : 淡水區某斷面平均管壓水頭

$\phi_2$ : 海水區某斷面平均管壓水頭

$B$ : 含水層之厚度

$\gamma_f$ : 淡水之單位重量

$\gamma_s$ : 海水之單位重量

$\Delta\gamma = \gamma_s - \gamma_f$

$K\nabla^2\phi_1 = 0, K\nabla^2\phi_2 = 0$

$K \int_{h_1}^{h_2} (\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}) dz = 0$

應用來比尼茲定理及海茲培格理論可得下列三式

Single potential  $\left\{ \begin{aligned} -\phi_{1*}^2 &= B\phi_1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\gamma}{\gamma_f} B^2 - \frac{\gamma_s}{\gamma_f} B h_0 \end{aligned} \right. \quad (7-1)$

$\left\{ \begin{aligned} -\phi_{2*}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\gamma_f}{\Delta\gamma} (\phi_2 - \frac{\gamma_s}{\gamma_f} h_0 + \frac{\Delta\gamma}{\gamma_f} B)^2 \end{aligned} \right. \quad (7-2)$

toe 位置之  $\phi_{*}^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta\gamma}{\gamma_f} B^2 \quad (7-3)$

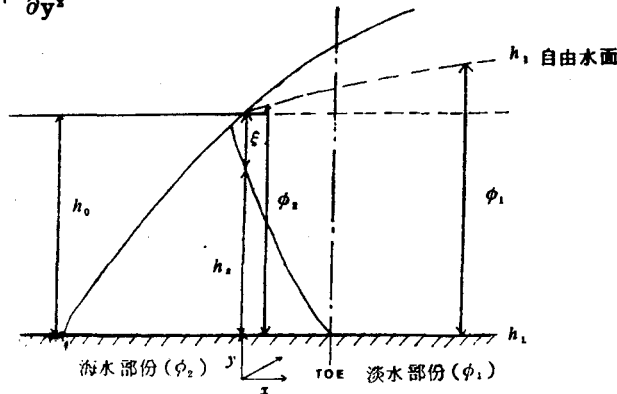
且  $\phi_{1*}^2$  及  $\phi_{2*}^2$  滿足拉普拉氏方程式

$\left\{ \begin{aligned} \text{—淡水區} \quad \nabla_{*}^2 \phi_{1*}^2 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (7-4)$

$\left\{ \begin{aligned} \text{—海水區} \quad \nabla_{*}^2 \phi_{2*}^2 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (7-5)$

其中  $\nabla_{*}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

7-2-2 非限制含水層



同理可得

$\left\{ \begin{aligned} -\phi_{1*}^2 &= \frac{1}{2} (\phi_1^2 - \frac{\gamma_s}{\gamma_f} h_0^2) \end{aligned} \right. \quad (7-6)$

$\left\{ \begin{aligned} -\phi_{2*}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\gamma_s}{\Delta\gamma} (\phi_2 - h_0)^2 \end{aligned} \right. \quad (7-7)$

toe 位置之  $\phi_{1*}^2 = \phi_{2*}^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_s}{\gamma_f} \frac{\Delta\gamma}{\gamma_f} h_0^2 \quad (7-8)$

$\nabla_{*}^2 \phi_{1*}^2 = 0 \quad (7-9)$

$\nabla_{*}^2 \phi_{2*}^2 = 0 \quad (7-10)$

7-3 建立係數矩陣

對於非均勻性流場，須將流場區依其均勻性 (K 值相同)。區分為數區，區與區間以勢能連續及速度連續建立聯立之關係式：如圖 (7-1)。



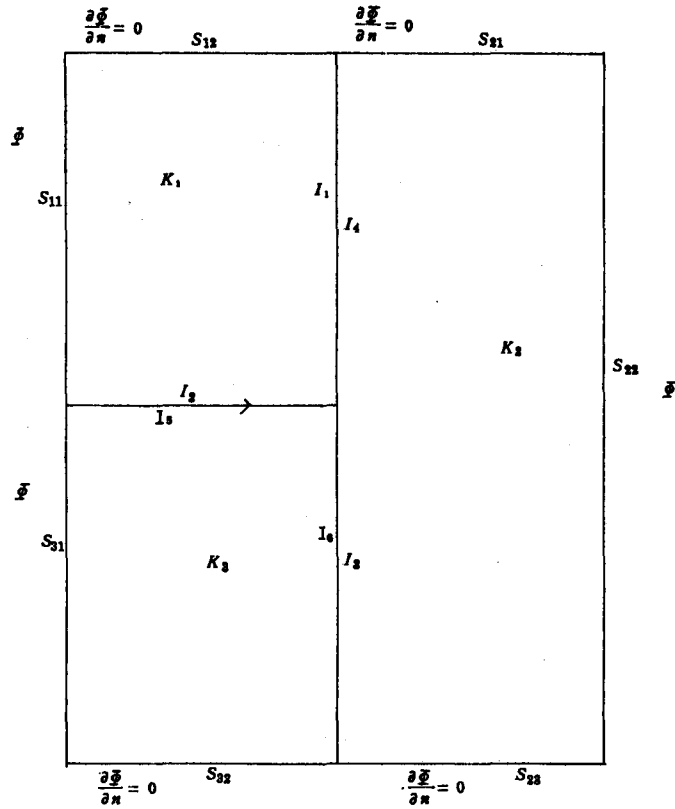


圖 7-1 非均質含水層邊界條件

設  $\phi_0^1 = \Phi$ ,  $\phi_{1\phi}^1 = \Phi_1$ ,  $\phi_{2\phi}^2 = \Phi_2$

由勢能連續及速度連續知

$$\Phi_{11} = \Phi_{14}, \quad \Phi_{12} = \Phi_{15}, \quad \Phi_{13} = \Phi_{16} \quad (7-11)$$

$$K_1 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{11} = -K_2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{14}, \quad K_1 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{12} = -K_2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{15}$$

$$K_2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{13} = -K_3 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{16} \quad (7-12)$$

由 (4-14) 式將已知項置於等號右方，得下式：

$$\begin{pmatrix} -G_{S11} & H_{S12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{11} & 0 & 0 & -G_{T1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{S21} & -G_{S22} & H_{S23} & 0 & 0 & H_{14} & H_{15} & H_{16} & \frac{K_1}{K_2} G_{14} & -G_{12} & -G_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{S31} & H_{S32} & 0 & H_{15} & H_{16} & 0 & \frac{K_1}{K_3} G_{15} & \frac{K_2}{K_3} G_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{S11} \\ \Phi_{S12} \\ \Phi_{S21} \\ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{S22} \\ \Phi_{S23} \\ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{S21} \\ \Phi_{S32} \\ \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \\ \Phi_{13} \\ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{11} \\ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{12} \\ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{13} \end{pmatrix}$$

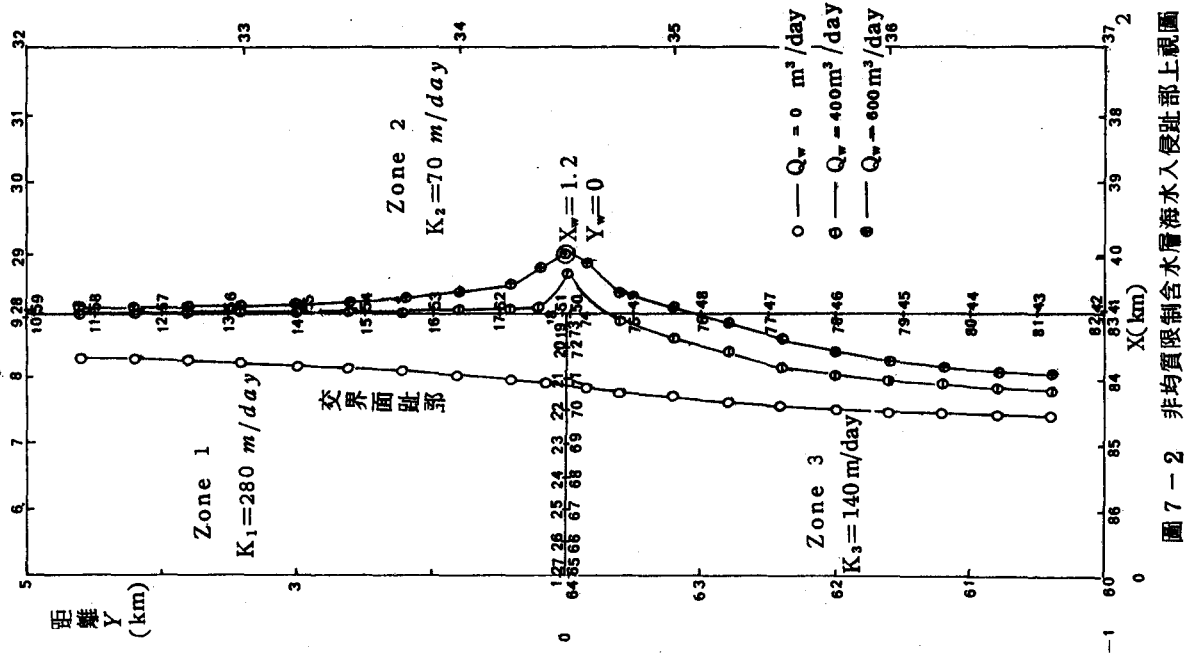


圖 7-2 非均質限制含水層海水入侵趾部上視圖

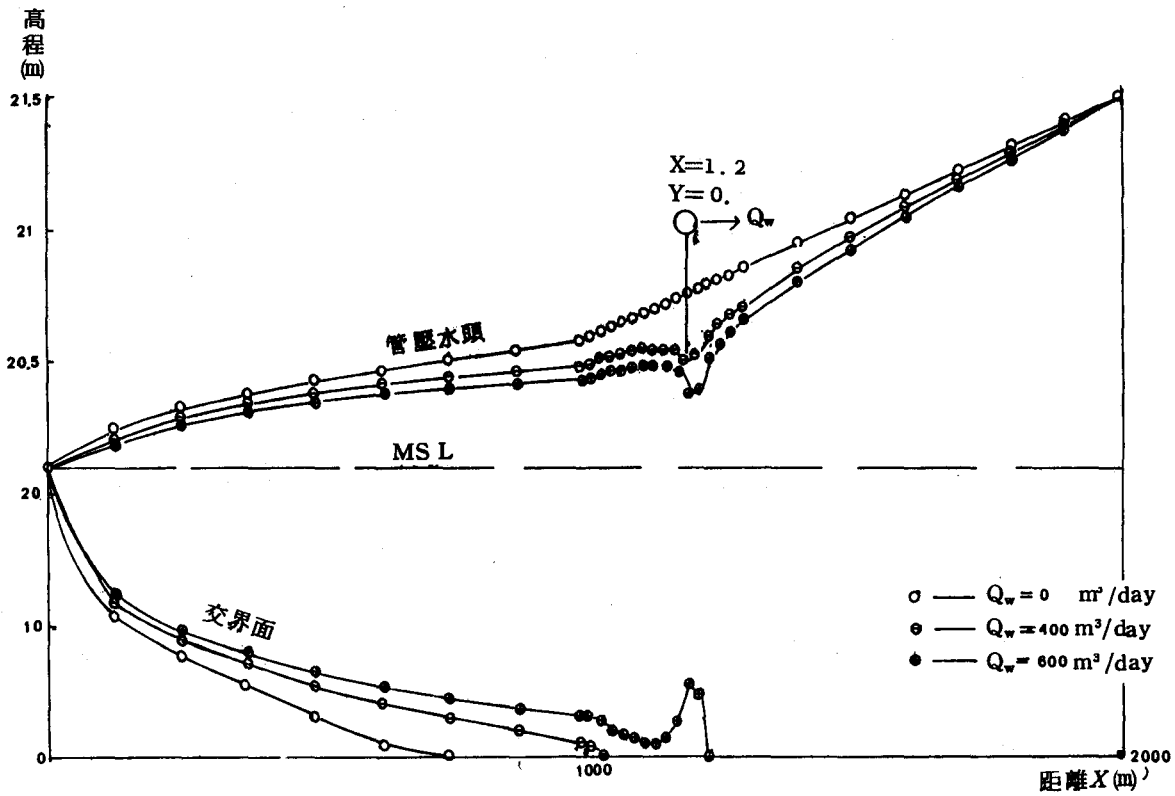


圖 7-3 非均質限制含水層海水入侵交界面與壓力水頭側視圖

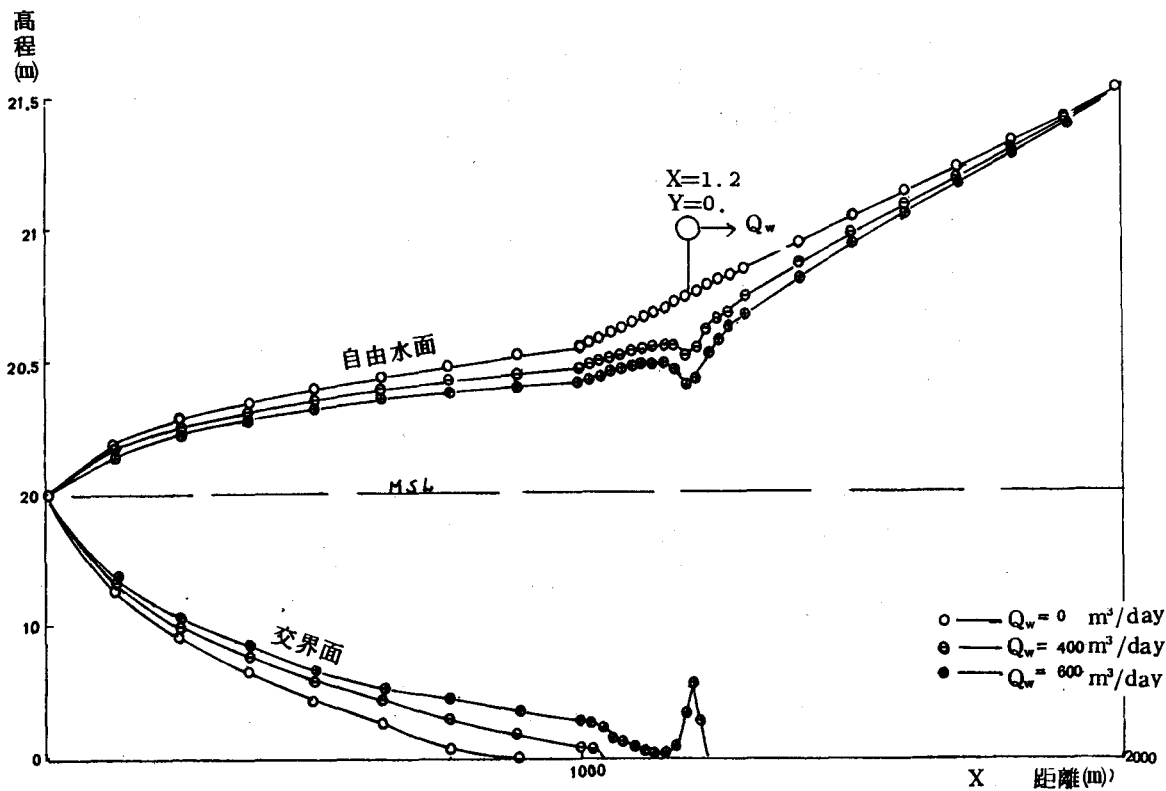


圖 7-5 非均質非限制含水層海水入侵界面與壓力水頭側視圖

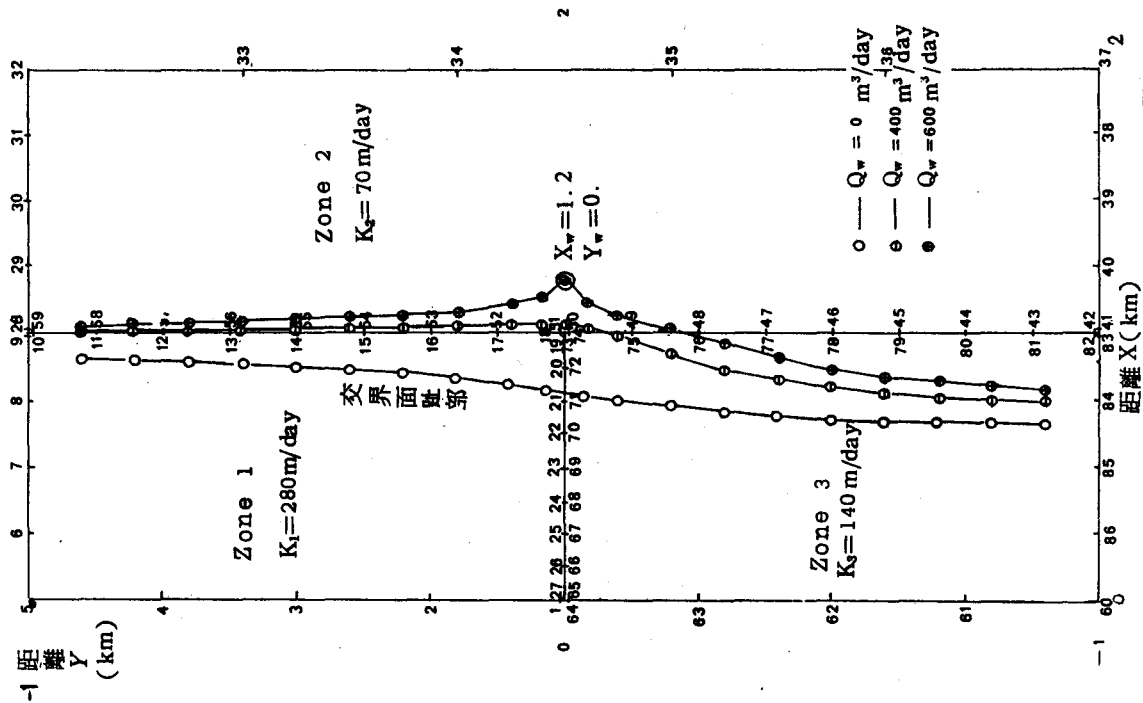


圖 7-4 非均質非限制含水層海水入侵趾部上視圖

$$= \begin{pmatrix} -H_{s11} & G_{s12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{s21} & -H_{s22} & G_{s23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{s31} & G_{s32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{s11} \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{s12} \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{s21} \\ \Phi_{s22} \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{s23} \\ \Phi_{s31} \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial n})_{s32} \end{pmatrix} \quad (7-13)$$

將(7-13)式代入解矩陣之副程式解之，可得所有邊界條件之紐曼條件及德黎條件，再應用(4-6a) (4-6c)解內部任一點之勢能，也可利用牛頓瑞福生法，由已知勢能反求座標，由(7-3)式或(7-8)可決定限制含水層或非限制含水層趾部之勢能，趾部之勢能既已知，則如上所述必可求得趾部之位置(如圖7-2, 4)，在趾部位置與下游邊界(海邊)之間內插數點，求出其勢能，應用海茲培格理論，可求出海水入侵線之側視圖(如圖7-3, 5)。

#### 7-4 範例

①非均勻限制含水層(圖7-2, 3)。

$$x = 2.0 \text{ km}, -1.0 \text{ km} \leq y \leq 1.0 \text{ km}, \phi = 21.5 \text{ m}$$

$$x = 0 \text{ km}, -1.0 \text{ km} \leq y \leq 1.0 \text{ km}, \phi = 20 \text{ m}$$

$$h_0 = 20 \text{ m}$$

$$B = 18 \text{ m}$$

$$K_1 = 280 \text{ m/day}$$

$$K_2 = 70 \text{ m/day}$$

$$K_3 = 140 \text{ m/day}$$

$$\gamma_s = 1025 \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma_t = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$x_w = 1.2 \text{ km} \text{ (抽水井橫座標)}$$

$$y_w = 0 \text{ m} \text{ (抽水井縱座標)}$$

$$Q = 0.0, 400, 600 \text{ m}^3/\text{day} \text{ (三種抽水量)}$$

②非均勻非限制含水層(如圖7-4, 5)。

$$x = 2.0 \text{ km}, -1.0 \text{ km} \leq y \leq 1.0 \text{ km}, \phi = 21.5 \text{ m}$$

$$x = 0 \text{ km}, -1.0 \text{ km} \leq y \leq 1.0 \text{ km}, \phi = 20 \text{ m}$$

$$h_0 = 20 \text{ m}$$

$$K_1 = 200 \text{ m/day}$$

$$K_2 = 70 \text{ m/day}$$

$$K_3 = 140 \text{ m/day}$$

$$\gamma_s = 1025 \text{ kg/m}^3$$

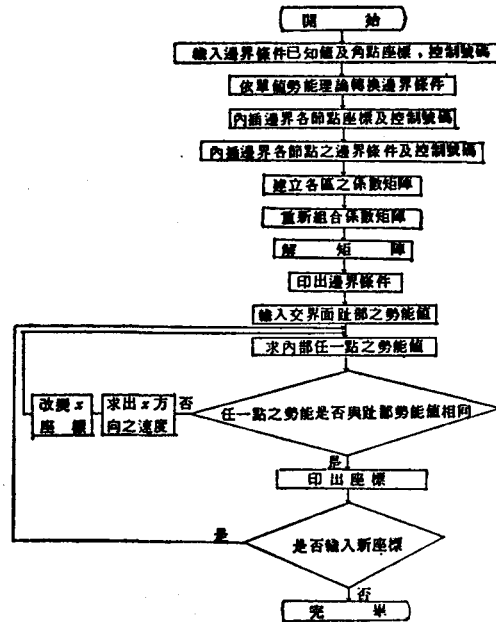
$$\gamma_t = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$x_w = 1.2 \text{ km} \text{ (抽水井橫座標)}$$

$$y_w = 0 \text{ km} \text{ (抽水井縱座標)}$$

$$Q_w = 0.0, 400, 600 \text{ m}^3/\text{day} \text{ (三種抽水量)}$$

7-5 BIEM 模擬海水入侵限制含水層或非限制含水層流程圖



#### 捌、討 論

本研究所採用邊界積分方程式法數學模式，經過理論驗證，實驗比較，再用於預測方面，處理上有某些技巧特此討論以利將來研究工作能順利進行。

(一)分割元素：分割元素時，若節點過少則誤差較高，如表5-1所示，過多則耗計算機之時間及空間，故在分割元素時，首先考量邊界之性質，在流速均勻勢能線性變化之處，如圖(5-1)之 $\Gamma_1$ ，圖(6-2)之II，其內插節點數2至4點即可，流速不均勻勢能非線性變化之處，如圖(5-1)之 $\Gamma_4$ ，

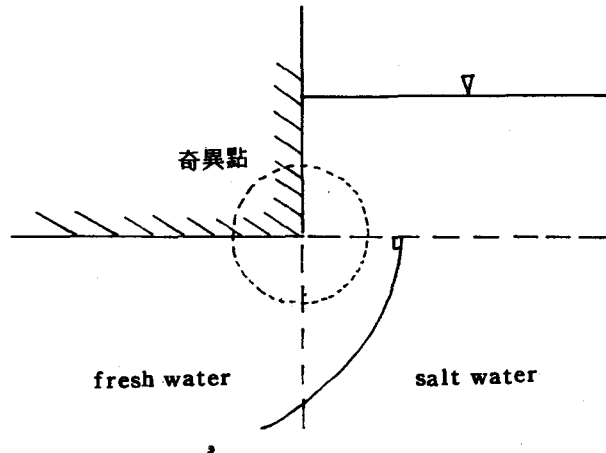


圖 8-1 黑蕭模型奇異點之位置圖

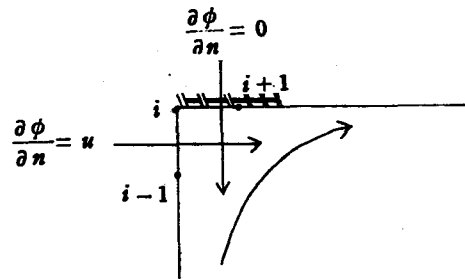


圖 8-2 透水邊界與不透水邊界之交角

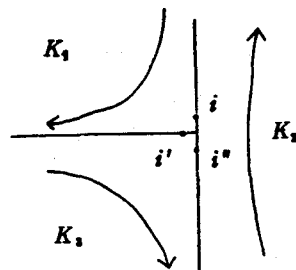


圖 8-3 非均質含水層區與區之交點

圖(6-2)之 I，宜增加節點，吾人所採用之節點數如圖(5-1)，如此方達高準確性又不使計算機容量及時間過大。

(二)差分法：實驗上達穩定須 5~15 分鐘，在數學模擬因採用之差分法為顯示法，在初期  $Dt=0.5$  中期  $Dt=2.5$ ，末期  $Dt=0.25$ ，差分時段短，執行時間長，在模擬黑蕭模型非限制含水層時，控制收斂較為困難，本文為了減小振盪，將 K 時段之  $(\frac{\partial\phi}{\partial n})^k$  與前一時段  $(\frac{\partial\phi}{\partial n})^{k-1}$  依權重分配如 (6-11b) 式，但仍為顯示法，故本文所用之差分有待改進，若能改為隱示法將可提高差分時段，節省執行時間，使 BIEM 模擬更為有效。

(三)奇異點之處理：在黑蕭模型模擬中，海水出口處有奇異點存在如圖(8-1)，本文以角流之理論處理該奇異點附近之勢能及速度分佈，旨在提高模擬之準確性，但在模擬中，吾人將海水入侵線延至水箱內，並假設入侵線與海水之水平面垂直交角，此假設使海水出口附近有若干誤差，奇異點之處理也就影響不大，但在其他方面，此種處理有很大幫助，故本文將此提出以茲參考。

(四)速度突變角點之處理：本文之積分皆沿順時針方向，在透水邊界與不透水邊界如圖(8-2)，或在非均質含水層區與區交界面之角點如圖(8-3)，因速度突變，故須以非常接近之兩點或三點代表該角點，如此在線性速度分佈上會造成若干誤差，臨近點愈接近誤差則愈小，為了消除誤差，在圖8-2 因不透水層之  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  已知為零，故臨近之兩點可以一點代替，若積分  $i-1$  至  $i$  點，則  $i$  點之  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  以透水邊界速度  $u$  代入，積分  $i$  至  $i+1$  點，則  $i$  點之  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  以零代入，如此可消去誤差，而在圖 8-3 中，因  $i$  及  $i'$  點及  $i'$  之速度皆未知，故目前此誤差僅能使其儘量減小。

(五)移動性邊界(moving boundary)問題之處理：對於移動性邊界問題，目前之數學模式皆難以處理，如有限元素法及有限差分法，因流場內部須分割元素，邊界一經移動，流場內部元素必須重新分割，雖然目前有限元素已有自動分割元素之技巧，但所須計算機空間及時間相當可觀，而本法因只在邊界分割元素，邊界一經移動，可由角點重新內插，計算機所須時間及空間皆較其他數學模式節

省很多準確性亦較其為高，本文之黑蕭模擬，海水入侵交界面就是移動性邊界標準例子，數學模擬結果均說明準確性極佳。

(六)現地海水入侵之處理：現地海水入侵，為三維空間之流場，而本文之數學模式僅適用於二維理想流場，故須配合單值勢能之理論，將三維流場轉換為二維流場，再依邊界積分方程法解析流場，決定海水入侵之趾部及海水入侵線之位置，如圖(7-2, 3) 所示，此種解析法必須應用三項假設(1)海水入侵線，必須明顯而無擴散現象，(2)杜布假設有效，(3)吉本——海茲培格理論適用，因此三項假設必造成誤差，尤其在淡水出海口處不為水平，故杜布假設必造成誤差，在限制含水層，應用吉本海茲培格理論求淡水流通厚度亦在淡水出海口造成誤差，同時海水入侵線亦非明顯界限，有擴散現象存在，若欲消除上列誤差，則須將 BIEM 發展至三維流場處理，甚至將擴散方程式納入控制方程式之中，此非本文討論之範疇仍有待來人之努力，BIEM 二維處理，亦如同二維之有限元素法，亦可應用單值勢能理論，求得海水入滲線之近似解，目前仍不失為良策。

## 玖、結 論

(1)本研究之目的在建立海水入侵之數學模式，就數學理論之觀點而言，此法求得者為近似解析解，本文第五章中曾用此法結果與理論值比較，第六章又與實驗值相比較，由二種比較之結果中可說明此法準確性極高，而其輸入資料簡單、方便，僅需輸入含水層特性之資料及不規則斷面之角點座標、控制號碼、邊界條件，其餘角點與角點間之節點座標、控制號碼、邊界條件均可自動用內插法求得之，免去一般數學模式繁雜的輸入資料，一般工作人員容易學習，實用性頗高。

(2)本法求內部任一點之解，內部不必分割元素，對於僅需少數點之解之問題或僅需邊界而無需內部解之問題，如求壩基之壓力，求壩體之入滲線或求海水入侵交界面等時，用此法較其他方法節省計算機之容量及時間，可配合牛頓——瑞福生法，經過幾次收斂求得座標，直接劃出流網，對於流場之研究很有幫助，可謂極有力之工具。

因本法目前僅適用於拉普拉氏 (Laplace) 或普依松 (Poisson) 控制方程式，對於變量流或其他偏微分方程式則不能適用，且現地為三維流場，

雖然地下水垂流速很小，可應用杜布假設簡化為二維之流場，但在其他應用方面，則有時非三維不可時，即感到困難，所以將來發展三維之 BIEM 勢在必行，唯尚需極多之研究努力，由於上述的缺陷，此法目前仍不能完全取代數值方法如有限元素法等，使用 BIEM 法必須選擇適當之場合與問題，始能充分發揮其長處與優點。

### 拾、建 議

邊界積分方程法具有準確性高，所需電腦容量小之優點，但控制方程式僅為拉普拉氏方程式為其缺點，此優缺點正與有限元素法相反，若能將邊界積分方程式法與有限元素法合用，則會有很大的效果，以溢洪道為例，結構物附近屬邊界層，邊界層外之流場為拉普拉氏流場，先以邊界積分方程法解析拉普拉氏流場，定出溢洪道邊界層之邊界條件，再以此邊界條件應用有限元素法或 Prandtl 理論處理邊界層內之流況，同理雲林地區海水入侵之處理，也可用最近之資料配合邊界積分方程法求出北港附近一帶之邊界條件，再以此邊界條件，配合有限元素法，以擴散方程式，推求海水擴散至北港一帶之鹽分等高線，以求得較單值勢能理論為準確之海水入侵範圍，解決有限元素法，因區域過大，計算機容量不夠而難於處理。

### 拾壹、參考文獻

1. 曹以松：海水入侵沿海地區地下含水層之現象及其防治方法。臺灣水利十七期，民國五十八年。
2. 曹以松：臺北地區過度抽取地下水所引起之地層沈陷及其補救方法之研究。水利割刊第六期，民國五十八年。
3. 曹以松、譚義績：地下水模型應用於多層受壓含水層之研究。農業工程研究中心，民國六十八年。
4. 曹以松、陳京台：雲林地區地下水數學模式之模擬與應用。臺灣大學農業工程研究所碩士論文，民國六十九年。
5. 曹以松、蔡振源：沿海地區海水入侵之數學模式，臺灣大學農業工程研究所碩士論文，民國七十一年。
6. 曹以松、沈宗華：沿海地區海水入侵模式之研究，農業工程研究中心，民國七十一年。
7. 林聰悟：工程基本程式，新學識文教出版中心，民國六十九年。
8. 何興亞：以數值方法解析溢洪道流場。臺灣大學土木工程研究所碩士論文。民國七十一年。
9. Liggett, J. A., "Location of Free Surface in Porous Media", Jour. Hydr. Divs. ASCE. Vol. 103, Hy. 4, 1977.
10. Liggett, J. A. and Liu, P. L.-F., "Unsteady Interzonal Free Surface Flow in Porous Media", Water Resources Research, Vol. 15, No. 2, 1979.
11. Liggett, J. A. and Liu, P. L.-F., "Singularities in Darcy Flow Through Porous Media", Jour. Hydr. Divs., ASCE, Vol. 106, Hy. 6, 1980.
12. Liu, P. L.-F. and Liggett, J. A., "An efficient Numerical Method of Two-dimensional Steady Ground Water Problem", Water Resources Research, Vol. 14, No. 3, 1978.
13. Liu, P. L.-F. and Liggett, J. A., "Boundary Solution to Two problems in Porous Media", Jour. Hydr. ASCE. Vol. 105, Hy. 3, 1979.
14. Liu, P. L.-F. and Liggett, J. A., "Numerical Stability and Accuracy of Implicit Integration of Free Surface Ground Water Equations", Water Resources Research, Vol. 16, No. 5, 1980.
15. Liu, P. L.-F., Cheng, A. H.-D. and Liggett, J. A., "Boundary Integral Equation Solution to Moving Interface Between Two Fluids in Porous Media", Water Resources Research, Vol. 17, No. 5, 1981.
16. McWhorter, D. B. and Sunada, D. K., "Ground-Water Hydrology & Hydraulics", 1977.
17. Rumer, R. R. and Harleman, D. R. F., "Intruded Salt Water Wedge in Porous Media", Jour. Hydr. ASCE. Vol. 89, Hy 6, 1963.
18. Sa Da Costa, A. A. G. and Wilson, I. L., "A Numerical Model of Seawater Intrusion in Aquifers", MIT Report, No. 247, 1979.
19. Segerlind, L. J., "Applied Finite Element Analysis", 1976.
20. Shamir, U. and Dagan, G., "Motion of the Seawater Interface in Coastal Aquifer—A

- numerical Solution", Water Resources Res., Vol. 7, No. 3, pp. 644-657, 1971.
21. Singh, R., "Prediction of Mound Geometry Under Recharge Basins", Water Resources Research, Vol. 13, No. 4, 1979.
  22. Strack, O. D. L., "A Single-Potential Solution for Reginal Interface Problems in Coastal Aquifers", Water Resources Research, Vol. 12, No. 6, 1976.
  23. Strakgold, I., "Green Function and Boundary Value Problems", John Wiley & Sons, Inc., 1979.
  24. Taighbenu, A. E., "The Boundary Integral Equation Method Applied to Seawater Intrusion in Aquifers" Ms. Thesis, Cornell University, 1983.

(上接第 40 頁)

## 十二、參考文獻

1. 灌溉排水工程規劃手冊(臺灣省水利局叢刊之六十六)臺灣省水利局委託中國農業工程學會編1967年3月
2. 桃園農田水利會七十二年灌溉計畫書  
桃園農田水利會管理組
3. 71年度曾文、烏山頭水庫系統灌區灌溉計畫書  
嘉南農田水利會管理組 1981年5月
4. CHOW, LEE "Development of rotation irrigation in Taiwan", J. Irrig. Drain Div., ASCE, Sept 1960. Vol 86, IR 3.
5. 溫理仁 水稻灌溉系統容量之決定與整田用水之管理 農業工程學報第18卷第1期 1972年4月
6. 鄭俊澤 灌溉計畫 臺灣省水利局印 1974年8月
7. 鄭俊澤 水稻灌溉系統營運配水計畫之進一步研究 臺灣水利28卷2、3期抽印本 1980年6月
8. 林俊男 水稻輪流灌溉計畫表之研討 農業工程研究中心研究報告 AERC-78-RR-06 1978年9月
9. 69年度臺灣各農田水利會資料輯  
臺灣省農田水利協進會編印 1981年6月
10. Tai Tsui-yuan "Rotational Irrigation Practice" 嘉南農田水利會 1964年1月
11. L. J. Wen "Improvement of Irrigation Systems and Water Management in Taiwan" Economic Review No 204 Nov-Dec 1981
12. 曹以松 農業機械化與水利設施配合之研究 農業工程研究中心報告AERC-80-RR-08 1980年4月
12. 農業機械化與農業技術之配合 中國農業工程學會學術研討會 專題二 1978年9月
14. 尤塔川 水稻整田與渠道容量之研究 臺灣大學農業工程研究所碩士論文 1981年6月
15. 嘉南農田水利會輪灌配水計算  
嘉南農田水利會管理組 1982年5月