

# 專 論

## 地 盤 下 陷 之 漸 近 解

### Asymptotic Solution on Land Subsidence

淡江大學水利系教授

施 清 吉

#### 摘 要

當時間  $t$  趨近於無窮大時，經由半徑為  $R$  的抽水管，自受制飽和含水層之超額地下水抽取量  $Q$  與地盤下陷  $\eta$  間的漸近解為

$$\frac{16\eta D_0}{3\Phi R^2} \approx \left(\frac{4tD_0}{R^2}\right) \exp\left\{-\frac{R^2}{4D_0t} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \left\{1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4D_0t}\right)\right\}$$

式中  $D_0$  與  $N_0$  分別定義於式 (18) 與 (19)。緊接管壁附近之終極下陷量  $(\eta|_{r=R})_{max}$  等於  $3QN_0/16\pi D_0$ 。根據臺北市盆地地下土層之實測資料，取其範圍之平均值，漸近解推測地層下陷 11.31 公分，而實測下陷為十四公分。

#### Abstract

The asymptotic solution on land subsidence due to an overdraft of groundwater from a confined saturated aquifer is obtained as follows:

$$\frac{16\eta D_0}{3\Phi R^2} \approx \left(\frac{4tD_0}{R^2}\right) \exp\left\{-\frac{R^2}{4D_0t} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \left\{1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4D_0t}\right)\right\}$$

where  $R$  is the radius of the well.  $Q$  the pumping discharge,  $\eta$  the amount of land subsidence, and  $D_0$  and  $N_0$  are defined in Equations (18) and (19), respectively. The ultimate subsidence around the well, represented by  $(\eta|_{r=R})_{max}$ , is equal to  $3QN_0/16\pi D_0$ . Based upon the field data of soil properties of the confined saturated aquifer of the Taipei City Basin and its overdraft rate, the asymptotic solution predicts that the magnitude of land subsidence is equal to 11.31 cm which is remarkably close to 14 cm as obtained from field observation.

#### 一、前 言

近幾年來，由於臺灣工商業之突飛猛進，需水量突增，自來水廠又無法充分供應各方面的需求，於是造成了大量且廣泛自受制飽和含水層 (Confined saturated aquifer) 抽取地下水。此外，再加上地面上的建築物如雨後春筍般的興建，增加含水層之負荷；因此，地盤下陷 (Land Subsidence) 已陸續地在全省各地發現。臺灣絕大部分水資源的供應都靠地面水，為了儲存地面水，本省已先後興建了數十座水庫，目前已很難再找到適當的壩址，所以其他方面之取得水資源已經是不可避免的。加上本省西海岸有許多河川沖積地。地下蘊藏了相當豐富的地下水，這多多少少可彌補本省水資源之短缺。總之，為了本省水資源的需求且又為了預防因超額 (Overdraft) 抽取地下水引起地盤下陷所帶來的各種災害，探討地盤下陷與超額抽取地下水間的關係就日益重要了。關於這一方面的研究，無論是理論上的探討或是

實測資料之分析，均先後見諸於報章雜誌與各種學術刊物。本論文擬從已建立的數學模式，進一步尋求在時間趨近於無窮長時的漸近解 (Asymptotic solution)。易言之，如果吾人不停止地抽取地下水，則地盤下陷與超額地下水抽取量間的關係如何？由此關係再深入分析下陷是否有一個終極值 (或極限值) 存在？這是一個很重要的步驟，因為照理而言，不管抽取地下水的時間多長，地盤下陷應該有一個極限。如果由數學模式推演而得之漸近解無法函蓋這一事實，則理論分析就有待商榷的必要。如果漸近解能夠提供這一極限值，那麼吾人可根據漸近解之推測結果與臺北市盆地實測資料，分析與比較二者之間的差異，由此而了解數學模式的可靠性。

## 二、理論分析

考慮介於上、下二個不透水層間的一受製飽和含水層 (Confined saturated aquifer)，由於穿越不透水層的深水井，經年累月的不斷自飽和含水層抽取地下水，使含水層內之孔隙逐漸處於真空狀態，其範圍愈來愈大，無法再承受得了地表上之結構物和含水層、通氣層 (Aeration zone) 等之龐大載重，受製飽和含水層就逐漸被壓縮，而最後造成一般所謂的地盤下陷 (Land subsidence)。在飽和含水層的受壓過程中，假設不透水層上面土層的厚度保持不變，則受製含水層厚度的變化即相當於地盤下陷的幅度，而此厚度的變化與超額地下水 (Overdraft of groundwater) 抽取量間的關係如下 [1]。

$$\frac{P_0(1+e)(\alpha n + \frac{\partial n}{\partial p} + \beta n)}{C_0 H} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{K_x P_0(1+e)}{H C_0 r} \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{K_y P_0(1+e)}{H C_0 r} \frac{\partial H}{\partial y} \right] - \frac{Q}{\pi R^2 H} \quad (1)$$

式中  $P_0$ ：土壤內之過負荷壓力 (Overburden pressure)，  
 $e$ ：土壤孔隙比 (Void ratio)，  
 $\alpha$ ：土壤顆粒之垂直壓縮係數 (Vertical compressibility)，  
 $\beta$ ：水之壓縮係數 (Compressibility)，  
 $n$ ：土壤孔隙率 (Porosity)，  
 $C_0$ ：土壤之壓縮指標 (Compression index)，  
 $H$ ：受製飽和含水層之厚度，  
 $K_x$ 、 $K_y$ ：分別為土壤沿  $x$ 、 $y$  兩軸之滲透係數 (Permeability)，  
 $x$ 、 $y$ ：分別為空間座標， $x$ - $y$  平面垂直於重力，  
 $r$ ：水的單位體積重，  
 $Q$ ：超額地下水抽取量，  
 $R$ ：深水井半徑，  
 $t$ ：時間。

假設受製飽和含水層的厚度非常厚，則吾人可假設

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \gg \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 / H$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \gg \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 / H \quad (2a, b)$$

基於這二個假設，式 (1) 可簡化為

$$\frac{P_0(1+e)(\alpha n + \frac{\partial n}{\partial p} + \beta n)}{C_0 H} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{K_x P_0(1+e)}{H C_0} \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{K_y P_0(1+e)}{H C_0} \frac{\partial H}{\partial y} \right] - \frac{Q}{\pi R^2} \quad (3)$$

由於超額抽取地下水而引起的地盤下陷，主要係來自於受製飽和含水層厚度之減小，而其上的土層厚

度在下陷過程中幾乎保持不變；因此，地盤下陷量可以受制飽和含水層之厚度的減少量來表示。令在未抽取地下水時，受制飽和含水層的原來厚度為  $H_0$ ，則地盤下陷  $\eta$  即為

$$\eta - H_0 = H \quad (4)$$

且  $\eta < H_0$ 。此外，吾人又假設在下陷過程中，式 (3) 之土壤或地質的各有關性質均保持不變；同時這些性質可以未抽取地下水，或地盤未沉陷前之初時情況予以估計。其次，吾人再假設滲透係數沒有方向性，即  $K = K_x = K_y$ ，所以

$$D_0 = \frac{K}{r(\beta n + \frac{\partial n}{\partial p} + \alpha n)} \Big|_{t=0} \quad (5)$$

與

$$N_0 = \frac{C_0}{P_0(1+e)(\beta n + \frac{\partial n}{\partial p} + \alpha n)} \Big|_{t=0} \quad (6)$$

同時，令

$$\Phi = \frac{Q}{\pi R^2} N_0 \quad (7)$$

將式 (5)、(6) 與 (7) 代入式 (3)，則式 (3) 可變為一含 Source 之擴散方程式 (Diffusion equation)，即

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D_0 \nabla^2 \eta + \Phi \quad (8)$$

式中  $\nabla$  代表拉普拉氏運算符號 (Laplace operator)。

式 (3) 為一相當複雜非線性而又非齊次偏微分方程式 (Nonlinear and nonhomogeneous partial differential equation)，因為式中有關土壤性質的係數，例如  $n$ 、 $e$ 、 $P_0$ 、 $K$ 、 $C_0$ 。幾乎都不是始終保持不變的常數。除非在下述非常簡單與理想情況下，吾人可稍為了解分析解 (Analytical solution) 之概貌外，式 (3) 是很難獲得分析解的。此外，在整個地盤下陷過程中，這些土壤性質的變化如何亦不為人所知。就作者所知，到目前為止，在這一方面的基本研究與探討幾乎無從找到；因此，引用式 (3) 於實際情況上之推測，尚有一段遙遠的路途。然而，近十幾年來，臺北市盆地地盤下陷與超額抽取地下水的實測資料相當豐富，吾人可利用這些資料同時配合土壤分析的資料，就式 (8) 之漸近解 (Asymptotic solution) 與實測的地盤下陷資料做一比較與分析。

如圖一所示之極座標 (Polar coordinate system)，假設地盤下陷量  $\eta$  不沿角度改變，即  $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0$ ，則式 (8) 可簡化為

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) \right] + \Phi \quad (9)$$

式中  $r$  為半徑， $\theta$  為角度。在此情況下式 (9) 的初時與邊界條件 (Initial and boundary conditions) 分別為

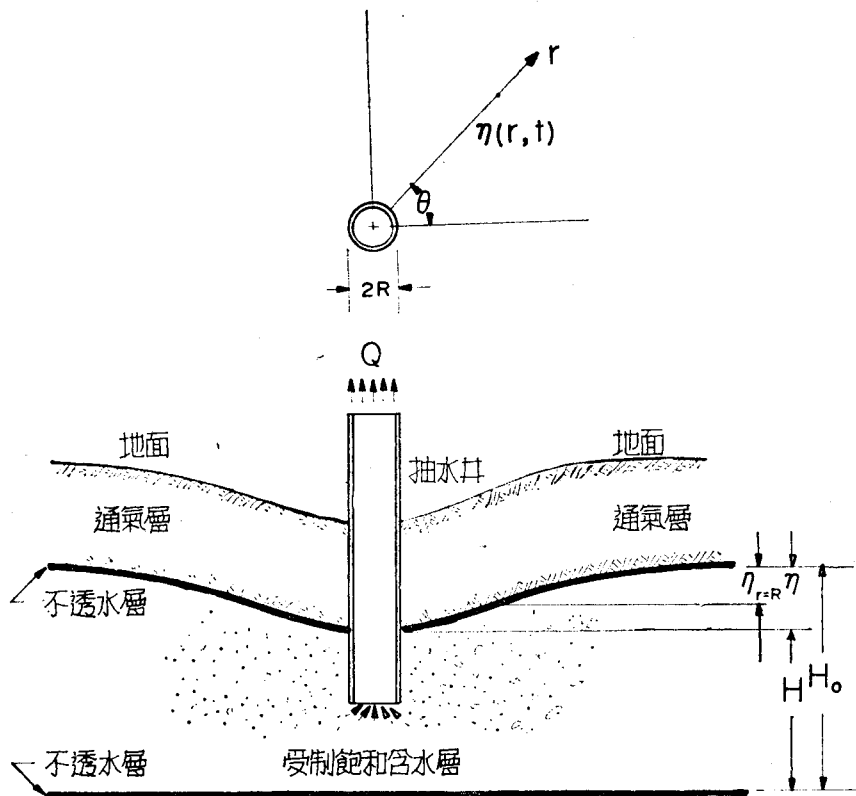
$$t < 0; \eta(r, t) = 0 \quad (10)$$

$$\text{與 } t \geq 0; r \rightarrow \infty, \eta(r, t) = 0 \quad (11a)$$

$$r = 0, \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0 \quad (11b)$$

滿足條件 (10) 與 (11a, b)，式 (9) 之解為 [2]

$$\eta(r, t) = \int_0^t \left\{ \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{4D_0(t-\tau)}\right]}{2D_0(t-\tau)} \int_0^\infty \xi \Phi \exp\left[-\frac{\xi^2}{4D_0(t-\tau)}\right] \cdot J_0\left[\frac{r\xi}{2D_0(t-\xi)}\right] d\xi \right\} d\tau \quad (12)$$



圖一 地盤下陷之示意圖

式中  $J_0$  代表階次為零的第一種 Bessel 函數。假設超額地下水抽取量  $Q$  為常數，則由式 (7) 吾人得知

$$\Phi(\xi, t) = \begin{cases} \text{常數}; & \xi \leq R \\ 0 & ; \xi > R \end{cases} \quad (13)$$

更改式 (12) 之積分順序，且利用式 (13)，則地盤下陷量為

$$\frac{\eta}{\Phi} = \int_0^R \left\{ \int_0^\xi \frac{\xi \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4D_0(t-\tau)}\right]}{2D_0(t-\tau)} J_0\left[\frac{r\xi}{2D_0(t-\tau)}\right] d\tau \right\} d\xi \quad (14)$$

除非利用數值分析方法計算式 (14) 之積分外，式 (14) 之分析解 (Analytical solution) 無法獲知。然而，由條件 (11a, b) 吾人得知遠離抽水井的地盤下陷趨近於零，而最大的下陷量應當在緊接抽水井的附近。其次，以實際上的應用立場而言，地盤下陷的分析重點在於經過長時間的抽取地下水後，地盤下陷是否有個終極下陷量存在？或是會毫無止境地一直陷下去。這就意味吾人的分析應該屬於時間趨近無窮大的漸近情況 (Asymptotic state)，或是代表時間的無因次參數 (Dimensionless parameter)

趨近於無窮大。所以，以  $\zeta = \frac{r\xi}{2D_0(t-\tau)}$  代入式 (14) 等號右邊的第二個積分，吾人可得

$$\int_0^\xi \frac{\xi \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4D_0(t-\tau)}\right]}{2D_0(t-\tau)} J_0\left[\frac{r\xi}{2D_0(t-\tau)}\right] d\tau = \int_0^\infty \frac{\xi}{2D_0\zeta} \exp\left[-\frac{(r^2 + \xi^2)\zeta}{2r\xi}\right] J_0(\zeta) d\zeta \quad (15)$$

其次，由 Bessel 函數的微分通式，即  $\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$  (式中  $n$  代表大於  $-1$  的任何整數) 與利用部分積分，逐次積分式 (15)，並且以漸近展開式 (Asymptotic expansion) 取代各不同階次的 Bessel 函數 [3]，則吾人即可得式 (15) 的漸近展開式 [4]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} \frac{\exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4D_0(t-\tau)}\right]}{2D_0(t-\tau)} J_0\left[\frac{r\xi}{2D_0(t-\tau)}\right] d\tau = \exp\left[-\frac{(r^2 + \xi^2)}{4D_0 t}\right] \left(-\frac{3}{8} - \frac{\xi}{D_0}\right) \left\{1 + \frac{3}{24} \left(\frac{r^2 + \xi^2}{4D_0 t}\right) + \dots\right\} \quad (16)$$

如大刮弧內所示的漸近展開式，第一項是“1”，第二項是  $-\frac{3}{24} \left(\frac{r^2 + \xi^2}{4D_0 t}\right)$ ；當時間趨近於無窮大時，吾人以第一項來代表式 (15) 的近似值，而所忽略的大小等級 (The order of magnitude) 為  $O\left(\frac{r^2 + \xi^2}{4D_0 t}\right)$ ，其誤差也趨近於零。所以將式 (16) 大刮弧內的第一項所組成的漸近展開式代入式 (14)，積分後吾人即可得

$$\frac{16nD_0}{3\Phi R^2} = \left(\frac{4tD_0}{R^2}\right) \exp\left\{-\frac{R^2}{4D_0 t} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \left\{1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4D_0 t}\right)\right\} \quad (17)$$

式 (17) 含一無因次地盤下陷  $\eta D_0 / \Phi R^2$ ，而空間座標與時間分別以  $r/R$  與  $tD_0/R^2$  表示。此式敘述在不同時間與位置上的地盤下陷情況。以同一時間而言，最大的下陷發生於緊接抽水管的附近，即  $r=R$ ，但隨着半徑的增加，下陷量依指數型式逐漸趨近於零。其次，雖然解 (17) 之獲得是基於時間趨近於無窮大的情況求得；然而，由於式的形式看來，吾人極易發現當時間等於零時，下陷也等於零，這就符合初時條件 (10)。易言之，解 (17) 似乎也可適用於剛剛抽取地下水時之前期，關於這一點，吾人必須依賴實驗或實測資料之驗證與比較後，才可進一步下結論。

### 三、討論與分析

由定義吾人得知  $n = V_v/V$  ( $V$  與  $V_v$  分別代表土壤的總體積與其內的孔隙體積；總體積包括顆粒體積  $V_s$  與孔隙體積，前者幾乎不受壓力的影響。因此， $\frac{\partial n}{\partial p} = \frac{1-n}{V} \frac{\partial V_v}{\partial p}$  或  $\frac{\partial n}{\partial p} = \beta_A(1-n)$ ，式中  $\beta_A$  代表空氣之壓縮係數，大致等於水壓縮係數  $\beta$  的 20000 倍 [5]。參閱式 (5) 與 (6) 吾人即可得知  $(\beta n + \frac{\beta n}{\partial p} + \alpha n) = \left[\beta n - (1-n)\beta_A + \alpha n\right]$ ，所以  $(\beta n + \frac{\partial n}{\partial p} + \alpha n)$

代表土壤內三種不同相之物質的壓縮係數之和。一般而言，顆粒與水兩者的壓縮係數非常接近， $\alpha = 1.39 \times 10^{-8} \text{ ft}^2/\#$ ，而  $\beta = 2.17 \times 10^{-8} \text{ ft}^2/\#$ ，但是  $\alpha$  與  $\beta$  遠比空氣的壓縮係數小的多，所以式 (5) 與 (6) 只須考慮空氣壓縮係數的影響，水與顆粒的壓縮係數可略而不計，在此情形下，式 (5) 與 (6) 可分別簡化為

$$D_0 = \frac{K}{\gamma(1-n)\beta_A} \quad (18)$$

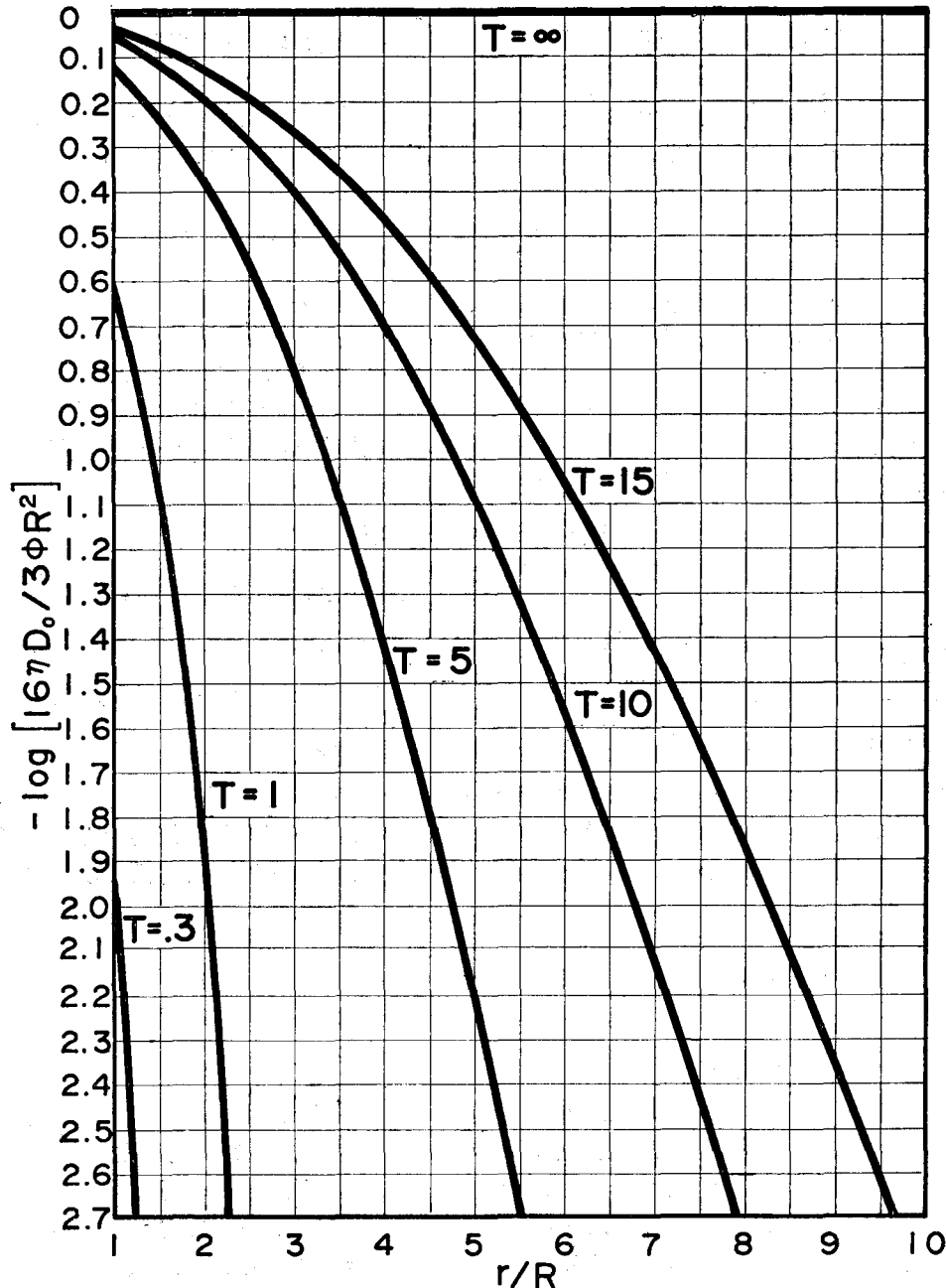
與

$$N_0 = \frac{C_0}{P_0\beta_A(1-n)(1+e)} \quad (19)$$

依據受制飽和含水層內土質的一般性質，吾人可由式 (18) 與 (19) 大略了解  $D_0$  與  $N_0$  之值，並且估計它們的可能變化範圍，由此可探討式 (17) 內，無因次參數  $R^2/4D_0 t$  與  $r/R$  的大概範圍，另一方面可進一步探討解 (17) 的可靠性。一般而言，受制飽和含水層是由細砂與卵石滲雜而成，其間夾帶少量泥。純砂的孔隙率  $n$  可高至 60% 左右，而純卵石的孔隙率大概在 30% 左右。總之，不管含水層內的土質成分是如何組成，孔隙率的變化並不太懸殊。另一方面，滲透係數的變化幅度  $K$  就相當大了。以純砂而言，滲透係數可低至  $10^{-4}$  甚至  $10^{-5} \text{ cm/sec}$  左右 ( $328 \times 10^{-6}$  或  $328 \times 10^{-7} \text{ ft/sec}$ )；相反

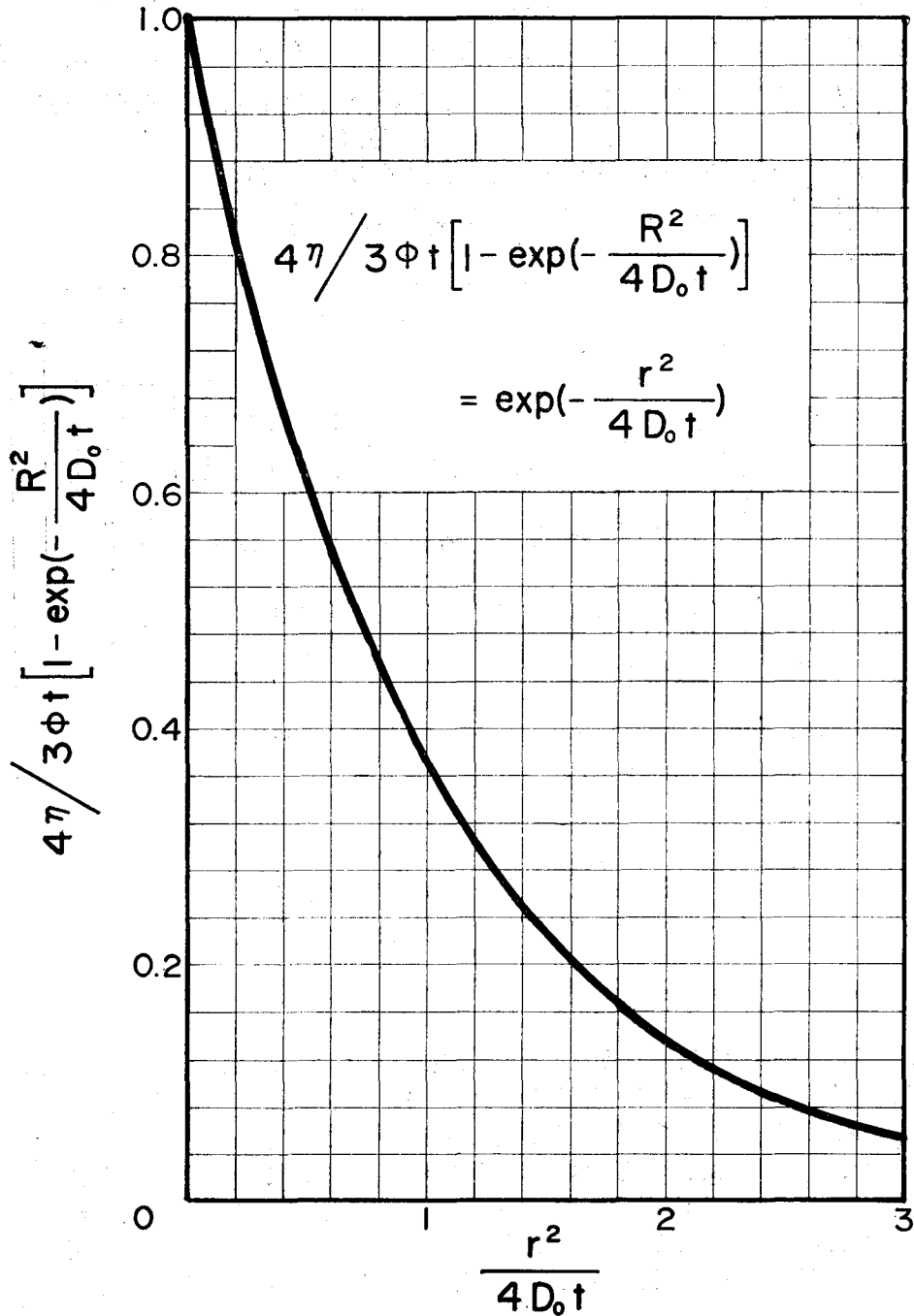
地，純卵石的滲透係數可高至 1 或 10 cm/sec 左右 ( $3.28 \times 10^{-2}$  或  $3.28 \times 10^{-1}$  ft/sec)。空氣之壓縮係數  $\beta_A$  以水的 20000 倍計，大約為  $\beta_A = 2.1703 \times 10^{-3} \times 20000 = 4.34027 \times 10^{-4}$  ft<sup>2</sup>/#， $\gamma$  以 62.4#/ft<sup>3</sup> 計。如果純砂與純卵石這二種極端土質的孔隙率  $n$  分別以 60% 與 30% 計，對應的滲透係數就分別等於  $3.28 \times 10^{-7}$  與  $3.28 \times 10^{-1}$  ft/sec，則擴散係數  $D_0$  大致自  $3.028 \times 10^{-5}$  至  $1.731 \times 10^1$  ft<sup>2</sup>/sec。其次，假設抽水管的半徑大致由  $\frac{1}{2}$  英尺至一英尺，時間  $t$  取自一天至一年。則在這三種因素（擴散係數、時間與半徑）的可能變化範圍之下， $R^2/4D_0t$  的變化範圍為 10 的零次方至 10 次方左右。

式 (17) 的關係表示於圖二，此圖分別以  $r/R$  與  $\log \left( \frac{16\eta D_0}{3\phi R^2} \right)$  為水平與垂直座標軸，以  $T = 4D_0t/R^2$



圖二 地盤下陷之漸近解

為參數， $r/R=1$  代表緊接管壁。圖二顯示下陷的範圍隨著時間的增加而逐漸擴大與加深。由於垂直座標軸採用對數，所以  $t=T=0$  時下陷等於 0 的現象無法表示於圖上。如果圖二不採用對數而改用一般座標且自  $16\gamma D_0/3\Phi R^2=0$  起算，則  $T=0$  即相當於通過  $16\gamma D_0/3\Phi R^2=0$  的水平軸。但由於無因次下陷量  $16\gamma D_0/3\Phi R^2$  對不同的  $r/R$  值之變化太大，故圖二的垂直座標採用對數。剛抽取地下時（即  $T$  值比較小），下陷的範圍只有在抽水管的四週，而且緊接管壁附近的下陷也並不很明顯（參閱  $T=0.3$  的曲線）

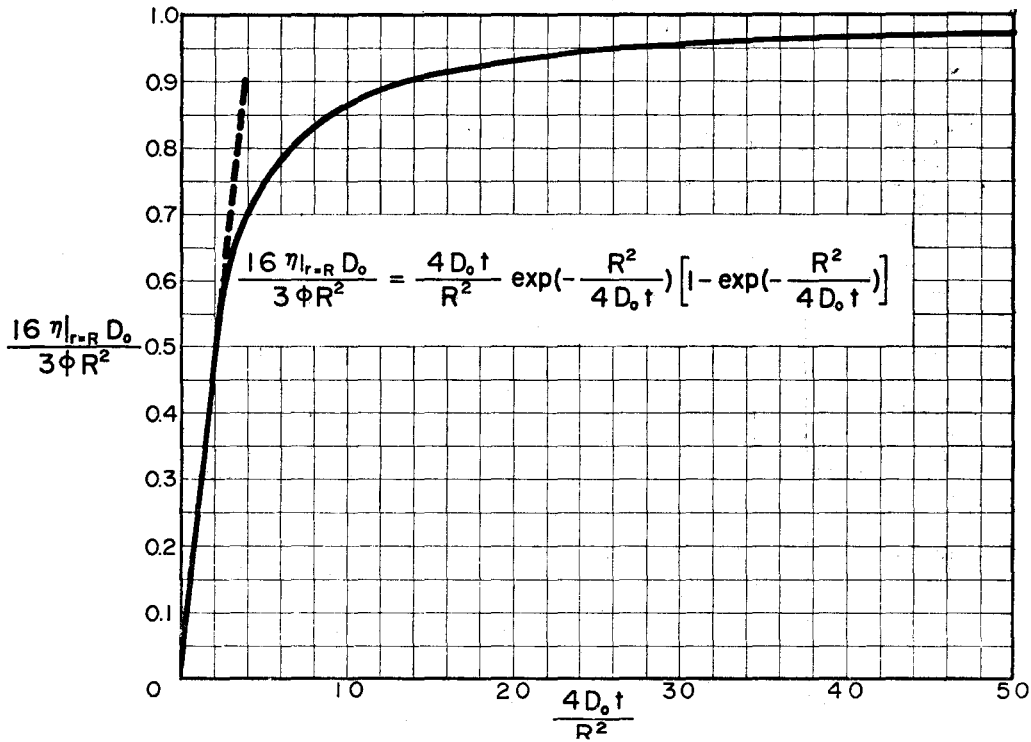


圖三 地盤下陷之漸近解

；可是時間增加後（即  $T$  值增加），下陷的範圍也愈來愈大，同時下陷的現象也愈顯著。圖上的同一條曲線代表相同的  $T$  值，隨着  $T$  值的增加，曲線移動的方向正顯示了這種傾向。理論上，通過  $\log(16\eta D_0/3\Phi R^2)=0$  或  $16\eta D_0/3\Phi R^2=1$  的水平線（以粗實線表示）代表時間或  $T$  趨近於無窮大的漸近情況。易言之，達到了這種情況時，任何地方的下陷都相同，等於  $16\eta D_0/3\Phi R^2$ 。總之，緊接管壁之附近（ $r=R$ ）先下陷，而後管的四週再下陷，而其下陷量也跟着逐漸增加。事實上的地盤下陷是這種情形的，而式 (17) 的結果也顯示同相的情形，這種吻合的原因是由於式 (1) 或 (8) 為一擴散方程式。其次，為了探討同一時間不同位置的下陷情況，吾人可以另一形式表示式 (17)，參閱圖三，以  $\frac{16\eta D_0}{3\Phi R^2} / \frac{4tD_0}{R^2}$   $[1-\exp(-R^2/4D_0t)]$  與  $r^2/4D_0t$  分別為垂直與水平座標軸。圖三顯示，隨着半徑的增加，下陷是依指數型而遞減，如果半徑  $r$  趨近於無窮大，則下陷也跟着趨近於 0。

緊接抽水井附近的下陷量  $\eta|_{r=R}$ ，令  $r=R$  即可由式 (17) 求得，即

$$\frac{16\eta|_{r=R}D_0}{3\Phi R^2} = \frac{4tD_0}{R^2} \exp\left[-\frac{R^2}{4D_0t}\right] \left\{1 - \exp\left[-\frac{R^2}{4D_0t}\right]\right\} \quad (20)$$



圖四 管壁附近之下陷量

圖四展示  $16\eta|_{r=R}D_0/3\Phi R^2$  與  $4tD_0/R^2$  兩者之間的關係。此圖顯示大致在  $T$  ( $T=4tD_0/R^2$ ) 小於 1 以內（此時  $16\eta|_{r=R}D_0/3\Phi R^2=0.5$ ），管壁附近之下陷  $\eta|_{r=R}$  似乎以非常快的等速率下陷，而後下陷速率愈來愈緩慢，超過  $T=14$  後（此時  $16\eta|_{r=R}D_0/3\Phi R^2=0.9$ ），就以非常緩慢的速率趨近於 1。因此，下陷速率的變化大致可分成三個不同的階段：即  $0 \leq T < 1$ ， $1 \leq T < 14$  與  $T \geq 14$ 。至於在某一時刻  $t$ ，下陷的速率到底要在哪一個階段：非常快的等速率，稍緩的變速率，或非常緩慢地趨近於 1，完全決定於擴散係數  $D_0$  之大小。高擴散係數的卵石層遠比低擴散係數的砂質土層更快趨近於定型而不再沉陷。這是由於卵石層質地硬孔隙少。一旦受壓下陷，很快地就會下陷，加上孔隙少，所以一下子就會被壓實而不能再下陷。相反地，砂質土層質地鬆懈又多孔隙，要到完全被密壓且無法再下陷須要相當長的時間。易言之，抽水形成孔隙後，卵石層只需要很短的時間就被壓實而不再下陷了；而砂質土層下陷的現象却要維持一段



相當長的時間。如果管之半徑以 2 英吋計，卵石層與砂質土層的滲透率分別以  $10$  與  $10^{-5}$  cm/sec 計，在管壁之附近下陷到全部的下陷量之一半（此地以無因次下陷計，即  $16\eta|_{r=R}D_0/3\Phi R^2=0.5$ ），所需的時間分別為  $t=R^2/4D_0=0.127$  秒與  $127000$  秒（大約一天半）。至於真正下陷多少，則可由  $\eta|_{r=R}=0.5\times 3\Phi R^2/16D_0$  求得。總之，下陷速率的控制因素完全決定於擴散係數，但下陷的量尚需考慮其他的因素。

如圖四所示，未開始抽水時（ $t=0$  或  $T=0$ ），緊接管壁附近的下陷等於零，而後就一直增加，直到  $T=149$  時， $16\eta|_{r=R}D_0/3\Phi R^2=0.9899880$ 。如果以相同的抽水量繼續不斷地抽取地下水，時間趨近於無窮長時，在管壁附近下陷的終極值  $(\eta|_{r=R})_{max}$ ，可由式 (20) 求得

$$\frac{16(\eta|_{r=R})_{max}D_0}{3\Phi R^2} = \frac{4tD_0}{R^2} \left\{ 1 - \frac{R^2}{4D_0t} + \dots \right\} \left\{ \frac{R^2}{4D_0t} + \dots \right\} = 1 \quad (21)$$

這是一個很有趣且很有價值的推測。事實上，只要含水層內的水沒被完全抽光，地盤會因不斷地抽取地下水而繼續不停地下陷；但是下陷的速率會愈來愈緩慢。水雖然會陸陸續續地被抽上來，可是含水層內的砂、卵石是不致於被抽上來，到後來含水層的厚度就變為受龐大載重壓密後結結實實的土層，這也就是含水層最後的終極土層厚度。易言之，受制飽和含水層是應該有一個下陷的終極值  $(\eta|_{r=R})_{max}$ 。由式 (21)、(20)，吾人可發現漸近解 (17) 符合這個事實。從這一分析看來，此論文所提的超額抽取地下水而引起的地盤下陷之數學模式，無論其依據的假設與構想，以及最後的關係式應該是正確的。此外，臺北市盆地地下陷的實測資料尚可提供進一步的比較與證實，特將討論於后。

由式 (21)，(7)，(8) 與 (9)，吾人得知終極下陷量  $(\eta|_{r=R})_{max}$  為

$$(\eta|_{r=R})_{max} = \frac{3}{16} \frac{QN_0}{D_0\pi} = \frac{3}{16} \frac{Q}{\pi} \frac{\gamma C_0}{P_0K(1+e)} \quad (22)$$

上式顯示終極下陷量  $(\eta|_{r=R})_{max}$  與抽水量  $Q$  成正比，這是很容易意料得到的。其次，終極下陷量與  $N_0$  成正比，而  $N_0 = C_0/P_0\beta_A(1-n)(1+e)$ 。如果土層愈壓密，壓密指標  $C_0$  就愈減小，而孔隙壓却愈提高，在這種情況下，能夠下陷的幅度當然減小。這說明了為何終極下陷量與  $N_0$  成正比的緣故，但是式 (22) 同時顯示終極下陷量與擴散係數成反比。由式 (18) 與前段所討論各有關係數之值的估計，吾人得知純卵石層的擴散係可高至  $10 \text{ ft}^2/\text{sec}$  左右，而純砂質土層可低至  $10^{-5} \text{ ft}^2/\text{sec}$  左右；所以純砂質土層的終極下陷量超過純卵石層的好幾百倍，甚至好幾萬倍。關於這一點吾人可由超額抽取地下水而引起地盤下陷的原因來分析。地盤下陷的因素有好幾方面。首先受制飽和含水層上面的載重太龐大。但是由於卵石的不規則形狀與多角結構，雖然孔隙內不為水所充實，卵石極易一個頂著一個來承受其上的負荷，而不致造成太大的移動。所以儘管地下水被抽掉，孔隙內充滿了空氣，卵石土層下陷很不明顯；相反地，砂質土層由於均勻形狀與缺乏多角結構，極易造成相當明顯的沉陷。其次，如果孔隙內的水被抽掉後，能夠即刻由其他地方的水急速流進補充，而不致於造成空氣充滿孔隙，這樣的話，土層仍然能維持接近飽和含水層的情況；則不管是砂質或卵石含水層，地盤也不太可能明顯地下陷，因為水的壓縮係數太小。就這一觀點而言，水在孔隙內的流速與滲透係數成正比。卵石層與砂質土層其間滲透率之差異太懸殊，卵石層可高至  $10 \text{ cm}/\text{sec}$ ，而純砂質土層可小至  $10^{-5} \text{ cm}/\text{sec}$  左右。易言之，地下水被抽走後，高滲透率的卵石層內遺留的孔隙，極易地再被由其他地方流進的水充實，但砂質土層內的孔隙就相當困難。上面所舉的二個因素是造成終極下陷量與擴散係數成反比之主因。最後，由式 (18) 吾人可看出孔隙率的影響適巧相反。如果，其他因子的影響均不計，只針對孔隙率而言，由於卵石層的孔隙率大約只有砂質土層的一半，式 (18) 顯示卵石層的擴散係數應該約為砂質土層的一半。然而，實際上卵石層的擴散係數不但沒有比砂質土層小，反而遠超過砂質土層的好幾百倍，甚至好幾萬倍。這就說明了顆粒形狀及滲透率對終極下陷量的影響甚巨，由此而決定性地控制了終極下陷量之大小。

利用式 (22)，吾人可進一步比較漸近解與臺北市盆地地盤下陷之實測結果。以整個臺北市盆地而言，每年大約有二億噸之超額地下水抽取量 [6]。在這樣龐大的超額抽取地下水的負荷之下，致使臺北市一年內下陷十四公分。假設臺北盆地內的抽水井有 1000 口，每口均以一年三百六十五天日以繼夜不停的抽取地下水，則  $Q=0.00634 \text{ m}^3/\text{sec}$ 。據實測結果，臺北市盆地底下之受制飽和含水層以砂、卵石為主，

其間夾帶少許沉泥，孔隙率大致在百分之四十九至百分之五十二之間，因此孔隙率  $n$  以 0.5 計，則  $e=1$  [7]。空氣壓縮係數以水的 20000 倍計， $\beta_A=20000 \times 2.17013 \times 10^{-8} \text{ ft}^2/\# = 4.34027 \times 10^{-4} \text{ ft}^2/\#$ 。孔隙壓  $P_0$ 。以地面上的噴水可上升約五公尺的高度計， $P_0=1023.62 \text{ #/ft}^2$ 。壓密指標  $C_0$ 。以士林、內湖為最高，大致在 0.25 至 0.45 之間，其他地方大致介於 0.18 與 0.35，故採用  $C_0=0.30$ 。由式 (19)，即可得知  $N_0=0.6752504$ 。其次，由於滲透率  $K$  的變化幅度太大，可由純細砂之  $10^{-5} \text{ cm/sec}$  至純卵石之  $10 \text{ cm/sec}$ 。如果  $K$  分別以  $10^{-1}$ 、 $10^{-2}$ 、 $10^{-3} \text{ cm/sec}$ ，式 (22) 推估  $(\eta|_{r=R})_{\max}$  分別等於 1.13、11.31 與 113.14 公分，而實測的下陷量為十四公分。以這樣錯綜複雜的問題而言，而且其中又有許多係數的確實大小無法確定，只能大致予以估計。因此，以目前的情況而言，吾人無法期待式 (22) 的推測質與實測結果完全相同，只要兩者的大小等級不要相差太大即已非常難得了。

由於臺北市盆地的地下受制飽和含水層並不是一層絕對完全均勻土質的含水層，實際上吾人無法以單一的數值來表示式 (22) 的各有關係數之值。目前所得的資料顯示，孔隙率與壓密指標的變化比較小，大概只有一倍的差距。孔隙率的變化幅度有多大，目前無確定資料可查，作者猜測其變化範圍可能不會太大。比較式 (22) 之推測值與實測之下陷資料，最困難的地方在於滲透率到底等於多少。如前段所述，滲透率的變化幅度確實太大，可自  $10^{-5} \text{ cm/sec}$  至  $10 \text{ cm/sec}$ ，所以式 (22) 之推測值是否接近實測值，這幾乎完全決定於對滲透率大小的估計。但是，代表臺北市地下的受制飽和含水層，其內滲透率的確實值等於多少，以層內成分之可能範圍內而言，實測值確實在式 (22) 之推測範圍內。這就很明顯地指出此論文所提的數學模式，無論在假設、構想及其結果都應該是正確的。至於引用式 (22) 在已知的抽水量之情況下，來推估臺北市盆地之可能下陷量，其先決條件必須先了解受制飽和含水層內滲透率的確實值或確實範圍等於多少？以一般土質常見的複雜變化而言，吾人可斷言臺北市盆地底下的受制飽和含水層，其內的組成與成分絕對不是均勻的。加上式 (22) 所推測的終極下陷量的變化幅度完全決定於滲透率的大小，易言之，如果吾人只能知道含水層的滲透率介於這樣大的變化幅度而已，由  $10^{-5}$  至  $10 \text{ cm/sec}$ ，則引用式 (22) 來推估地盤下陷的終極量就失去意義了，因為其間的差距將近萬倍。

由前段之分析，吾人應該首先由實驗來分析與驗證本論文所提之數學模式的可靠性；而後再依據臺北市盆地過去豐富的實測資料，分析盆地地下受制飽和含水層內滲透率的分佈情況。利用這些滲透率的資料及此論文的數學模式，吾人可分析在抽取地下水的各種不同情況下，臺北市盆地的下陷情形，甚至更進一步分析在容許的情況下，安全抽取量等於多少？以水資源取得之不易而言，在合理的情況之下，吾人是不應該忽視地下水這一項水資源。由於操縱與控制之容易，在實驗室內極易模擬一個受制飽和含水層的砂箱，其內的組成與成分較易達到均勻的條件，由此吾人可進行多方面的比較，但以式 (22) 的比較為最重要。首先配合土壤實驗與其他有關實驗的結果，由式 (18) 與 (19) 即可得  $D_0$  與  $N_0$ ，同時緊接管壁附近的終極下陷量  $(\eta|_{r=R})_{\max}$  也是不難測得。式 (22) 可以  $(\eta|_{r=R})_{\max}$  與  $QN_0/D_0$  分別為垂直與水平座標軸（直角座標）的直線表示，直線經過原點而斜率為  $3/16\pi$ 。實驗數據即可根據  $(\eta|_{r=R})_{\max}$  與  $QN_0/D_0$  之值標示於圖上。由數據的分佈情形，吾人即可得知式 (22) 之準確性，這包括  $(\eta|_{r=R})_{\max}$  是否與  $QN_0/D_0$  成比例，如果是，其係數是否等於  $3/16\pi$ ，或是此值須加以修正。除了式 (22) 外，其他關係式，例如式 (20) 與 (17)，均可進一步與實驗結果比較，式 (20) 為緊接管壁附近在不同時間的下陷情況，而式 (17) 為一般情形的下陷變化。

由於超額抽取地下水而引起的地盤（或層）下陷，臺灣已陸陸續續地發現這種現象，除了臺北市盆地外，屏東也發現了這種現象，而且相當嚴重。對於在這些地方，地盤（層）下陷的研究，作者以為前段所提的途徑是比較切實的。下陷地區下陷了多少？區內有多少口深水井？每一口井的口徑多大及其抽水情況等資料都是不難獲得的，因為這些觀測都是在地表上進行的。相反地，要探測下陷地區地下含水層的滲透率不但費時費錢，而且很難取得正確的資料，何況所測得的只不過少數幾個位置上的資料而已。然而利用本論文所提的數學模式，吾人極易了解整個地區的下陷情況，再由有關的關係式即可了解整個地區滲透率的分佈。

#### 四、結 論

在極座標體系，假設超額地下水抽取量  $Q$  保持不變，則地盤下陷量  $\eta$  與地下水抽取量間的關係如式 (9) 所述；如果吾人考慮時間趨近於無窮大的漸近情況，式 (9) 之漸近解為式 (17)

$$\frac{16\gamma D_0}{3\Phi R^2} = \left(\frac{4tD_0}{R^2}\right) \exp\left\{-\frac{R^2}{4D_0t} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \left\{1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4D_0t}\right)\right\}$$

無因次時間  $4tD_0/R^2$  趨近於無窮大時，在緊接管壁之附近（即  $r=R$ ），上式的極限值（或終極下限量  $(\eta|_{r=R})_{max}$ ）變為  $16(\eta|_{r=R})_{max}/3\Phi R^2=1$  或  $(\eta|_{r=R})_{max} = \frac{3}{16} \frac{QN_0}{D\pi}$ 。吾人均知只要含水層內的水未被完全抽光，地盤會因不停止地抽取地下水而繼續不斷地下陷，但是下陷的速率愈來愈緩慢，到最後即是再抽取地下水，地盤也不再下陷。到了這種終極情況時，土層業已完全被壓密了，能夠承受得了含水層上面的龐大載重，土層孔隙內充滿了水或是部分充滿都不再影響地盤下陷。雖然抽水井能夠一直抽到地下水，但不可能連含水層內的砂、卵石也被抽上來。易言之，地盤下陷應該有一個極限，而時間趨近於無窮大時，漸近解趨近於一個極限值，這正與事實相符合。終極下限量除了受抽水量  $Q$  的影響外，這個極限植照理應該或多或少與土質的性質有關，式 (22) 包含  $N_0$  與  $D_0$ 。這正反映土層性質對終極下限量的影響。在受制飽和含水層內，就其細砂與卵石的各種不同級配而言，係數  $N_0$  值（參閱式 (19)）的變化幅度不太大，頂多幾倍的差異而已；但是擴散係數的變化幅度就非常懸殊（參閱式 (18)），主要的原因是滲透率的差距太大，可大至純卵石的  $10 \text{ cm/sec}$ ，也可小致純細砂的  $10^{-5} \text{ cm/sec}$ 。因此，由式 (22) 吾人得知受制飽和含水層內的組成與級配，影響終極下限量  $(\eta|_{r=R})_{max}$  甚巨，這個影響是直接顯示於式 (22) 的形式，另一方面尚有一個因素並沒有接顯示於式 (22) 的形式，這就是土層內的顆粒形狀。卵石的不規則形狀與多角結構較能承受龐大的載重；因此，受壓時不會產生太大的沉陷。但是砂質土層則不然，由於形狀均勻一致，受壓後就明顯的沉陷。

依據臺北市盆地的實測資料，吾人可概略估計盆地底下受制飽和含水層的孔隙率，孔隙壓與壓縮指標。如果大致以平均值計，則  $n=0.50$ ， $P_0=1023 \text{ #/ft}^2$ ， $C_0=0.30$ 。而每年二億噸的超額地下水抽取量平均分配於一千口井上，每一口井均以一年的時間抽取地下水，實測結果指出臺北市盆地一年內大概下陷了十四公分。臺北市盆地地下的受制飽和含水層是以卵石與砂石為主要成分，假設層內的滲透率分別採用不同的值，即  $K=10^{-1}$ ， $10^{-2}$  與  $10^{-3} \text{ cm/sec}$ ，式 (22) 推估  $(\eta|_{r=R})_{max}=1.13$ ， $11.31$  與  $113.14$  公分。易言之，如果滲透率採用  $10^{-2} \text{ cm/sec}$ ，式 (22) 的推測值就非常接近於臺北市盆地實測下陷的十四公分。純卵石與純細砂之滲透率分別為  $10 \text{ cm/sec}$  與  $10^{-5} \text{ cm/sec}$ ，而臺北市盆地底下的受制飽和含水層主要的組成是以這二種成分級配而成的，因此含水層的滲透率應該介於  $10$  與  $10^{-5} \text{ cm/sec}$  之間。由此比較，臺北市盆地之實測下陷十四公分確實在式 (22) 的推測範圍內。從這比較與前段探討分析解的特性，吾人即可發現此論文所提的數學模式，無論建立模式的構想、假設及最後的結果應該是合理的。

由於超額抽取地下水而引起地盤(或層)下陷，已陸續在許多地方發現。為了防範地盤下陷且又為了抽取地下水以彌補水資源之短缺。因此，對於已沉陷地區含水層性質的研究是刻不容緩的，此論文的數學模式提供一個簡捷的探討途徑，因為地表上的資料都非常容易取得，但地下土層資料却非常不易取得。

#### 五、致 謝

本研究承臺北市政府養護工程處李鴻基科長提供臺北市盆地之實測資料，及淡江大學建教合作部麥秀寶小姐抄寫，作者在此謹致衷心謝意。

#### 參 考 文 獻

- (1) 施清吉 地盤下陷與超額地下水抽取量間之關係分析土木水利季刊 3(2)1~16, 1976.
- (2) Weinberger H. F., "A First Course in Partial Differentiation," Blaisdell Publishing Company, (文轉第52頁)