

有限元素法 (FEM) 及邊界積分法 (BIEM) 在自由含水層之應用與比較

The Application and Comparison between FEM and BIEM in Unconfined Aquifer

國立臺灣大學農工系助教

譚 義 績
Yih-Chi Tan

摘 要

有限元素法 (FEM-Finite Element Method) 及邊界積分法 (BIEM-Boundary Integral Equation Method) 目前在解析工程應用較為廣泛之數值分析, 本文之目的在於比較此兩種方法應用於自由含水層中抽水模擬時, 判斷並分析其精確性, 並比較其優缺點, 以供將來在應用此兩種數值方法參考之用。

本文中論及之有限元素法 (FEM), 其解析之方式是將其定義域離散化, 並以葛爾金法 (Galerkin's Method) 做殘差加權 (Weighting Residual); 而邊界積分法 (BIEM) 其解析之方式乃將其邊界條件離散化, 並利用葛林函數 (Green function) 將地下水偏微分方程式化成積分型式, 沿邊界積分並模擬定義域變化情形, 另外配合黑蕭模型 (Hele-Shaw Model) 實驗, 以模型抽水方式模擬以及理論方式解析, 四種方式相互比較及驗證, 尋找上述兩法何者較為便捷, 何者較為實際。

由於上述兩法所要解析地下水偏微分方程較為複雜, 必須藉電子計算機高速演算之能力, 所以在計算機使用容量及執行時間, 都做一詳盡比較, 並配合黑蕭模型實驗, 以數值分析為經, 模型實驗為緯, 兩者相輔相成, 以所能對國內地下水開發實質上有所助益。

Abstract

The purpose of this study is to compare between the FEM (Finite Element Method) and the BIEM (Boundary Integral Equation Method) in unconfined aquifer. So in this study, two completely different numerical methods are developed and studied for the application of phreatic surface aquifer.

The mathematical model utilized Galerkin's weighting residual of finite element method to simulate and analyze ground phenomena, in order to get the best approximate solution. and on the other hand, the boundary integral equation method is extended to simulate groundwater level by using Green's function, boundary integral has been employed for the solution of two-dimensional flow in porous media. In addition, the experimental results of Hele-Shaw model is compared with the results of two different numerical methods.

From the results of computer's simulation, many substantial

use of two numerical methods in this study, it not only can be used as a tool for searching the optimum groundwater management but also can be used as a reference for researching the development of numerical analysis.

一、前 言

由於國內經濟建設高速成長，工業發展積極，造成地面水資源被環境污染之情形也急劇上升，然而水資源却極為有限，使得地下水之開發也日益受到矚目，而地下水在某些地區開發太快而造成一些後遺症，如：地盤下陷、海水入侵、工業污水下滲等問題發生，所以如何確實且有效使用地下水資源，乃刻不容緩之急務。

地下水由於涉及複雜之偏微分方程式，所以解析方式較為困難，由於目前電腦普遍應用，所以對地下水之研究較為便捷，余在碩士論文利用有限元

素法解析多層受壓含水層水流情形⁽¹⁾，爾後陳京台先生亦利用有限元素法來模擬雲林地區地下水⁽²⁾，並策定實用的用水政策，使得數值分析更較為實用；而邊界積分法其解析之方式乃將其邊界條件離散化，並利用葛林函數解析，因此這兩種方式解析地下水方程式，各有其優劣存在。本文之目的在比較這兩種方法其優缺點，並配合了黑蕭模型來做實驗驗證，並且利用理論方式解出，綜合比較及分析。

本文感謝曹以松主任指導，Cornell 大學劉立方博士並賜卓見，陳京台、沈宗華、林鍾洋、李武憲、姚建功先生等協助，謹此誌謝，以表謝忱。

二、理 論 分 析

由達西定律 (Darcy's Law)

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{T}\nabla\phi \quad (2-1)$$

其中： $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x, y, t)$ ，每單位流量

$\mathbf{T} = \mathbf{T}(x, y)$ ，含水層流通係數

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j}$$

$\mathbf{T} = \mathbf{k} \mathbf{b}$

$\mathbf{k} = \mathbf{k}(x, y)$ ，含水層導水係數 (Hydraulic conductivity)

$\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y)$ ，含水層厚度

由質量不減定律，在一控制體積內

$$-\nabla \cdot \mathbf{Q} - p + q - S \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (2-2)$$

其中： $\nabla \cdot \mathbf{Q}$ ，表流量在平面 (x, y) 中之散度 (divergence)

$P = P(x, y, t)$ ，表抽水井之抽水量或補注量

$S = S(x, y)$ ，貯存係數 (Storage Coefficient)

q ：表滯水層 (Aquitard) 入滲流量

將 (2-1) 代入 (2-2) 式中可得

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}\nabla\phi) - p + q - S \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (2-3)$$

$$\text{經化簡可得 } \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) - p + q - S \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (2-4)$$

如果含水層具有等向性 (Isotropic) 則 $T_x = T_y = T$ 上式可化簡為

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) - p + q - S \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (2-5)$$

本文所論及自由含水層抽水影響其地下水水位面，而造成洩降曲線，由於為自由含水層，由杜普特假設

(Dupuit assumption) 其地下水流量可表為

$$Q = 2\pi r k h \frac{dh}{dr} \quad (2-6)$$

將 (2-6) 積分可得 $h_2^2 - h_1^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r_2}{r_1}$ (2-7)

其中：Q：表抽水井抽水量或補注量

r：表影響半徑

h：表地下水位高度

在含水層未抽水之前，其起始條件 (Initial condition) 為已知即

$$\phi = \phi(x, y, t_0) \quad (2-8)$$

而其邊界條件 (Boundary condition) 可以一方程式表示

$$\beta_1 T_{1j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} l_i + \beta_2 \phi + \beta_3 = 0 \quad (2-9)$$

其中： l_i ：方向餘弦

β_i ：表係數，為空間及時間之函數

一般可分為三類：

(1) 德黎區條件 (Dirichlet condition)：即已知定水頭之邊界條件，此時 $\beta_1 = 0$

$$\phi = -\frac{\beta_3}{\beta_2} = \phi_1(x, y, t) \quad (\beta_2 \neq 0) \quad (2-10)$$

其中： ϕ_1 為已知地下水位高度。

(2) 紐曼條件 (Neumann Condition)：即已知邊界上流通量 (flux)，可以用數學方程式表之

$$\mathbf{Q} \cdot \vec{n} = -(\mathbf{T} \nabla \phi) \cdot \vec{n} = Q_n(x, y, t) \quad (2-11)$$

在 (2-9) 式中當 $\beta_2 = 0$ 時

$$T_{1j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} l_i = -\frac{\beta_3}{\beta_1} \quad \text{在邊界上 (S)} \quad (\text{其中 } \beta_1 \neq 0) \quad (2-12)$$

其中若邊界如為不透水層，則 $\beta_3 = 0$ ，亦即 Q_n 為零

(3) 歌西條件 (Cauchy condition)：此條件為上面二種條件混合型式，即為 (2-9) 式，一般用於地下水面接近地表且河川對含水層有甚大滲漏時。

一般在地下水含水層中，其定義域之邊界條件可為上面任一種或混合使用。

三、有限元素法解析

有限元素法之基本概念乃將一個要解析之定義域切割成有限個元素，亦即有限個小區間，每個元素以結點 (Node) 相聯，解析的方式首先選一試函數 ϕ (Trial function)，求取各結點上未知變數值，並解析整個定義域近似值。其中

$$\mathbf{D} \{ \hat{\phi} \} = \mathbf{R} \approx 0 \quad (3-1)$$

其中：D：微分運算 (Differential Operator)

R：殘差 (Residual)

$$\hat{\phi} = \sum_{j=1}^M a_j \phi_j(x) \quad (3-2)$$

其中： a_j 為常數， $\phi_j(x)$ 為座標函數。

若將各結點空間座標與時間座標分離時，可表為

$$\hat{\phi}(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \phi_i(t) \quad (3-3)$$

其中： $N_i(x, y)$ 為形狀函數 (Shape function)

而殘差加權法 (Weighted Residual Method) 即選定適當之加權函數，使殘差之積分值為零，其數學式如下：

$$\int_D W_j R \, dD = 0 \quad j=1,2,\dots,n. \quad (3-4)$$

本文使用高爾金法 (Galerkin's Method)，即其加權函數 \bar{w}_j (Weighting function) 以形狀函數表之，即 $\bar{w}_j = N_i$ ，而形狀函數本身具有二個特性，即

$$N_j(x_i, y_i) = \delta_{ij} \quad (3-5)$$

其中： δ_{ij} = Kronecker Delta function.

$$\text{以及} \quad \sum_{k=1}^M N_k = 1 \quad (3-6)$$

所以 (3-4) 式可寫成

$$\int_D N_k R \, dD = 0 \quad (3-7)$$

若對定義域中所有元素計算，則

$$\sum_{i=1}^{NELS} \int_{D^o} N_k R \, dD_i = 0 \quad (3-8)$$

其中：NELS：為元素總數

在解析地下水流方程式，其中 ϕ 為一未知函數，在定義域 D^o 中，由 (3-3) 式可知

$$\phi = [N]^o \{ \phi \}^o = \sum_{n=1}^M N_n^o \phi_n^o \quad (3-9)$$

其中： N_n ：表形狀函數 (Shape function)

ϕ_n ：在定義域 D^o 中結點之變數值

M ：每一元素之結點數。

將 (3-9) 代入地下方程式中可寫成

$$\int_{D^o} \left(T_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + T_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - S \frac{\partial \phi}{\partial t} - p + q \right) N_k \, dD^o = 0 \quad (3-10)$$

利用葛林定理 (Green's Theory) 將前兩項化成一次微分式

$$\int_{D^o} \left(T_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) N_k \, dD^o = - \int_{D^o} T_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} \, dD^o + \int_{S^o} N_k T_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \ell_x \, dS^o \quad (3-11)$$

$$\int_{D^o} \left(T_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) N_k \, dD^o = - \int_{D^o} T_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} \, dD^o + \int_{S^o} N_k T_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \ell_y \, dS^o \quad (3-12)$$

在 (3-11)，(3-12) $T_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \ell_x$ 及 $T_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \ell_y$ 表示在紐曼邊界 (Neumann Boundary) 之淨流量 (flux)，兩式代入 (3-10) 式，可得

$$\begin{aligned} & \int_{D^o} T_{xx} \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} \phi_n \, dD^o + \int_{D^o} T_{yy} \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \phi_n \, dD^o + \int_{S^o} Q_n N_k \, dS^o \\ & + \int_{D^o} S N_k N_n \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \, dD^o + \int_{D^o} (p - q) N_k \, dD^o = 0 \end{aligned} \quad (3-13)$$

其中： $k, n=1,2, \dots, M$.

將 (3-13) 式寫成矩陣型式

$$[H]^o \{ \phi \}^o + [C]^o \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi \}^o + [F]^o = 0 \quad (3-14)$$

$$\text{其中: } [H]^{\circ} = \int_{D^{\circ}} T_{xx} \frac{\partial[N]^T}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} dD^{\circ} + \int_{D^{\circ}} T_{yy} \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} dD^{\circ} \quad (3-15)$$

$$[C]^{\circ} = \int_{D^{\circ}} S[N]^T [N] dD^{\circ} \quad (3-16)$$

$$[F]^{\circ} = \int_{D^{\circ}} (p-q)[N]^T dD^{\circ} + \int_{S^{\circ}} Q_n [N]^T dS^{\circ} \quad (3-17)$$

四、邊界積分法解析

邊界積分法其基本概念乃將一不規則的邊界，切割成許多條直線，並以結點相聯，依照其邊界狀況而加以區分，以滿足其邊界條件，亦即將其邊界成若干不同之區段，此法類似有限元素法之分割方式，而所不同之處在於不必將整個定義域切割。

由達西定律 (Darcy's law)

$$V = -K \nabla \phi \quad (4-1)$$

其中：V：流速

K：含水層水力傳導係數 (hydraulic conductivity)

$$\phi = -\frac{p}{\gamma} + Z$$

在解析地下水方程式偏微分方程式，化成積分形式必須用葛林函數 (Green's function)

$$\int_0^l G y''(\xi) d\xi = [G y'(\xi) - G' y(\xi)] \Big|_0^l + \int G'' y(\xi) d\xi \quad (4-2)$$

$$\text{其中: } G''(\xi, x) = \delta(\xi - x) \quad (4-3)$$

$$G'(\xi, x) = H(\xi - x) + A \quad (4-4)$$

$$(4-3) \quad \delta(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} W_k(\xi) \quad W_k = \begin{cases} \frac{k}{2} & |\xi| < \frac{1}{k} \\ 0 & |\xi| > \frac{1}{k} \end{cases} \quad (4-5)$$

δ: Delta function

$$\int \delta(\xi - x) h(\xi) d\xi = h(x) \quad (4-6)$$

$$\text{由 (4-4)} \quad H(\xi - x) = \begin{cases} 1, & \xi > x \\ 0, & \xi < x \end{cases} \quad (4-7)$$

H: Heaviside step function

$$\text{兩種函數關係: } \delta(\xi - x) = H'(\xi - x) \quad (4-8)$$

而地下水方程式化成積分型式由

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4-9)$$

$$\text{而} \quad \int_R \int G \nabla^2 \phi dA = \int_S (G \nabla \phi - \phi \nabla G) ds + \int_R \int \phi \nabla^2 G dA \quad (4-10)$$

$$0 = \int_S (G \nabla \phi - \phi \nabla G) ds + \phi(x)$$

$$\phi(x) = \int_S (\phi \nabla G - G \nabla \phi) ds \quad (4-11)$$

在 (4-10) 式中

$$\nabla^2 G = \delta(\xi - x, \eta - y) \quad (4-12)$$

$$r = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{1/2} \quad (4-13)$$

$$\text{在二維空間中} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} = 0$$

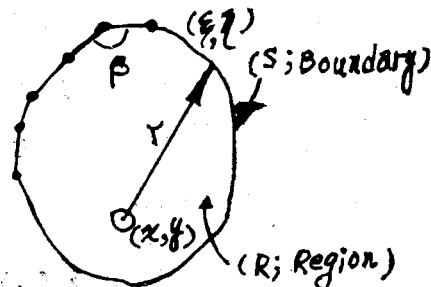


圖 4-1 邊界及定義域

由於 G 為 r 之函數

$$\therefore \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \quad G = A \ln r \quad (4-14)$$

而
$$A \iint \nabla^2 \ln r \, dA = \iint \delta(\xi - x, \eta - y) \, dA \quad (4-15)$$

$$A \frac{1}{2\pi} \quad (4-16)$$

因此

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln r$$

$$\alpha \phi(x) = \int_s \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \ln r - \ln r \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \quad (4-17)$$

$$\alpha = 2\pi \quad \text{in } R$$

$$\alpha = \beta \quad \text{in } S$$

利用座標變換

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= (x_{j+1} - x_j) / R \\ \sin \theta &= (y_{j+1} - y_j) / R \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_j &= (x_j - x_i) \cos \theta + (y_j - y_i) \sin \theta \\ \xi_{j+1} &= (x_{j+1} - x_i) \cos \theta + (y_{j+1} - y_i) \sin \theta \\ \eta_{j+1} &= -(x_j - x_i) \sin \theta + (y_j - y_i) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{j+1} \left(\frac{\xi - \xi_j}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right) + \phi_j \left(\frac{\xi_{j+1} - \xi}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right) \\ &= \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\xi_{j+1} - \xi_j} \xi + \frac{\xi_{j+1} \phi_j - \xi_j \phi_{j+1}}{\xi_{j+1} - \xi_j} \\ &= A' \xi + B' \end{aligned} \quad (4-20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1}}{\xi_{j+1} - \xi_j} \xi + \frac{\xi_{j+1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j - \xi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1}}{\xi_{j+1} - \xi_j} \quad (4-21)$$

因爲, $r = (\eta^2 + \xi^2)^{1/2}$

$$\text{所以, } \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial \sqrt{\eta^2 + \xi^2}}{\partial \eta} = \frac{\eta}{r} \quad (4-22)$$

由 (4-17) 寫成

$$\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \left(\frac{\phi}{r_i} \frac{\partial r_i}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \ln r_i \right) d\xi = \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\phi}{r_i} \frac{\partial r_i}{\partial n} d\xi - \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\partial \phi}{\partial n} \ln r_i d\xi \quad (4-23)$$

由 (4-23) 中前項

$$\begin{aligned} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \left(\frac{\phi}{r_i} \frac{\partial r_i}{\partial n} \right) d\xi &= \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\phi}{r^2} \eta d\xi = \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{(A' \xi + B') \eta}{\xi^2 + \eta^2} d\xi \\ &= \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{A'}{r} dr + B' \tan^{-1} \frac{\xi}{\eta} \Big|_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} = A' \ln r + B' \tan^{-1} \frac{\xi}{\eta} \Big|_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \\ &= \left[\frac{1}{2} \eta \ln \frac{\eta^2 + \xi_{j+1}^2}{\eta^2 + \xi_j^2} (\phi_{j+1} - \phi_j) + (\phi_j \xi_{j+1} - \phi_{j+1} \xi_j) \left(\tan^{-1} \frac{\xi_{j+1}}{\eta} - \tan^{-1} \frac{\xi_j}{\eta} \right) \right] / (\xi_{j+1} - \xi_j) \end{aligned} \quad (4-24)$$

同理 (4-23) 之後項

$$\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \ln r_i d\xi = \frac{1}{2(\xi_{j+1} - \xi_j)} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1} \left(\frac{A}{2} - \xi_j B \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \left(\frac{A}{2} - \xi_{j+1} B \right) \right] \quad (4-25)$$

$$\text{其中: } A = (\eta^2 + \xi_{j+1}^2) [\ln(\eta^2 + \xi_{j+1}^2) - 1] - (\eta^2 + \xi_j^2) [\ln(\eta^2 + \xi_j^2) - 1] \quad (4-26)$$

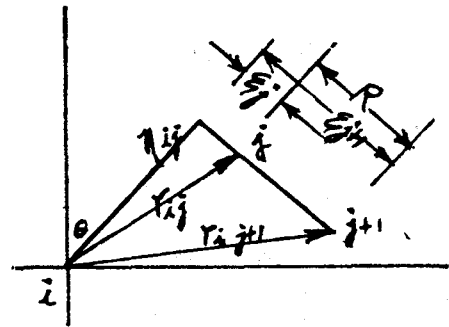


圖 4-2 座標系統

$$B = \xi_{j+1} \ln(\eta^2 + \xi_{j+1}^2) - \xi_j \ln(\eta^2 + \xi_j^2) - 2(\xi_{j+1} - \xi_j) + 2\eta \left(\tan^{-1} \frac{\xi_{j+1}}{\eta} - \tan^{-1} \frac{\xi_j}{\eta} \right) \quad (4-37)$$

綜合所推衍 (4-23)(4-24)(4-25)(4-26)(4-27) 五式可得

$$a_{ij} \phi_j + a'_{ij} \phi_{j+1} + b_{ij} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j + b'_{ij} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1} = 0 \quad (4-28)$$

$$\text{其中：} a_{ij} = \left[\xi_{j+1} \left(\tan^{-1} \frac{\xi_{j+1}}{\eta_{ij}} - \tan^{-1} \frac{\xi_j}{\eta_{ij}} \right) - \frac{1}{2} \eta_{ij} (\ln(\eta_{ij}^2 + \xi_{j+1}^2) - \ln(\eta_{ij}^2 + \xi_j^2)) \right] / (\xi_{j+1} - \xi_j) \quad (4-29)$$

$$b_{ij} = \frac{B \xi_{j+1} - \frac{A}{2}}{2(\xi_{j+1} - \xi_j)} \quad (4-30)$$

$$a'_{ij} = \left[\frac{1}{2} \eta (\ln(\frac{\xi_{j+1}^2 + \eta^2}{\xi_j^2 + \eta^2}) - \xi_j \left(\tan^{-1} \frac{\xi_{j+1}}{\eta} - \tan^{-1} \frac{\xi_j}{\eta} \right)) \right] / (\xi_{j+1} - \xi_j) \quad (4-31)$$

$$b'_{ij} = \frac{\frac{A}{2} - \xi_j B}{2(\xi_{j+1} - \xi_j)} \quad (4-32)$$

若邊界條件係德黎區條件 (Dirichlet condition) 則可知道 (4-28) 式中之 ϕ_j 值，若為紐曼條件 (Neumann condition) 則可知 (4-28) 式中之 $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j$ 所以每改變一點可得一個方程式，若邊界共有 n 個點則必須移動 n 次，亦可得 n 個方程式來解析 n 個未知數。而在自由含水層之自由水面解析所寫成

$$Z = \eta(x, y, t) \quad (4-33)$$

$$F = \eta(x, y, t) - Z = 0 \quad (4-34)$$

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (V_0 \cdot \nabla) F = 0 \quad (4-35)$$

其中： η ：表自由水面之水位高

V_0 ：表自由水面之移動速度 ($V_0 = \frac{V}{n}$)

$$\text{由 (4-35) 式} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(-\frac{K \nabla \phi}{n} \cdot \nabla \right) F = 0 \quad (4-36)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{因爲：} \nabla \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k \\ \nabla F &= \frac{\partial \eta}{\partial x} i + \frac{\partial \eta}{\partial y} j - 1 k \end{aligned} \right\} \quad (4-37)$$

將 (4-37) 代入 (4-36) 式中

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{k}{n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (4-38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t^*} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \nabla \phi \cdot \nabla F \\ &= \nabla \phi \cdot n |\nabla F| \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial n} \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 1} \end{aligned} \quad (4-39)$$

其中 $n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$

若 $y = \eta(x, t)$ 之函數，則

$$\frac{\partial \eta}{\partial t^*} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 1} \quad (4-40)$$

因爲 $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\tan \beta$ (4-41) 代入 (4-40) 可得

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial n} / -\cos \beta \quad (4-42)$$

在自由水面 $\eta = \phi$

$$\text{所以 } \phi^{k+1} = \phi^k - \frac{\Delta t}{\cos \beta} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (4-43)$$

在自由含水層時，每一地下水位到達穩定時其速度必然趨近於零，所以每次計算若 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 不趨近零則必須再差分一次，直到滿足條件要求方可。

五、黑蕭模型 (Hele-shaw Model) 模擬：

黑蕭模型是模擬地下水流動較常用的滯性流體模型 (Viscous fluid model)，本文所使用厚 8 mm 兩片壓克力透明板，長 150 cm，高 50 cm，間隙 0.14 cm，兩側水箱長寬各 10 cm，高 50 cm 並有溢水裝置如圖 5-1 所示。

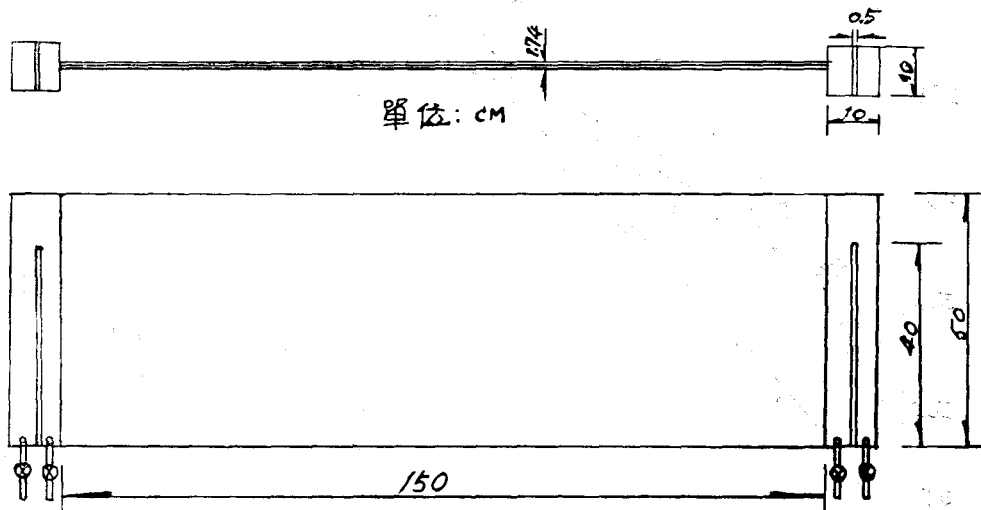


圖 5-1 黑蕭模型設計圖

實驗前先測定模型水力傳導係數 (hydraulic conductivity)， k 值，其中 k 動力粘滯係數 (ν) 之關係如下：

$$K = \frac{B^2 g}{12\nu} \quad (5-1)$$

其中： B ：兩平行板之間隙

g ：地心加速度

ν ：動力粘滯係數

由於屬於自由含水層，由杜卜公式 (Dupuit's formula)

$$Q = qB = KB \frac{(H_1^2 - H_2^2)}{2L}$$

其中： Q ：流量

q ：單位長度之流量

L ：模型長度

H_1 : 進水口之高度

H_2 : 出水口之高度

由模型測出 K 值後做自由含水層模擬瞬時洩降，先將兩端水位抬高，然後讀取數據，再使出水口之水位下降至特定高度，進水口保持定水頭高度，等到達穩定流後讀取洩降後高度，將實驗之結果分別用有限元素法及邊界積分法再加以模擬。

六、結果比較

有限元素法及邊界積分法兩種模擬結果並配合

黑蕭模型實驗及理論值分析，在電子計算機解析執行時間上，邊界積分法由於必須使自由水面移動速度趨近於零，所用時間比有限元素法高出甚多，但其準確性比較高，可由圖 6-1 比較，但自由含水層實驗是以均質介質來分析，倘若地層有較複雜之變化之時，兩種方法在模擬時則各有所長，在此並未做此比較，僅將四種比較結果以圖 6-1 表示之。

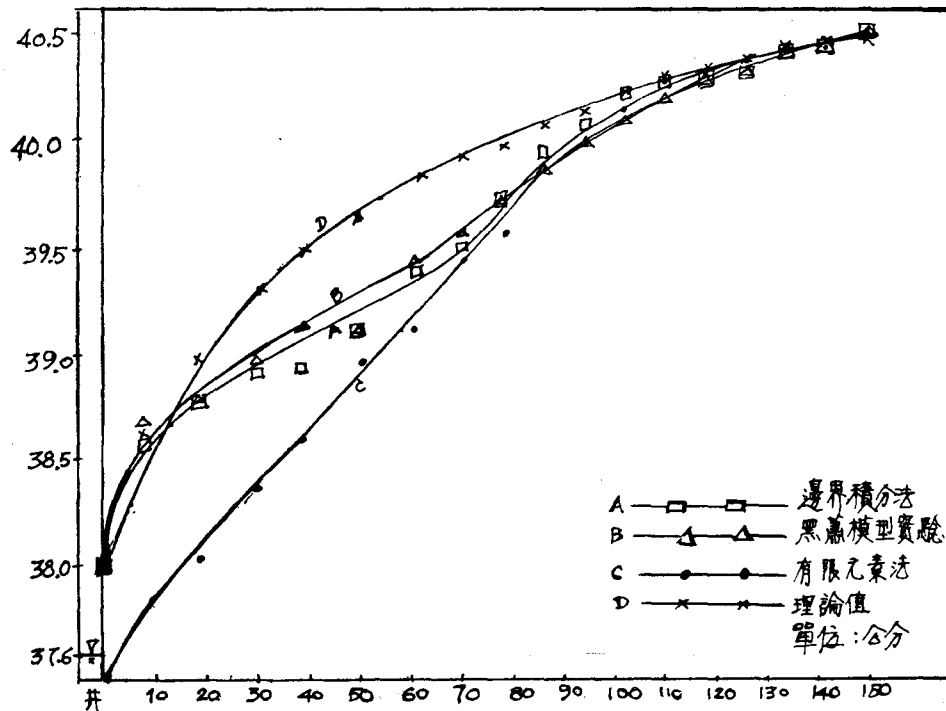


圖 6-1 四種方法比較結果

由電子計算機模擬可以看出邊界積分法比較能接近實驗值與理論值，其主要原因由於邊界積分法係解析解 (Analytic solution)，而有限元素法係近似解 (Approximate solution)，因其有殘差問題存在，但和理論值比較，理論值似乎高甚多，主要原因在於模型本身長度無法足以代表其影響半徑，以及 K 值不能和地下水流狀況近似， $K=155$ 比實際情況高出甚多，倘若以油體模擬其粘滯係數較大，相對其 K 值較小，可由公式 (5-1) 觀察得之，在作業上邊界積分法因無須分割定義域內部元素，所以在資料輸入時又較有限元素法簡捷；另外含水層內部若不同 K 值，在邊界積分法必須

分成若干個區間分析，在兩種交界面上解聯立方程式，而有限元素僅須將元素化成不同元素即可，不必增加較多的運算。

七、結論與建議

(一) 本文利用黑蕭模型模擬，由於水的動力粘滯係數較小，所以 K 值較大，模擬結果 $K=155$ ，倘若使用油體來模擬，其 K 值較小，比較能符合地下水流狀況。

(二) 邊界積分法在使用時若其介質為均質時 (Homogeneous)，其結果比較近似實際狀況，倘若非均質時，其所須分析之區域比較多且複雜，

反而會增加其計算機執行步驟及時間，在有限元素法使用時，對於地層變化比較具有彈性，對於均質與非均質等層特性，能做較理想之解析。

(三)有限元素法其主要依據其定義域分割，而邊界積分法是依據其邊界條件分割，由於有限元素法屬於定義域離散化，在地下水模擬時，對於邊界條件影響較大，所以在解析時必須慎為嚴密，而邊界積分法由於在時間方面運算要較長的時間段，且因邊界積分法屬於邊界條件離散化，對於自由水面之模擬必須使其水面段流速趨近於零，所以時間段控制對演算頗為重要。

(四)如果僅論及邊界問題，而不涉及內部解析時邊界積分法較佳，如自由水面只論及洩降高度而不討論內部情形，如果在定義域內部做局部抽水模擬時，此時有限元素法較邊界積分法適用。

(五)在電子計算機作業上面，兩種方法各有優劣，如資料準備方面，有限元素法必須將各元素座標，含水層特性，邊界流量及各結點水位，而邊界積分法僅須各邊界結點座標，含水層特性，邊界條件狀況，所以條件較少且內部變化較小時，邊界積分法較為適用，倘若定義域內部含水層不只一種，則必須將各種分別討論，依照其含水層不同分別邊界積分，在兩交界面用聯立方程式解析，此時邊界積分法反而比有限元素法複雜。

(六)兩種方法在臺大 CDC-CYBER-170 系統運算時間上，如在穩定流 (Steady-state) 演算，有限元素法比邊界積分法省時，主要邊界積分法在自由水面演算時，必須使在水面結點之速度趨近於零，方可得到較佳之水位高度，所以必須有較長的一段時間反覆演算，有時甚至會有發散情形；但準確性而言，在自由含水層突然洩降所模擬結果比較，邊界積分法比有限元素法準確，因為邊界積分法是由解析解得到答案，而有限元素法是由葛爾金法所解得到近似解，所以兩種方法，在精確性而言由於邊界積分法未涉及殘差加權，所以比有限元素法準確。

(七)根據以上分析結果，如果在一均質定義域且僅論及邊界條件變化之問題以邊界積分法為佳，倘若涉及較為複雜含水層且論及定義域內部問題之時，以有限元素法較為適宜。

參 考 資 料

1. 曹以松、譚義績：地下水模型應用於多層受壓含水層之研究，臺灣水利季刊第二十七卷第三期，民國

六十八年。

2. 曹以松、陳京台：雲林地區地下水數學模式之模擬與應用，臺台水利季刊第二十九卷第四期，民國七十年。
3. 林聰悟：工程基本程式，新學識文教出版中心，民國六十九年。
4. 曹以松、沈宗華：沿海地區海水入侵模式之研究，農業工程中心，民國七十一年。
5. 王如意、易 任：應用水文學，茂昌圖書有限公司，民國七十一年。
6. J. A. Liggett: "Location of Free Surface in Porous Media" Journal of Hydraulic Division ASCE Vol. 103, No. HY4, April, 1977.
7. Michael D. Greenberg: "Application of Green's Function in Science and Engineering"
8. Philip L. F. & J. A. Liggett: "Numerical Stability and Accuracy of Implicit Integration of Free Surface Groundwater Equation" Water Resources Research Vol. 16, No. 5, 1980.
9. Gerard P. Lennon, Philip L. -F. & J. A. Liggett: "Boundary Integral Equation to Axisymmetrical flow" Water Resources Research, Vol. 15, No. 5, 1979.
10. Philip L.-F. & J. A. Liggett: "An Efficient Numerical Method of Two-Dimensional Steady Groundwater Problems." Water Research Vol. 14, No. 5, 1978.
11. Gerard P. Liggett: "Boundary Integral Solution to Three-Dimensional Unconfined Darcy's flow" Water Resource Research Vol. 16, No. 4, 1980.
12. Prinder & Frind: "Application of Galerkin's Procedure To Aquifer Analysis" Water Resources Research Vol. 8, No. 1, p. 108-120.
13. Wiggert, "Two-Dimensional Finite Element Model of Transient Flow in Regional Aquifer System" Technical Report No. 41, Institute of Water Reseach, 1974.
14. S. J. Wu, "Comparisons of Aquifer Flow Analysis by the Finite Element Method", Seminar, 1978.
15. Gallagher, Oden, Taylor, & Zienkiewicz, "Finite Element in Fluids" Vol. 1, Vol. 2, 1975.

(文轉第61頁)