

# 專論

## 擾動法之應用於水面線分析

Application of Perturbation Method

in

Analysis of Water Surface Profile

淡江大學水利工程學系教授兼建教合作部主任

施清吉

Ching-chi Shih

### Abstract

Four types  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $S_2$ , and  $S_3$  of water surface profiles of steady and gradually varied flow are analyzed by the perturbation method. The depth of these specified water surface is generated by the deviation of the given depth different from the normal depth at the control section, to which the depth of water flow will asymptotically tend. Thus, the difference between the given depth at the control section and the normal depth can be treated as the perturbation term, in terms of which an asymptotic expansion representation of water surface profile is obtained, and the uniform flow is then the basic solution of the expansion and generates the successive approximations. Results of the asymptotic expansion consisting with the basic solution and the first approximation is found in good agreement with those obtained by the step method with the maximum discrepancy less than 2%, if the perturbation value is less than 0.2.

### 摘要

利用擾動方法 (Perturbation method) 分析定量流的緩變流。探討的水面線計有四種： $M_1$ 、 $M_2$ 、 $S_2$  與  $S_3$ 。這四型水面線之所以偏離均勻流，是由於在控制斷面上的已知深度不等於均勻流的深度；故吾人可視此兩深度的差值為擾動值 (Perturbation value)  $\epsilon$ ，將水面線以  $\epsilon$  之漸近展開式 (Asymptotic expansion) 表示。擾動解 (漸近展開式) 以均勻流為基礎解，由此可產生各種不同階次的近似解。比較階梯方法 (Step method) 與擾動方法兩種不同方法計算的結果後，吾人發現由基礎解與第一階近似解組成之漸近展開式相當精確，只要擾動值小於 0.2，其間之差異均在百分之二以內。

### 一、前言

河川上的水利工程設施經常需要分析，沿河之水位變化，藉以了解水利結構物對上游流況之影響；例如下游興建水庫後，上游水受到多大程度的影響，或是河口的擴充又會如何改善上游洪水之侵襲

。諸如此類的問題，均牽涉到水面線的計算。一般而言，計算水面線的方法相當多，常用的有階梯法 (Step method)；不管是由深度求距離或是由距離求深度。階梯方法通常都是利用高速電子計算機列成表格。然而，列出表格形式的計算結果，並不

是一分析解 (Analytical solution)，使吾人無法再進一步深入解析在其他各種不同情況之下水面線，這是一般非分析解的特徵。其次，另一種常用的方法是直接積分法 (Direct integration)。此法，通常必須將用以計算均勻流與臨界流的兩個水力指數 (Hydraulic exponent)， $M$  與  $N$  視為常數。此兩指數等於 3 的情況可直接積分，其結果即為一般所謂的 Bresse 函數，其他各種不同值的指數，大部份的結果均列成表格或是以複數表示。

本論文從另一角度來探討水面線的變化，將水面線分析視為一擾動問題 (Perturbation problem)，而以均勻流 (Uniform flow) 為水面線的漸近情況 (Asymptotic state)，由此以漸近展開式 (Asymptotic expansion) 來表示水面的變化。這種方法是一種新的嘗試，與一般常用的方法不相同。漸近展開式為一分析解，不但具有推廣應用的價值，同時可供進一步分析之用。此外，吾人藉助於分析漸近展開式的精度時，探討影響精度的因子，以了解漸近展開式的適用範圍。

## 二、理論分析

如圖一所示的河川或渠道橫斷面及縱剖面，定量流 (Steady flow) 之水面線 (Water surface profile) 方程式為

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad (1)$$

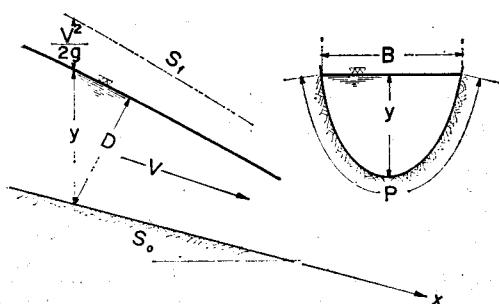
式中  $y$ ：垂直深度 (Vertical depth)。

$x$ ：縱向流動距離 (Longitudinal distance)。

$S_0$ ：渠底縱向坡度 (Longitudinal bottom slope)。

$S_f$ ：能量線坡度 (Energy line slope)。

$Fr$ ：Froude 數。



圖一 渠道示意圖

\* 參考文獻

能量線坡度與 Froude 數分別定義為  $S_f = V^2 n^2 / (1.486)^2 R^{4/3}$  與  $Fr = V / \sqrt{gD}$ ，式中  $V$  為斷面平均速度 (Sectional mean velocity)， $n$  為粗糙度 (Roughness)， $R$  為水力半徑 (Hydraulic radius)， $D$  為水力深度 (Hydraulic depth)，此深度定義為流動面積 (Flow area)  $A$  除以頂寬 (Top width)  $B$ 。假設寬矩形渠道 (Wide open channel)，同時 Chezy 常數  $C$  又可視為常數，式(1)即可簡化為 [1]\*。

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{y_n}{y}\right)^2}{1 - \left(\frac{y_c}{y}\right)^2} \quad (2)$$

式中  $y_n$ ：均勻流 (Uniform flow) 或正常流 (Normal flow) 之深度，俗稱為均勻流深度 (Uniform flow depth) 或正常深度 (Normal depth)。

$y_c$ ：臨界深度 (Critical depth)。

式(2)可積分，其結果即為一般所謂的 Bresse's 函數，至於其他之幕數值，式(2)之積分結果多半可查表而得 [2]，或是利用複數亦可直接積分而得。

由式(1)或(2)，吾人即可看出，定量流時河川或渠道內之水面線受多種因素的影響，例如：流量、河川或渠道橫斷面之幾何因素，渠底坡度與粗糙度，所有這些因素反映於臨界深度與均勻流深度的大小。本論文所探討的水面線僅限於水面線介於臨界深度與均勻流深度間的變化。其他情況的水面線不在討論範圍內；一般而言，這些情況下的水面線變化係屬於局部現象 (Local phenomenon)，例如：由超臨界流 (Supercritical flow) 轉變成次臨界流 (Subcritical flow) 時之水躍 (Hydraulic jump)，與由次臨界流轉變成超臨界流之跌水 (Hydraulic drop)，通常這種現象的變化範圍較短促，吾人分析之重點並不在於水面線之變化，而是其他因素之變化。總之，以本論文的分析範圍而言，臨界深度與均勻流深度間之比值為一非常重要之參數，它代表綜合上述影響水面線變化的組合因子。所以，令

$$\alpha = \frac{y_c}{y_n} \quad (3)$$

其次，如衆所週知，如果河川或渠道非常長，其內的流動一定會漸漸的趨近於均勻流，在此情況下，作用力只餘下摩擦力與重力兩相互間的平衡，而此時的深度即為一般所謂的正常深度或均勻流深度。

因此，均匀流深度同時也是個不可缺少的深度尺度 (Scale)；如此，深度可以均匀流深度無因次化 (Nondimensionalized)，即

$$y' = \frac{y}{y_n} \quad (4)$$

一般所指的水面線分析，在於必須流經相當長的距離，水位才有明顯的變化，這一點正是水面線與局部現象兩者分析間的最大差異所在；因此，流動距離必須予以縮小，才能使無因次化後的流動距離  $x'$  與無因次深度  $y'$  為同一大小等級 (Same order of magnitude)。故

$$x' = \frac{x}{\frac{y_n}{s_o}} \quad (5)$$

將式(3)、(4)與(5)代入式(2)，同時去掉代表無因次深度與距離之右上撇，吾人即可得無因次之水面線方程式，即

$$(y^3 - \alpha^3) \frac{dy}{dx} = y^3 - 1 \quad (6)$$

此後， $x$  與  $y$  分別代表無因次距離與深度。

如上段所述，如果流動屬於定量流、河川或渠道內水之流動終極要趨近於均勻流。在未達到均勻流之前的緩變流 (Gradually varied flow)，吾人藉助於式(6)，由某一斷面的已知深度，可逐斷面往上游或往下游依次計算水深。通常這已知深度的斷面俗稱為控制斷面 (Control section)，而此已知深度以  $y_s$  代表。一般而言，產生臨界流的斷面亦稱為控制斷面，故此時的已知深度係指臨界深度，其他情況的已知深度大部份是由於人為或自然因素而產生的。總之，在控制斷面上，其深度是已知的。由控制斷面起，往上或往下游要有一段相當長的距離，水深才會趨近於均勻流深度。易言之，水面線係以均勻流深度線為漸近線 (Asymptotic line)。基於這種概念，水面線之異於均勻流深度線是由於在控制斷面上之已知擾動 (Perturbation) 所造成的，而此擾動且以 1 為基準。所以，藉助於控制斷面上之已知深度  $y_s$ ，吾人可定義擾動  $\epsilon$  為

$$\epsilon = \frac{y_s}{y_n} - 1 \quad (7)$$

擾動的絕對值介乎於  $|1 - \alpha|$  與 0 或 1 與 0 之間。而參數  $\alpha$  代表本論文所探討之水面線的變化範圍，在此情況下，水面線始終保持同一流況，例如從上游至下游都是超臨界流或是次臨界流，總共有四種不

同種類的水面線：計有  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $S_2$  與  $S_3$ 。依據式(3)之定義， $\alpha$  值大於 1 代表超臨界流，此時  $\epsilon$  大於零或小於零分別代表  $S_2$  與  $S_3$  型的水面線，但水面線為  $S_2$  時，最大的擾動相當於控制斷面上的深度為臨界深度。即  $1 - \alpha > \epsilon > 0$ 。相反地， $\alpha < 1$  代表次臨界流， $\epsilon$  可正亦可負， $\epsilon$  大於零與小於零分別代表  $M_1$  與  $M_2$  曲線；同樣地，水面線為  $M_2$  型時，最大的擾動發生於控制斷面上的深度為臨界深度，即  $1 - \alpha > \epsilon > 0$ 。總之，擾動值愈小代表在控制斷面上的深度愈傾向均勻流，因此不需要多遠的距離，緩變流即已趨近於均勻流；相反地，擾動值愈大，情況適巧相反，水面線的延伸範圍就相當長了。綜觀以上之分析，定量流之緩變流實屬擾動問題 (Perturbation problem)，擾動之由來並非由於微分方程式中的各項不在同一大小等級；以方程式(6)而言，等號左邊的項與右邊的兩項都是相同大小等級。擾動之形成是由於在控制斷面上，不等於均勻流深度的已知深度所造成的，這一類的擾動問題應該屬於正規擾動問題 (Regular perturbation problem [3])。

既然，渠道或河川內之均勻流為其內水之流動的終極情況，而且擾動之形成是由於在控制斷面上，人為或自然因素所造成偏離均勻流深度而形成的，其大小為已知 (參閱式(7))。所以，吾人可依據擾動  $\epsilon$  趨近於零，尋求水面線之趨近展開式 (Asymptotic expansion)，即

$$y = \mu_0(\epsilon)y_0(x) + \mu_1(\epsilon)y_1(x) + \mu_2(\epsilon)y_2(x) + \mu_3(\epsilon)y_3(x) \dots \quad (8)$$

式中  $y$  的右下註腳代表近似解之階次，而  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$  為未定的尺度函數 (Gauge function) 數列，但必須符合下列的條件

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_{n+1}(\epsilon)}{\mu_n(\epsilon)} \longrightarrow 0 \quad (9)$$

尺度函數用以衡量各不同階次近似解  $y_n(x)$  的大小等級。漸近展開式將「解」視為由許多不同階次的近似解組合而成，近似解  $y_n(x)$  本身只含自變數  $x$ ，至於擾動的影響却表達於尺度函數。理論上，水面線由愈高階次的近似解組合而成，則愈趨近於真正的「解」，亦就是誤差愈小。但是由於趨近展開的緣故，往往只需前面幾階次的組合，即可達到誤差極小的「解」。由於水面線以擾動技巧來處理，其性質是屬於正規的 (Regular)；因此，任何階次的近似解均可適用於任何距離。

式(8)等號右邊， $y_0(x)$  為最底階次的近似解，此階次之「解」相當於均勻流，為其他高階近似解之基礎解 (Basic solution)。由於  $y_0(x)$  代表均勻流，所以  $\frac{dy_0}{dx} = 0$ 。比較式(6)等號左、右兩邊的大小等級，吾人即可發現等號左邊起始於  $\mu_1(\varepsilon)$ ，而等號右邊最底階次的兩項為  $-1 + \mu_0^3(\varepsilon)y_0^3$ 。因此，這兩項之和必須等於零，故，令

$$\mu_0(\varepsilon) = 1 \quad (10)$$

由上式的結果，加上尺度函數的條件——式(9)，最簡單之尺度函數數列，即為由擾動  $\varepsilon$  所構成的多項式，故

$$\mu_i(\varepsilon) = \varepsilon^i, \quad i=0,1,2,3, \quad (11)$$

而由式(10)，得知  $y_0(x) = 1$ ，這不但符合均勻流的意義，同時表示此「解」以均勻流深度為無因次化之尺度。代入式(11)之尺度函數數列，深度的漸近展開式就簡化為

$$y = 1 + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \varepsilon^3 y_3(x) + \dots + \varepsilon^n y_n(x) \quad (12)$$

將式(12)及其導函式代入式(6)之水面線方程式，比較擾動項之同次項，吾人可得到一組不同大小等級的微分方程式（大小等級以  $\varepsilon$  之幕數表示，示於微分方程式之左邊）：

$$\varepsilon^0: \frac{dy_1}{dx}(-\alpha^3 + y_0^3) - 3y_0 y_1 = 0 \quad (13)$$

$$\varepsilon^1: (-\alpha^3 + y_0^3) \frac{dy_2}{dx} - 3y_0^2 y_2 = -3y_0^2 y_1 \quad (14)$$

$$\frac{dy_1}{dx} + 3y_0 y_1^2 \quad (14)$$

$$\varepsilon^2: (-\alpha^3 + y_0^3) \frac{dy_3}{dx} - 3y_0 y_3 = -3y_0^2 y_2 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dy_2}{dx} - 3y_0^2 y_2 \frac{dy_1}{dx} - 3y_0 y_1^2 \frac{dy_1}{dx} \\ & + 6y_0 y_1 y_2 \end{aligned} \quad (15)$$

式(13)、(14)、(15)分別為第一階、第二階、第三階等三階近似解的微分方程式，其他高階近似解的微分方程式可由比較擾動  $\varepsilon$  的高階次求得。只有第一階近似解  $y_1$  的微分方程式是屬於均勻型 (Homogeneous)，其餘的均為非均勻型 (Nonhomogeneous)。所有的微分方程式都是線性常微分式。此系列微分方程式的邊界條件可由式(7)求得，即

$$y = 1 + \varepsilon; \quad x = 0 \quad (16)$$

式(16)等號右邊的第一項“1”代表均勻流，而第二項

却表示在控制斷面上的已知擾動。因此，第一階近似解  $y_1$  的邊界條件為

$$y_1 = \varepsilon; \quad x = 0 \quad (17)$$

而其餘的近似解 ( $y_i, i=2, 3, 4, \dots$ ) 之邊界條件均須滿足下列之條件：

$$y_i = 0, \quad i=2, 3, 4, \dots; \quad x = 0 \quad (18)$$

以擾動之觀點而言，影響緩變流水面線起自於邊界條件，而不是來自於方程式中的那一項特別小或趨近於零。所以，此干擾直接利用邊界條件(16)加置於第一階近似解上；至於這干擾對其他高階近似解的影響，不再像第一階近似解，利用邊界條件，而是利用微分方程式的型式，高於第一階近似解的微分方程式都是非均勻型的，所以這些微分方程式在  $x=0$  之邊界條件改為  $y_i = 0, i=2, 3, 4, \dots$ 。因此，在  $x=0$  之點上，第一階近似解的深度必須等於已知的擾動；否則，任何階的近似解就會恒等於零。

水面線在控制斷面上，必須符合邊界條件(16)，也就是微分方程式(13)、(14)、(15)的積分常數須滿足條件(17)或(18)。另一方面，吾人均知離開控制斷面無窮遠的地方，或是  $x$  趨近於無窮大，水深必須要趨近於均勻流深度；易言上，任何階次的漸似解必須趨近於零。然而，…分方程式(13)、(14)、(15)只是一階微分式，無法同時滿足這個條件與邊界條件(17)或(18)。因此，當距離趨近於無窮大，要使任何階的近似解都趨近於零，只有利用解之函數形式。綜觀式(13)、(14)、(15)微分方程之型式，吾人極易發現這些微分方程的解是屬於指數型 (Exponent type)，即  $\exp\left(\frac{x}{1-\alpha^3}\right)$ 。所以，在離開控制斷面無窮遠的地方，深度是否逐漸趨近於均勻流深度，完全決定於  $1-\alpha^3$ ；如果  $1-\alpha^3 > 1$ ，深度就漸漸趨近於均勻流深度，否則就愈偏離均勻流深度。由式(3)吾人得知  $\alpha$  代表臨界深度與均勻流深度間的比值。如果流況是屬於超臨界流，臨界深度大於均勻流深度， $\alpha$  大於 1， $1-\alpha^3$  也就小於零。因此，水面線自  $x=0$  的控制斷面起，愈往下游（順乎座標軸  $x$  的方向），深度就愈趨近於均勻流深度。相反地，如果水面線是屬於次臨界流，這時臨界深度小於均勻流深度， $\alpha$  小於 1，所以  $1-\alpha^3$  大於零。然而，控制斷面在下游，水面線計算的順序由下而上，適巧與流動方向  $x$  相反，所以  $\frac{x}{1-\alpha^3}$  也是負的。因此，不管是超臨界流或是次臨界流， $\frac{x}{1-\alpha^3}$  始終是負的。而以

$|1-\alpha^3|$  取代  $1-\alpha^3$ 。次臨界臨界流時， $x$  的原點設在下游的控制斷面上，由下而上計算，則與流動方向相反。相反地，超臨界流時，空間座標之原點設在上游，計算順序與流動方向一致。

由式(13)，吾人極易求得滿足邊界條件(17)之第一階近似解，即

$$y = \exp\left[-\frac{3x}{|1-\alpha^3|}\right] \quad (19)$$

在控制斷面上， $x=0$ ， $y_1=1$ ；離開控制斷面無窮遠， $y_1$  趨近於零。其他階次的近似解，可由低階的近似解代入該階的微分方程式，再求滿足邊界條件(18)，非均勻微分方程式之解。例如：第二階近似解的求法，首先將基礎解 ( $y_0=1$ ) 與第一階近似解 (式(19)) 代入非均勻微分方程式(14)後再求其解，故吾人得第二階近似解為

$$\begin{aligned} y_2 &= -\left(\frac{2+\alpha^3}{1-\alpha^3}\right) \exp\left[-\frac{3x}{|1-\alpha^3|}\right] \times \\ &\quad \left\{\exp\left[-\frac{3x}{|1-\alpha^3|}\right]-1\right\} \end{aligned} \quad (20)$$

使用同樣的方法，即可求得第三階近似解  $y_3$ ，其結果如下：

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{11+14\alpha^3+2\alpha^6}{2(-\alpha^3)^2} \exp\left[-\frac{-3x}{|1-\alpha^3|}\right] \times \\ &\quad \left\{\exp\left[\frac{-6x}{|1-\alpha^3|}\right]-1\right\} - \frac{2(2+\alpha^3)^2}{(1-\alpha^3)^2} \exp\left[\frac{-3x}{|1-\alpha^3|}\right] \left\{\exp\left[\frac{-3x}{|1-\alpha^3|}\right]-1\right\} \end{aligned} \quad (21)$$

以前面三階的近似解而言，使用擾動方法求得的水面線，其結果即將各不同階次的近似解代入式(12)，故

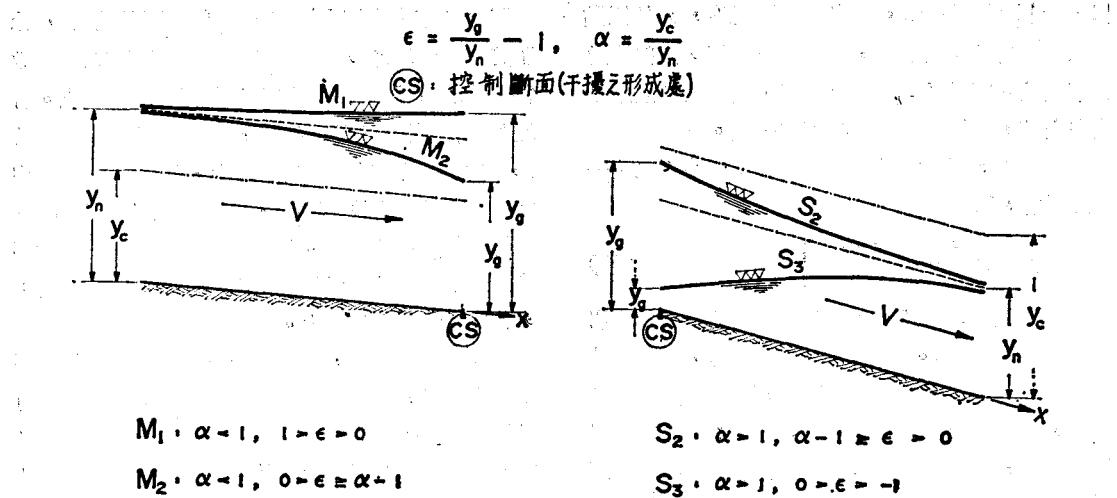
$$\begin{aligned} y &= 1 + \varepsilon \exp\left[-\frac{-3x}{|1-\alpha^3|}\right] - \varepsilon^2 \left(\frac{2+\alpha^3}{1-\alpha^3}\right) \exp\left[\frac{-3x}{|1-\alpha^3|}\right] \times \left\{\exp\left[\frac{-3x}{|1-\alpha^3|}\right]-1\right\} \\ &\quad + \varepsilon^3 \frac{11+14\alpha^3+2\alpha^6}{2(1-\alpha^3)^2} \times \exp\left[\frac{-3x}{|1-\alpha^3|}\right] \left\{\exp\left[\frac{-6x}{|1-\alpha^3|}\right]-1\right\} - \varepsilon^2 \frac{2(2+\alpha^3)^2}{(1-\alpha^3)^2} \\ &\quad \exp\left[\frac{-3x}{|1-\alpha^3|}\right] \left\{\exp\left[\frac{-3x}{|1-\alpha^3|}\right]-1\right\} + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

擾動解(22)顯示以漸近展開式來表示水面線之變化，除了決定於擾動  $\varepsilon$  的大小外，同時視臨界深度與均勻流深度的比值  $\alpha$  而定。 $\alpha$  代表流況， $\alpha$  大於 1 與小於 1 分別代表水面線屬於超臨界流與次臨

界流。由式(22)吾人可看出擾動解的函數結構，除了第一近似解外，其餘各階近似解均由有理函數 (Rational function) 與指數函數組合而成。有理函數含  $\alpha$  等於 1 的多重根，當  $\alpha$  等於 1 或趨近於 1，雖然有理函數趨近於無窮大，可是指數函數趨近於零的速率更快；因此，各階近似解（第一階近似解除外）都會收斂。如果擾動值不計， $\alpha$  值愈不接近於 1 則各階近似解就愈小；反之，愈接近於 1，各階近似解也就愈大。

如式(5)的定義， $\alpha$  值代表臨界深度與均勻流深度間的比值，此值當然不可能等於零，但是吾人可以就實際一般的情況予以大略的估計，這除了可了解上述各階近似解的大小外，尚可供數值計算輸入資料之參考。假設吾人採用公制，由  $\alpha$  的定義即可得知  $\alpha = \left(\frac{1}{n} y^{1/3} \sqrt{s_p} / \sqrt{g}\right)^{2/3}$  ( $y$  代表深度)。粗糙度  $n$  的可能範圍以 0.012 至 0.040 計，而  $s_p$  假設為 0.0005 至 0.5，由於深度之幕數為九分之一，深度的變化範圍對  $\alpha$  的影響比較小，就以深度的變化由一公尺至一百公尺為例，在這些情況下， $\alpha$  的最大值與最小值分別等於 4 與 0.3。 $\alpha$  等於 4 代表坡度非常陡而且粗糙度非常小的超臨界流；相反地， $\alpha$  等於 0.3 則表示坡度非常緩而粗糙度極大的次臨界流。

擾動解以漸近級數 (Asymptotic series) 展開，其特性在於級數之收斂非常快，這是由於吾人採用了尺度數列  $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$ 。如式(7)之定義， $\varepsilon$  代表已知之擾動，為在控制斷面上，已知深度以均勻流深度無因次化後與 1 之間的差距，也就是代表已知的水深與均勻流深度之間的偏差，此值可正亦可負。但是為了使尺度函數能急速收斂，使得漸近展開式僅須前面幾項低階近似解表示，擾動值  $\varepsilon$  之絕對值必須非常小，決不准大於 1。圖二為本論文所討論的四種水面線，擾動值  $\varepsilon$  之變化範圍。這四種水面線中， $\varepsilon$  的變化範圍如下： $M_2$  型水面線， $0 > \varepsilon \geq \alpha - 1$ ； $S_2$  型水面線， $\alpha - 1 > \varepsilon \geq 0$ ； $M_1$  型水面線  $1 > \varepsilon > 0$ ， $S_3$  型水面線  $0 > \varepsilon > -1$ 。 $S_3$  型水面線介於渠底與均勻流深度線之間， $\varepsilon$  趨近於 -1 代表水面線趨近於渠底，式(1)也就變成零除以零的不定式。此外，為了使斷面展開式僅以前面幾項低階近似解代表就夠了， $\varepsilon$  之絕對值也必須小於 1。基於這個因素， $M_1$  型水面線的擾動值也必須小於 1。 $M_1$  型與  $S_3$  型這二類水面線，擾動值



圖二 水面線干擾之形成

的變化範圍可簡化為  $1 > |\epsilon| > 0$ ，不受  $\alpha$  的影響。但是另外二類水面線 ( $M_2$  與  $S_2$ )，擾動值之變化範圍同樣的可簡化為  $|\alpha - 1| \geq |\epsilon| > 0$ ，範圍之上限受制於  $\alpha$  值之大小，同時也要符合漸近展開式的需求，即  $|\epsilon| < 1$ 。

### 三、結果與討論

由圖二吾人得知，水面線之計算必須自控制斷面開始，屬於超臨界流的  $S_2$  與  $S_3$  型水面線，其控制斷面在上游，計算順序由上而下；而  $M_1$  與  $M_2$  型的水面線屬於次臨界流，控制斷面在下游，故由下而上的順序計算。其次， $S_2$  與  $M_1$  型的水面線在均勻流深度線 (Normal depth line) 之上，終端深度 (Terminate depth)  $y_e$  採用 1.02；而  $M_2$  與  $S_3$  型的水面線在均勻流深度線之下，終端深度採用 0.98。計算水面線時，首先將在控制斷面上的已知深度  $y_n$  與終端深度均分為四十等分，利用式(6)，求其兩斷面間的對應距離  $\Delta x$ ，即

$$\Delta x = \int_{y_n}^{y_{n+1}} f(\eta) d\eta \quad (23)$$

$$\text{式中 } f(\eta) = \frac{\eta^3 \alpha^3}{\eta^8 - 1}$$

而右下註腳，“n”與“n+1”分別代表第 n 與第 n+1 斷面。利用數值法積分式(23)時，首先令

$$h = \frac{1}{6} (y_{n+1} - y_n)$$

$$\Delta x = \frac{h}{840} \left\{ 41 f(y_n) + 216 f(y_n + h) + 27 f(y_n + 2h) + 272 f(y_n + 3h) + \right.$$

$$27 f(y_n + 4h) + 216 f(y_n + 5h) +$$

$$41 f(y_n + 6h) \} \quad (24)$$

此數值積分法的誤差為  $6.4 \times 10^{-10} (y_{n+1} - y_n)^9 f'''''(\eta)$ ，而電子計算機的有效數字為十四位。由上式(24)即可求得介於已知深度  $y_n$  與終端深度  $y_e$  之間，各不同深度的對應距離  $x$ ，爾後再代入式(19)、(20)與(21)就可分別求得第一階、第二階與第三階近似解。

由前節所述， $M_2$  與  $S_2$  兩型的水面線，參數  $\alpha$  與擾動值  $\epsilon$  有下列的關係： $|\alpha - 1| \geq |\epsilon|$ 。為了使尺度函數能急速收斂，而漸近展開式得以前面幾項低階近似解表示就足夠了，擾動值必須小於 1，因此吾人設想，上述不等式應該為  $1 \geq |\alpha - 1| \geq |\epsilon|$  較適當。因此，這兩型水面線的  $\alpha$  值分別採用： $M_2$  型水面線  $\alpha = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ ；而  $S_2$  型水面線  $\alpha = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9$ 。這兩型水面線之  $\epsilon$  值，最小值取 0.1，而最大值以上述條件來決定；例如： $M_2$  型水面線為  $\alpha = 0.5$  時，最大  $\epsilon$  值就變為  $0.5 - 1 = -0.5$ ， $S_2$  型水面線  $\alpha = 1.8$  時，最大  $\epsilon$  值則為  $1.8 - 1 = 0.8$ 。其次， $M_1$  與  $S_3$  型水面的  $\alpha$  值分別取自 0.3 至 0.9，1.1 至 1.9，而  $\epsilon$  值的變化範圍大致取自 0.1 至 0.7 左右。這四種水面線的計算，擾動值  $\epsilon$  之間隔均為 0.1。輸入  $\alpha$  值就可由式(23)與(24)計算實際水面線的深度  $y$ ，所有的計算結果展示於表一、二、三與四。對於每一  $\alpha$  值與  $\epsilon$  值，由式(23)與(24)求得距離  $x$  後，再代入式(19)、(20)與(21)

，求由不同階近似解組成的擾動解，即

$$y_{p_1} = y_0 + \epsilon y_1 \quad (25)$$

$$y_{p_2} = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 \quad (26)$$

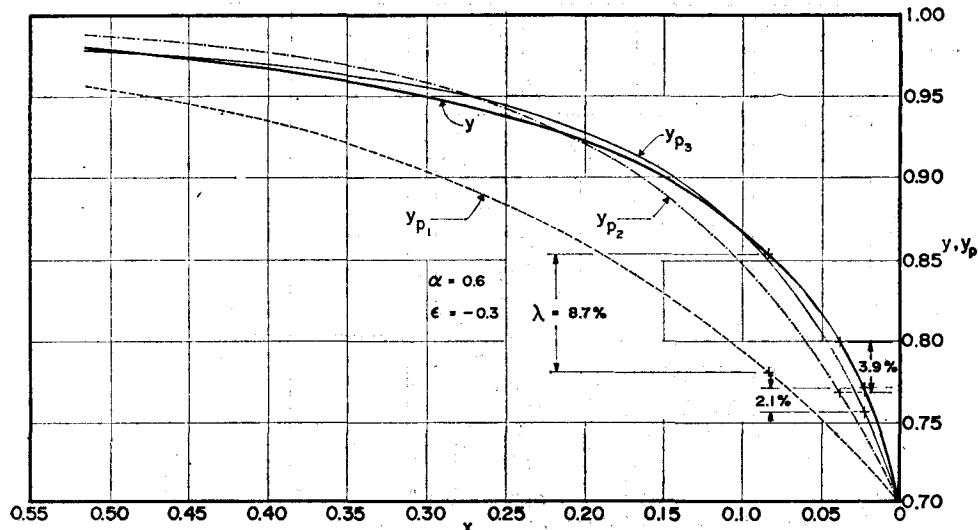
$$y_{p_3} = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \epsilon^3 y_3 \quad (27)$$

式中右下註腳 “p” 代表擾動解，再下的註腳代表擾動解所含近似解之最高階次。上述四表內，同時列出式(25)、(26)與(27)之計算結果，更把這些結果與由式(23)及(24)計算而得的實際水面線之比較列出。兩種不同解法之結果的比較係針對所有不同距離的四十斷面，探討擾動解與實際水面線的比值，即  $y_{p_1}/y$ ， $y_{p_2}/y$  與  $y_{p_3}/y$ 。比值分析的對象計有：平均值  $m$ ，相對標準偏差  $\sigma$  與  $\frac{y_p}{y}$  比值之最大變化幅度  $\lambda$ 。 $m$  值愈接近於 1，代表擾動解愈接近實際水面線； $m$  可正亦可負，正時表示在多半的斷面上，擾動解推測的水深比實際水面線大；負時適巧相反。

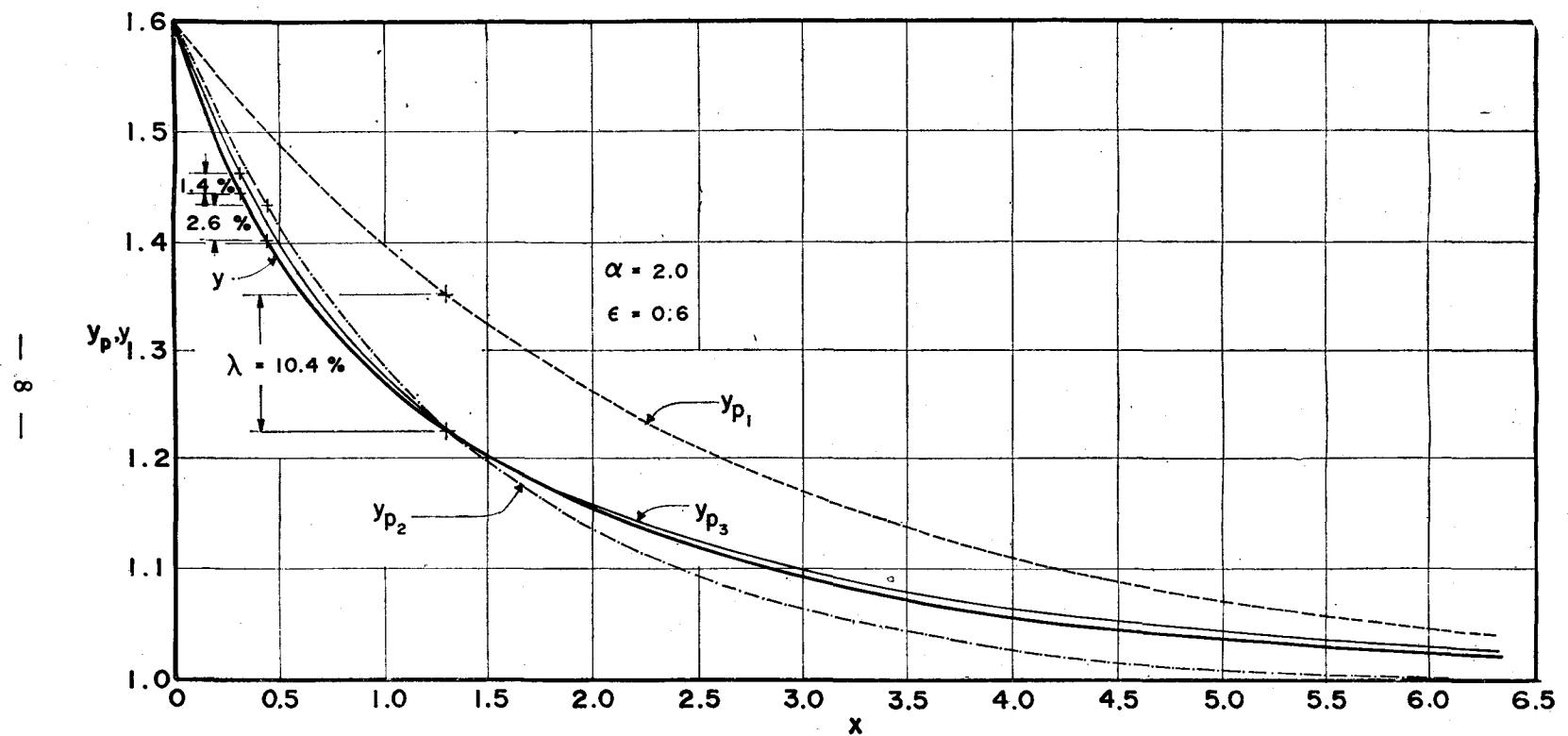
爲了曉得擾動解（式(25)、(26)或(27)）與實際水面線（由式(23)與(24)計算而得），沿流動方向整個縱向的偏差變化，及不同  $\alpha$  值與  $\epsilon$  值對此偏差的影響；照理，應該繪畫所有不同  $\alpha$  值與  $\epsilon$  值的水面線；但是，如圖三、四、五與六所示，從這些典型代表，吾人不難了解與推測其他未繪出圖形的大致情形。而圖三、四、五與六分別取自表一、二、三與四，代表着  $M_2$ 、 $S_2$ 、 $M_1$  與  $S_3$  四種不同型別的水面線；每一個圖均取自同一型別內，擾動解（以虛線、點虛線與細實線表示）與實際水面線（以粗實線

表示）兩者間的最大差異爲代表。由這些圖內曲線之比較，吾人大致可了解擾動解與實際水面線，其兩者間差異之傾向與最大範圍。如果兩者間的差異很大，即圖上點虛線與粗實線所示，由基礎解與第一階近似解組成的擾動解（式(25)）所推測的水深不是所有的斷面都比實際水面線深，就是所有的斷面都比實際水面線淺。相反地，如果兩者之間的差異較小，例如  $\epsilon$  值較小時，由基礎解與第一階近似解組成的擾動解，或是其他含更高階近似解的擾動解，這時候在部份斷面上，擾動解推測的水位較實際水位深，而在另外斷面上，擾動解推測的水位就較淺了。在這種情況下，擾動解與實際水位的比值即  $y_{p_i}/y$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ )，部份大於 1 而部份又小於 1，縱使四十個斷面上的平均值  $m$  非常靠近 1，吾人也無法很精確地了解擾動解與實際水面線間的差異，必須依賴分別代表差異傾向與差異之最大範圍的兩個指標  $\sigma$  與  $\lambda$ ，才能了解差異之確實情形。

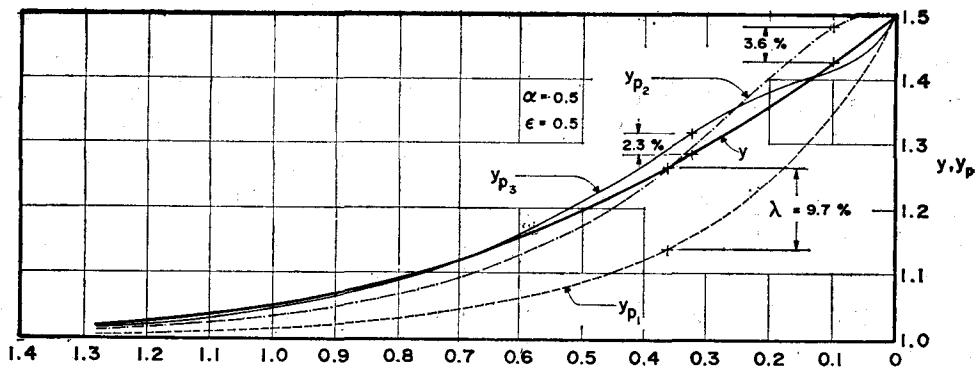
由圖三、四、五與六，吾人即可很明顯的看出，儘管擾動解 ( $y_{p_i}, i=1, 2, 3, \dots$ ) 符合在控制斷面上等於已知深度  $y_g$ ，及在離開控制斷面無窮遠的地方，擾動解的深度也趨近於均勻流深度（即  $(y_{p_i}=1, i=1, 2, 3, \dots)$ ）。然而，除非是  $\epsilon$  值很小，或是  $\alpha$  值不在 1 的附近（參閱表一、二、三與四），靠近控制斷面之附近，實際水面線（由式(23)與(24)計算得，以粗實線展示於圖內）無法僅以如式(24)這樣簡單的指數函數來表示，這一點可由虛線與粗實線間的偏差看出。但是，比較點虛線與粗實線，



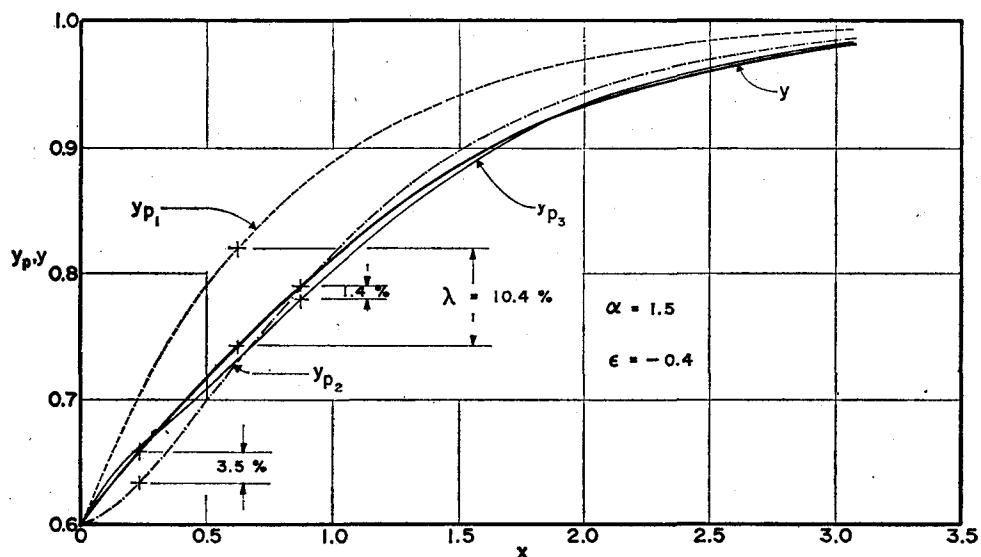
圖三  $M_2$  型 水面線



圖四  $S_2$  型 水面線



圖五  $M_1$  型 水面線



圖六  $S_3$  型 水面線

細實線與粗實線，吾人可發現包括高階近似解的擾動解，却能使擾動解推測之水面線更接近實際水面線。圖三、四、五與六均一致顯示，不論是那一類型的水面線，式(26)比式(25)，而式(27)又比式(26)更能儘速趨近於實際水面線。由各不同階近似解組成的擾動解而言，以只包含基礎解與第一階近似解之擾動解（式(25)或圖上虛線所示）與實際水面線的偏差最大，往往可高達到百分之十左右。例如圖三之  $M_2$  型水面線， $\alpha=0.6$  與  $\epsilon=-0.3$  時，偏差之最大範圍  $\lambda=8.7\%$ ；圖四之  $S_3$  型水面線， $\alpha=2.0$  與  $\epsilon=0.6$  時， $\lambda=10.4\%$ ；圖五之  $M_1$  型水面線， $\alpha=0.5$  與  $\epsilon=0.5$  時， $\lambda=9.7\%$ ；圖六之  $S_3$  型水面線， $\alpha=1.5$  與  $\epsilon=-0.4$  時， $\lambda=10.4\%$ 。這樣大的偏差，是由於擾動值  $\epsilon$  太大了，如果減少其值，偏差的最大範圍當然可降低。

表一、二、三與四均顯示，如果  $\alpha$  值不是在 1 的附近，只要  $\epsilon$  值不要太小，由基礎解與第一階近似解組成的擾動解（式(25)），或圖三、四、五與六中的虛線就足以代表實際水面線（由式(23)與(24)計算而得）。例如：表二之  $S_2$  型水面線  $\alpha=1.2$  與  $\epsilon=0.1$  時，以實際水面線為基準，擾動解與實際水面線偏差之最大範圍  $\lambda$  大約在 0 至百分之一之間，這幾乎是完全融合了。其次，在某些情況下，例如表二之  $S_2$  型水面線，即是擾動值  $\epsilon$  高至 0.2，只要  $\alpha$  值遠大於 1，同樣地可使偏差之最大範圍保持在百分之一以內，參閱  $\alpha$  等於 1.9 的情況。總之，由表一、二、三與四，吾人極易發現，如果擾動值  $\epsilon$  小於或等於 0.1 ( $\alpha < 0.7$ ,  $\alpha > 1.2$ ,  $\alpha < 0.9$  與  $\alpha > 1.2$ ，當水面線分別為  $M_3$ 、 $S_2$ 、 $M_1$  與  $S_3$  型水面線），偏差之最大範圍都在百分之一以內。易言之

在這些情況下，水面線可以式(2)那樣簡單的函數關係式來表示。

$$\frac{y}{y_n} = 1 + \frac{y_e}{y_n} \exp \left[ -\frac{3x/y_n s_0}{1 - \left( \frac{y_e}{y_n} \right)^3} \right] \quad (25)$$

式中  $y_e$  為控制斷面上之已知深度，這在應用與分析上將是很方便的。水面線之計算，吾人往往需要由距離求深度，這是相當費人力與時間。但是，如果使用上式則可省力又省時。此外，上式更可進一步供由某些因素改變後，探討流況的通盤特性與現象，例如由於地盤下陷而產生對洪水峯的影響。這一方面的分析，往往必須藉助於像上式之分析解，而不是利用電子計算機求得的個案特性。其次，以偏差之最大範圍來  $\lambda$  來衡量擾動解與由式(2)與(25)求得的水面線間的誤差是非常嚴格的。檢視表一、二、三與四，在各種不同情況下，偏差之最大範圍與相對標準偏差的比例，吾人可發現前者大概為後者的三至五倍左右。因此，吾人如果降低容許誤差，改以  $\sigma$  小於或等於百分之一為準，在這種情況下，容許的擾動值勢必比上述的 0.1 大得多。下列情形都可使式(25)的精確度維持在百分之九十八以內 ( $\sigma = 2\%$ )。  $M_2$  型水面線： $\alpha \leq 0.9$  與  $\epsilon \leq 0.2$ 。 $S_2$  型水面線： $\alpha \geq 1.4$  與  $\epsilon \leq 0.2$ ； $\alpha \geq 1.8$  與  $\epsilon \leq 0.3$ 。 $M_1$  型水面線： $\alpha \leq 0.7$  與  $\epsilon \leq 0.2$ 。 $S_3$  型水面線： $\alpha \geq 1.3$  與  $\epsilon \leq 0.2$ 。

對於較高擾動值的情況 ( $\epsilon$  大於 0.1 或 0.2)，擾動解必須加入較高階近似解，即如式(26)或(27)所示。同樣地，以式(25)與(24)所得的實際水面線為基準，包含愈高階近似解之擾動解愈能降低擾動解與實際水面線兩者之間比值的最大範圍  $\lambda$ 。以  $M_2$  型水面線為例（參閱表一），當  $\epsilon = 0.3$  與  $\alpha = 0.3$  時，由基礎解，第一與第二階近似解組成的擾動解（式(26)），偏差之最大範圍  $\lambda$  由  $-2\%$  至  $1\%$ ；但是，多含了第三階近似解之擾動解（式(27)），則使偏差之最大範圍縮小為  $-1\%$  至  $0\%$ 。其次，在相同之擾動值及由相同階次近似解組成的擾動解， $\alpha$  值接近 1 也會增加偏差之最大範圍  $\lambda$ 。以  $\epsilon = 0.2$  與由基礎解，第一與第二階近似解組成之擾動解為例， $\alpha = 0.3$  時偏差之最大範圍為  $-2\%$  至  $1\%$ ；但是，當  $\alpha = 0.6$  時，偏差之範圍就增大為  $-9\%$  至  $1\%$ 。如果  $\epsilon$  太大，以表一  $\alpha = 0.3$  與  $\epsilon = 0.7$  為例，擾動值高到這樣大的程度，由基礎解，第一、第二與第三階近似解組成的擾動解，頂多只能使

偏差之最大範圍小到  $-25\%$  至  $9\%$ ，無法再縮小，除非擾動解之組合再包含第四階或更高階之近似解。擾動解包含愈高階之近似解，愈能提高其精確度，這是一般「解」以漸近級數展開所具有的特性。對於  $M_2$  與  $S_2$  這二類之水面線，只要  $\epsilon$  與  $\alpha$  符合下列條件： $1 > |1 - \alpha| \geq |\epsilon|$ ，表一與表二充分的顯示這兩種水面線以漸近展開式表示的，確實具有上述的性質。然而，另一類型的水面線， $M_1$  與  $S_3$ ，如果  $\alpha$  值太接近於 1 或是  $\epsilon$  值太大時，表三與四顯示漸近展開式就失去了這種性質。這些現象發生於下列情況： $M_1$  水面線計有， $\alpha = 0.7$  時  $\epsilon \geq 0.6$ 、 $\alpha = 0.8$  時  $\epsilon \geq 0.4$ 、 $\alpha = 0.9$  時  $\epsilon \geq 0.3$ （參閱表三）； $S_3$  型水面線計有， $\alpha = 1.1$  時  $\epsilon \leq -0.3$ 、 $\alpha = 1.2$  時  $\epsilon \leq -0.4$ 、 $\alpha = 1.3$  時  $\epsilon \leq -0.6$ 、 $\alpha = 1.4$  時  $\epsilon \leq -0.7$ 、 $\alpha = 1.5$  時  $\epsilon \leq -0.8$ 、 $\alpha = 1.6$  時  $\epsilon \leq -0.9$ 。目前，由於本研究只計算到第三階近似解，尚無法下肯定的結論。總之，在上述  $\epsilon$  與  $\alpha$  的範圍內，含愈高階近似解之擾動解就愈偏離實際水面線，以漸近展開式來表示式(6)之解，這是可能的。一般的漸近展開式，往往會出現到某一階近似解組成的擾動解，其偏差最小，如再包含其他更高階近似解，偏差反而增大，這個時候的漸近展開式，當然就取到這一階為止。在這種情況下，也許吾人可以另一型式的尺度函數來組成近展開式，而不採用  $1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3$  [5]。

本論文的探討，假設寬矩形渠道而且 Chezy 係數可視為常數，因此出現於水面線方程式內的幕數等於 3。一般情況下，漸近展開式的形式也應該不會有多大的改變。就以式(25)為例，漸近展開式係以  $\exp \left[ -\frac{3x}{|1 - \alpha^3|} \right]$  的函數形式組合而成，或是此函數改為  $\exp \left[ -\frac{cx}{|1 - \alpha^k|} \right]$ ，式中  $c$  與  $k$  視斷面形狀及引用的均勻流公式而定。

#### 四、結論

定量流的緩變流，如果深度以均勻流深度為深度尺度，距離以均勻流深度除以坡度之商為距離尺度，再設一參數代表臨界深度與均勻流深度之比值，則水面線方程可予以無因次化；而後，由此式來分析緩變流的水面線可視為一正規擾動問題 (Regular perturbation problem)，此問題之分析係以均勻流為基礎解，而以在控制斷面上，已知深度減掉均勻流深度的差額為擾動值  $\epsilon$ 。如此，

以擾動值  $\epsilon$  的多項式為尺度函數，水面線可以漸近展開式表示，比較擾動值  $\epsilon$  之同次項，即可獲得一系列含各階近似解的線性常微分方程式，利用於控制斷面上，水深必須等於已知深度的條件，吾人就逐式解微分方程式而求得各階近似解。由此些不同階之近似解，即可組合成含不同最高階近似解的擾動解（參閱式(2)、(26)與(27)）。最具實用性及分析用的擾動解是由基礎解與第一階近似解構成的。利用擾動法分析緩變流的水面線為一新嘗試法，此法不同於一般階梯方法與直接積分法，它以簡單的指數函數來推測水面線的變化，不但在使用上非常簡捷，而且可供進一步分析用。

為了了解擾動解  $y_p$  的可靠性，利用誤差極小的數值分析方法（式(24)）積分水面線方程式，其結果稱之為實際水面線。由第一階、第二階與第三階近似解為最高階的三種擾動解就可與實際水面線比較，採用擾動解與實際水面線的比值，即  $y_p/y$ 。探討的水面線共有四類： $M_2$ ， $S_2$ ， $M_1$  與  $S_3$ 。每一型的水面線  $\alpha$  值與  $\epsilon$  值予以有系統的變化，而每一  $\alpha$  值與  $\epsilon$  值，總共比較四十個不同斷面上的比值  $y_p/y$ ，比較的結果係以比值的平均值  $m$ ，相對標準偏差  $\sigma$  與最大的變化範圍  $\lambda$ （參閱表一、二、三與四、圖三、四、五與六）。一般而言，在部份的斷面上，擾動解推測的水位較實際水位深，而在另外的斷面上則較淺。因此，大部份的情況， $m$  值均在 1 左右。為了更精確地分析擾動解的誤差，吾人採用比值變化的最大範圍為依據。如果擾動值小於或等於 0.1，而  $\alpha$  不在 1 附近，由基礎解與第一階近似解組成的擾動解（式(2)）所推測的水位非常精確；以實際水面線為基準，在所有的斷面上，擾動

解（式(25)）推測的水位其偏差均在百分之一以內。如果提高容許偏差更可適用於較高的擾動值  $\epsilon$  上。

對於較高擾動值的情況，例如  $\epsilon > 0.3$ ，由較多與較高階近似解組合成的擾動解都可增加推測值之精度，即降低比值變化的最大範圍  $\lambda$ 。以本論文所分析的四類水面線而言，擾動解確實都具有這種性質。然而，對於  $M_1$  與  $S_3$  這兩型的水面線，如果擾動值  $\epsilon$  太大，而且  $\alpha$  又在 1 的附近，擾動解的組成增加擾動解的階數，反而增加偏差，無法達到預期的效果。這說明了，在這些情況下的尺度函數不能再以擾動值  $\epsilon$  的多項式來表示，必須另一形式表示，而且須含蓋  $\alpha - 1$  這個因子。

## 五、致謝

淡江大學資訊中心之鼎力協助，致本論文得以順利完成，作者在此謹致深厚謝意。作者深深感謝本部麥秀寶小姐不厭其煩地細心抄寫。

## 參考文獻

1. F. H. Henderson. "Open Channel Flow" (1968), p. 131.
2. Ven Te Chow. "Open Channel Hydraulics" (New York: Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1959), Chap. 10.
3. Milton Van Dyke. "Perturbation Method in Fluid Mechanics" (New York: Academic Press Company, Inc., 1964). Chap. 1.
4. Carl-Erik Froberg. "Introduction to Numerical Analysis" (1968), p. 178.
5. Ali Hasan Nayfeh. "Introduction to Perturbation Techniques" (1981), p. 18-22.

## 附 錄

表一  $M_2$  型水面線

$\alpha$	$-\epsilon$	m			$\sigma$			$\lambda$		
		$y_{P1}/y$	$y_{P2}/y$	$y_{P3}/y$	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{P3}/y$ (%)	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{P3}/y$ (%)
0.3	0.1	0.9959	0.9998	1.0000	0.16	0.02	0.00	0~0	0~0	-1~0*
	0.2	0.9828	0.9985	0.9998	0.69	0.21	0.04	-2~0	0~0	0~0
	0.3	0.9593	0.9941	0.9985	1.74	0.79	0.25	-6~0	-2~1	-1~0
	0.4	0.9231	0.9933	0.9950	3.51	2.07	0.91	-7~0	-4~1	-2~1
	0.5	0.8720	0.9612	0.9857	6.25	4.51	2.54	-18~0	-9~3	-5~2
	0.6	0.8032	0.9214	0.9637	10.43	8.80	6.07	-29~0	-18~5	-12~4
	0.7	0.7133	0.8555	0.9167	16.91	16.19	13.13	-41~0	-30~8	-25~9
0.4	0.1	1.0000	1.0000	1.0000	0.17	0.02	0.00	-1~0	0~0	0~0
	0.2	0.9817	0.9981	1.0000	0.73	0.24	0.06	-3~0	0~0	0~0
	0.3	0.9563	0.9925	0.9980	1.88	0.92	0.33	-6~0	-2~1	-1~0
	0.4	0.9170	0.9787	0.9929	3.81	2.45	1.22	-12~0	-5~2	-3~1
	0.5	0.8609	0.9499	0.9783	6.87	5.43	3.50	-20~0	-11~3	-7~2
	0.6	0.7848	0.8967	0.9413	11.65	10.92	8.69	-31~0	-22~5	-17~5
	0.7	0.7133	0.8555	0.9167	16.91	16.19	13.13	-41~0	-30~8	-25~9
0.5	0.1	0.9951	0.9997	0.9999	0.19	0.03	0.00	-1~0	0~0	0~0
	0.2	0.9795	0.9974	0.9994	0.83	0.30	0.08	-3~0	-1~0	-1~0
	0.3	0.9506	0.9894	0.9970	2.13	1.18	0.51	-7~0	-2~1	-1~0
	0.4	0.9053	0.9689	0.9875	4.40	3.23	1.96	-14~0	-7~2	-4~1
	0.5	0.8396	0.9249	0.9578	8.11	7.47	5.91	-23~0	-16~4	-12~3
0.6	0.1	0.9942	0.9995	0.9999	0.22	0.04	0.01	-1~0	0~0	0~0
	0.2	0.9754	0.9958	0.9991	0.99	0.44	0.16	-3~0	-1~0	0~0
	0.3	0.9400	0.9822	0.9937	2.63	1.76	0.99	-9~0	-4~1	-2~1**
	0.4	0.8830	0.9456	0.9700	5.58	5.06	4.04	-17~0	-11~3	-8~2
0.7	0.1	0.9926	0.9991	0.9999	0.29	0.07	0.02	-1~0	0~0	0~0
	0.2	0.9675	0.9916	0.9977	1.33	0.76	0.39	-5~0	-2~0	-1~0
	0.3	0.9185	0.9619	0.9796	3.67	3.28	2.68	-12~0	-8~2	-6~1
0.8	0.1	0.9883	0.9978	0.9996	0.44	0.16	0.07	-2~0	0~0	0~0
	0.2	0.9484	0.9753	0.9873	2.19	1.88	1.62	-7~0	-5~1	-4~1
0.9	0.1	0.9751	0.9867	0.9931	1.05	0.72	0.72	-3~0	-2~0	-1~0

\* 小數點以下四捨五入

\*\* 參閱圖三

表二 S<sub>2</sub> 型水面線

$\alpha$	$\epsilon$	m			$\sigma$			$\lambda$		
		$y_{P1}/y$	$y_{P2}/y$	$y_{P3}/y$	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{P3}/y$ (%)	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{P3}/y$ (%)
1.1	0.1	1.0224	1.0118	1.0059	0.94	0.62	0.62	0~3	0~2	0~1
1.2	0.1	1.0100	1.0019	1.0003	0.40	0.13	0.06	0~1	0~0	0~0
	0.2	1.0423	1.0191	1.0093	1.78	1.42	1.22	0~6	-1~4	-1~3
1.3	0.1	1.0066	1.0007	1.0001	0.26	0.06	0.02	0~1	0~0	0~0
	0.2	1.0262	1.0062	1.0017	1.06	0.57	0.29	0~4	0~1	0~1
	0.3	1.0604	1.0255	1.0129	2.51	2.14	1.72	0~9	-1~5	-1~4
1.4	0.1	1.0050	1.0004	1.0000	0.20	0.35	0.01	0~1	0~0	0~0
	0.2	1.0193	1.0029	1.0007	0.78	0.32	0.11	0~3	0~1	0~0
	0.3	1.0433	1.0111	1.0040	1.80	1.13	0.60	0~6	-1~2	0~1
	0.4	1.0775	1.0310	1.0165	3.27	2.82	2.14	0~12	-2~7	-1~5
1.5	0.1	1.0041	1.0002	1.0000	0.16	0.02	0.00	0~1	0~0	0~0
	0.2	1.0156	1.0016	1.0005	0.63	0.21	0.05	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0343	1.0059	1.0021	1.43	0.72	0.27	0~5	-1~1	0~1
	0.4	1.0603	1.0159	1.0070	2.55	1.75	0.93	0~9	-1~4	-1~2
	0.5	1.0940	1.0355	1.0202	4.00	3.49	2.50	0~14	-3~8	-2~6
1.6	0.1	1.0035	1.0001	1.0000	0.14	0.02	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	1.0133	1.0010	1.0004	0.53	0.15	0.03	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0288	1.0035	1.0015	1.20	0.51	0.14	0~4	0~1	0~0
	0.4	1.0501	1.0092	1.0042	2.13	1.22	0.47	0~7	-1~2	0~1
	0.5	1.0771	1.0201	1.0106	3.30	2.40	1.24	0~12	-2~5	-1~3
	0.6	1.1100	1.0392	1.0244	4.70	4.17	2.78	0~17	-4~9	-2~6
1.7	0.1	1.0031	1.0001	1.0000	0.12	0.01	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	1.0117	1.0006	1.0004	0.47	0.12	0.02	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0252	1.0022	1.0012	1.05	0.39	0.08	0~4	0~1	0~0
	0.4	1.0434	1.0056	1.0032	1.85	0.93	0.26	0~6	-1~2	0~1
	0.5	1.0662	1.0122	1.0072	2.84	1.80	0.69	0~10	-2~3	0~2
	0.6	1.0926	1.0236	1.0148	4.03	3.08	1.52	0~14	-3~6	-1~4
	0.7	1.1255	1.0419	1.0290	5.39	4.87	2.99	0~20	-5~10	-2~7

表二 S<sub>2</sub> 型水面線(續)

$\alpha$	$\epsilon$	m			$\sigma$			$\lambda$		
		$y_{P1}/y$	$y_{P2}/y$	$y_{Ps}/y$	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{Ps}/y$ (%)	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{Ps}/y$ (%)	$y_{Ps}/y$ (%)
1.8	0.1	1.0028	1.0001	1.0000	0.11	0.01	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	1.0106	1.0004	1.0003	0.43	0.10	0.01	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0227	1.0014	1.0011	0.95	0.32	0.05	0~3	0~1	0~0
	0.4	1.0388	1.0035	1.0028	1.66	0.74	0.16	0~6	-1~1	0~1
	0.5	1.0588	1.0077	1.0057	2.54	1.43	0.41	0~9	-2~2	0~1
	0.6	1.0825	1.0149	1.0109	3.57	2.43	0.89	0~13	-3~4	0~2
	0.7	1.1098	1.0264	1.0196	4.75	3.80	1.74	0~17	-4~7	-1~5
	0.8	1.1407	1.0437	1.0342	6.06	5.60	3.14	0~22	-6~11	-2~8
1.9	0.1	1.0026	1.0000	1.0000	0.10	0.10	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	1.0098	1.0002	1.0003	0.39	0.08	0.01	0~1	0~0	0~0
	0.3	1.0209	1.0008	1.0011	0.87	0.27	0.03	0~3	0~0	0~0
	0.4	1.0355	1.0022	1.0025	1.51	0.62	0.10	0~5	-1~1	0~0
	0.5	1.0534	1.0049	1.0051	2.31	1.19	0.25	0~8	-1~2	0~1
	0.6	1.0745	1.0096	1.0091	3.24	2.01	0.55	0~11	-2~3	0~2
	0.7	1.0987	1.0170	1.0155	4.30	3.12	1.07	0~15	-4~5	0~3
	0.8	1.1257	1.0283	1.0253	5.46	4.57	1.92	0~20	-6~8	0~5
	0.9	1.1557	1.0446	1.0403	6.73	6.38	3.22	0~25	-8~12	-1~9
2.0	0.1	1.0025	1.0000	1.0000	0.10	0.09	0.01	0~0	0~0	0~0
	0.2	1.0092	1.0001	1.0003	0.37	0.07	0.10	0~1	0~0	0~0
	0.3	1.0195	1.0005	1.0011	0.81	0.23	0.03	0~3	0~0	0~0
	0.4	1.0330	1.0013	1.0024	1.41	0.54	0.08	0~5	-1~1	0~0
	0.5	1.0494	1.0030	1.0047	2.14	1.02	0.17	0~7	-1~2	0~1
	0.6	1.0686	1.0060	1.0082	3.00	1.72	0.36	0~10	-2~3	0~1*
	0.7	1.0904	1.0110	1.0134	3.96	2.66	0.70	0~14	-4~4	0~2
	0.8	1.1148	1.0185	1.0209	5.01	3.87	1.24	0~18	-5~6	0~4
	0.9	1.1415	1.0294	1.0317	6.16	5.38	2.06	0~22	-7~9	0~6
	1.0	1.1705	1.0447	1.0472	7.38	7.21	3.27	0~27	-10~13	-1~10

\* 參閱圖四

表三 M<sub>1</sub> 型水面線

$\alpha$	$\epsilon$	m			$\sigma$			$\lambda$		
		$y_{P1}/y$	$y_{P2}/y$	$y_{Ps}/y$	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{Ps}/y$ (%)	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{Ps}/y$ (%)
0.3	0.1	0.9965	1.0001	1.0000	0.13	0.02	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	0.9874	1.0005	1.0004	0.50	0.15	0.04	-2~0	0~0	0~0
	0.3	0.9744	1.0011	1.0013	1.08	0.45	0.15	-4~0	0~0	0~0
	0.4	0.9585	1.0016	1.0031	1.89	0.96	0.40	-6~0	-1~2	0~0
	0.5	0.9406	1.0017	1.0059	2.73	1.69	0.84	-9~0	-2~3	0~2
	0.6	0.9213	1.0012	1.0097	3.73	2.64	1.51	-12~0	-3~4	-1~3
	0.7	0.9012	0.9998	1.0147	4.83	3.79	2.43	-15~0	-5~6	-2~5
0.4	0.1	0.9963	1.0001	1.0001	0.14	0.02	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	0.9868	1.0006	1.0004	0.52	0.16	0.04	-2~0	0~0	0~0
	0.3	0.9732	1.0013	1.0013	1.13	0.50	0.17	-4~0	0~0	0~0
	0.4	0.9568	1.0019	1.0031	1.91	1.06	0.46	-6~0	-1~2	0~0
	0.5	0.9382	1.0022	1.0059	2.84	1.86	0.95	-9~0	-2~3	0~2
	0.6	0.9184	1.0017	1.0098	3.88	2.88	1.70	-12~0	-3~5	-2~4
	0.7	0.8978	1.0004	1.0147	5.01	4.12	2.73	-15~0	-5~7	-3~6
0.5	0.1	0.9959	1.0002	1.0000	0.15	0.03	0.00	0~0	0~0	-0~0
	0.2	0.9857	1.0008	1.0004	0.57	0.20	0.05	-2~0	0~0	0~0
	0.3	0.9711	1.0017	1.0013	1.22	0.59	0.23	-4~0	-1~1	0~0
	0.4	0.9536	1.0026	1.0031	2.06	1.25	0.57	-7~0	-1~2	0~1
	0.5	0.9341	1.0030	1.0059	3.04	2.17	1.18	-10~0	-2~4	0~2*
	0.6	0.9134	1.0027	1.0099	4.14	3.33	2.10	-12~0	-4~6	-3~4
	0.7	0.8921	1.0013	1.0148	5.33	4.74	3.84	-16~0	-5~8	-5~7
0.6	0.1	0.9953	1.0003	1.0000	0.18	0.03	0.01	-1~0	0~0	0~0
	0.2	0.9837	1.0012	1.0004	0.65	0.26	0.08	-2~0	0~0	0~0
	0.3	0.9675	1.0035	1.0013	1.38	0.77	0.32	-5~0	-1~1	0~0
	0.4	0.9483	1.0037	1.0032	2.31	1.60	0.83	-8~0	-2~3	0~1
	0.5	0.9273	1.0044	1.0061	3.39	2.75	1.69	-10~0	-3~5	-3~3
	0.6	0.9052	1.0041	1.0102	4.58	4.18	2.96	-14~0	-4~7	-5~5
	0.7	0.8827	1.0027	1.0151	5.86	5.87	4.65	-18~0	-7~10	-8~9

表三  $M_1$  型水面線(續)

$\alpha$	$\epsilon$	m			$\sigma$			$\lambda$		
		$y_{P1}/y$	$y_{P2}/y$	$y_{P3}/y$	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{P3}/y$ (%)	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{P3}/y$ (%)
0.7	0.1	0.9942	1.0004	1.0000	0.22	0.05	0.01	-1~0	0~0	0~0
	0.2	0.9802	1.0019	1.0004	0.79	0.40	0.15	-3~0	0~0	0~0
	0.3	0.9614	1.0039	1.0014	1.65	1.15	0.58	-6~0	-1~2	0~0
	0.4	0.9395	1.0056	1.0034	2.73	2.32	1.48	-9~0	-2~4	-3~2
	0.5	0.9161	1.0064	1.0067	3.96	3.89	2.94	-12~0	-4~7	-5~5
	0.6	0.8920	1.0059	1.0110	5.31	5.80	5.01	-16~0	-6~11	-10~8
	0.7	0.8680	1.0040	1.0160	6.73	7.99	7.73	-20~0	-8~14	-15~13
0.8	0.1	0.9919	1.0009	1.0000	0.30	0.11	0.04	-1~0	0~0	0~0
	0.2	0.9736	1.0034	1.0004	1.05	0.76	0.39	-4~0	-1~1	-1~1
	0.3	0.9500	1.0063	1.0018	2.16	2.07	1.47	-7~0	-2~4	-3~2
	0.4	0.9240	1.0083	1.0046	3.50	4.01	3.53	-11~0	-4~8	-7~5
	0.5	0.8972	1.0085	1.0085	4.99	6.46	6.72	-15~0	-6~12	-14~10
	0.6	0.8706	1.0068	1.0133	6.57	9.30	11.06	-19~0	-9~18	-25~17
	0.7	0.8448	1.0032	1.0182	8.20	12.43	16.51	-23~0	-11~24	-40~27
0.9	0.1	0.9858	1.0025	1.0000	0.52	0.37	0.22	-2~0	0~0	0~0
	0.2	0.9579	1.0070	1.0013	1.71	2.19	2.00	-6~0	-2~4	-4~3
	0.3	0.9263	1.0095	1.0047	3.33	5.32	6.60	-11~0	-4~11	-16~11
	0.4	0.8946	1.0089	1.0092	5.15	9.35	14.43	-16~0	-8~20	-38~21
	0.5	0.8641	1.0054	1.0139	7.06	13.96	25.51	-20~0	-12~31	-74~40

\* 參閱圖五。

表四 S<sub>8</sub> 型水面線

	-ε	m			σ			λ		
		y <sub>P1</sub> /y	y <sub>P2</sub> /y	y <sub>P3</sub> /y	y <sub>P1</sub> /y (%)	y <sub>P2</sub> /y (%)	y <sub>P3</sub> /y (%)	y <sub>P1</sub> /y (%)	y <sub>P2</sub> /y (%)	y <sub>P3</sub> /y (%)
1.1	0.1	1.0159	0.9970	1.0001	0.55	0.43	0.25	0~2	-1~0	0~0
	0.2	1.0525	0.9888	0.9995	2.01	2.94	2.73	0~8	-6~2	-3~6
	0.3	1.1040	0.9764	0.9980	4.32	8.52	10.86	0~16	-18~6	-14~28
	0.4	1.1700	0.9587	0.9965	7.36	18.30	29.21	0~28	-42~11	-38~85
	0.5	1.2530	0.9312	0.9976	11.17	34.43	64.82	0~44	-81~19	-88~207
1.2	0.1	1.0090	0.9990	1.0000	0.32	0.12	0.04	0~1	0~0	0~0
	0.2	1.0327	0.9950	0.9999	1.24	0.98	0.51	0~5	-2~1	-1~1
	0.3	1.0695	0.9875	0.9994	2.82	8.15	2.28	0~10	-6~2	-3~5
	0.4	1.1200	0.9759	0.9983	5.08	7.27	6.80	0~19	-15~5	-8~16
	0.5	1.1863	0.9584	0.9976	7.94	14.32	15.44	0~30	-30~9	-20~40
	0.6	1.2729	0.9309	0.9997	11.67	26.15	32.12	0~46	-58~14	-40~92
1.3	0.1	1.0064	0.9995	1.0000	0.28	0.06	0.01	0~1	0~0	0~0
	0.2	1.0242	0.9974	0.9997	0.92	0.51	0.18	0~3	-1~0	0~0
	0.3	1.0532	0.9930	0.9991	2.15	1.67	0.84	0~8	-3~1	-1~2
	0.4	1.0943	0.9859	0.9978	3.94	8.98	2.55	0~14	-8~3	-3~5
	0.5	0.1500	0.9750	0.9958	6.35	8.02	6.14	0~24	-17~5	-8~15
	0.6	1.2242	0.9579	0.9940	9.54	14.81	13.09	0~37	-31~9	-17~33
	0.7	1.3246	0.9288	0.9951	13.73	26.56	26.19	0~56	-59~15	-31~73
1.4	0.1	1.0051	0.9997	1.0000	0.18	0.04	0.01	0~1	0~0	0~0
	0.2	1.0196	0.9985	0.9997	0.75	0.31	0.08	0~3	-1~0	0~0
	0.3	1.0439	0.9959	0.9989	1.78	1.06	0.41	0~6	-2~1	-1~1
	0.4	1.0792	0.9915	0.9974	3.31	2.58	1.27	0~12	-5~2	-2~2
	0.5	1.1280	0.9848	0.9947	5.43	5.26	3.12	0~20	-11~4	-4~6
	0.6	1.1940	0.9742	0.9909	8.25	9.79	6.74	0~31	-21~7	-10~15
	0.7	1.2842	0.9562	0.9869	12.06	17.53	18.64	0~48	-38~11	-19~34
	0.8	1.4126	0.9201	0.9870	17.31	32.01	27.26	0~75	-73~17	-37~77

表四 S<sub>8</sub> 型水面線(續)

$\alpha$	$-\epsilon$	m			$\sigma$			$\lambda$		
		$y_{P1}/y$	$y_{P2}/y$	$y_{Ps}/y$	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{Ps}/y$ (%)	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{Ps}/y$ (%)
1.5	0.1	1.0043	0.9998	1.0000	0.16	0.03	0.00	0~1	0~0	0~0
	0.2	1.0168	0.9991	0.9996	0.64	0.22	0.05	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0381	0.9975	0.9988	1.54	0.76	0.25	0~6	-1~1	0~0
	0.4	1.0696	0.9949	0.9970	2.91	1.85	0.76	0~10	-4~2	-1~1*
	0.5	1.1136	0.9909	0.9940	4.83	3.81	1.88	0~18	-7~3	-3~3
	0.6	1.1738	0.9847	0.9892	7.42	7.13	4.07	0~29	-15~6	-7~8
	0.7	1.2569	0.9737	0.9826	10.95	12.76	8.25	0~43	-27~9	-14~17
	0.8	1.3759	0.9507	0.9753	15.87	23.06	16.48	0~67	-52~14	-26~40
1.6	0.1	1.0038	1.0000	1.0000	0.13	0.02	0.00	0~1	0~0	0~0
	0.2	1.0149	0.9994	0.9996	0.57	0.17	0.04	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0341	0.9985	0.9987	1.38	0.58	0.17	0~5	-1~1	0~0
	0.4	1.0629	0.9971	0.9968	2.63	1.43	0.52	0~9	-3~1	-1~1
	0.5	1.1085	0.9950	0.9936	4.41	2.96	1.29	0~16	-6~3	-3~2
	0.6	1.1597	0.9917	0.9883	6.85	5.56	2.80	0~25	-11~5	-5~4
	0.7	1.2377	0.9856	0.9802	10.18	9.94	5.67	0~40	-21~8	-11~10
	0.8	1.3498	0.9713	0.9689	14.86	17.84	11.22	0~61	-40~13	-20~13
	0.9	1.5266	0.9291	0.9572	22.12	35.29	23.90	0~102	-85~20	-38~59
1.7	0.1	1.0034	0.9999	1.0000	0.12	0.02	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	1.0136	1.0000	0.9996	0.52	0.13	0.03	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0313	0.9992	0.9987	1.27	0.47	0.14	0~5	-1~0	0~0
	0.4	1.0581	0.9986	0.9968	2.44	1.16	0.41	0~9	-2~1	-1~0
	0.5	1.0963	0.9978	0.9933	4.11	2.42	1.00	0~15	-5~2	-2~1
	0.6	1.1494	0.9966	0.9877	6.43	4.55	2.17	0~24	-9~4	-5~2
	0.7	1.2236	0.9939	0.9788	9.62	8.14	4.36	0~37	-16~7	-9~5
	0.8	1.3306	0.9858	0.9651	14.13	14.53	8.55	0~59	-32~12	-17~13
	0.9	1.4996	0.9567	0.9453	21.13	28.36	17.51	0~96	-68~18	-33~33

表四 S<sub>1</sub>型水面線(續)

$\alpha$	$-\epsilon$	m			$\sigma$			$\lambda$		
		$y_{P1}/y$	$y_{P2}/y$	$y_{Ps}/y$	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{Ps}/y$ (%)	$y_{P1}/y$ (%)	$y_{P2}/y$ (%)	$y_{Ps}/y$ (%)
1.8	0.1	1.0031	1.0000	0.9999	0.11	0.01	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	1.0126	0.9998	0.9996	0.48	0.11	0.26	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0292	0.9997	0.9987	1.19	0.39	0.12	0~4	-1~0	0~0
	0.4	1.0546	0.9996	0.9967	0.23	0.98	0.35	0~8	-2~1	-1~0
	0.5	1.0909	1.0000	0.9932	3.89	2.05	0.86	0~14	-3~2	-2~0
	0.6	1.1417	1.0002	0.9874	6.11	3.87	1.84	0~22	-7~4	-4~1
	0.7	1.2130	1.0000	0.9779	9.19	6.92	3.69	0~35	-13~7	-8~3
	0.8	1.3161	0.9964	0.9627	13.57	12.30	7.29	0~55	-26~11	-16~8
	0.9	1.4792	0.9767	0.9378	20.40	23.72	14.43	0~91	-57~17	-30~20
1.9	0.1	1.0029	1.0000	0.9999	0.11	0.01	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	1.0119	0.9999	0.9996	0.46	0.10	0.02	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0277	1.0000	0.9986	1.12	0.34	0.11	0~4	-1~0	0~0
	0.4	1.0519	1.0004	0.9967	2.18	0.86	0.32	0~8	-1~1	-1~0
	0.5	1.0867	1.0013	0.9931	3.72	1.79	0.78	0~13	-3~2	-2~0
	0.6	1.1357	1.0028	0.9871	5.87	3.39	1.67	0~21	-6~4	-4~1
	0.7	1.2048	1.0046	0.9774	8.87	6.06	3.35	0~34	-11~7	-8~1
	0.8	1.3049	1.0044	0.9612	13.14	10.74	6.51	0~53	-22~10	-15~4
	0.9	1.4634	0.9917	0.9390	19.83	29.50	16.94	0~88	-49~17	-29~12
2.0	0.1	1.0028	1.0000	0.9999	0.10	0.01	0.00	0~0	0~0	0~0
	0.2	1.0113	1.0000	0.9996	0.43	0.09	0.02	0~2	0~0	0~0
	0.3	1.0264	1.0003	0.9986	1.08	0.30	0.10	0~4	0~0	0~0
	0.4	1.0497	1.0010	0.9966	2.09	0.76	0.30	0~7	-1~1	-1~0
	0.5	1.0835	1.0024	0.9931	3.58	1.60	0.73	0~13	-2~2	-2~0
	0.6	1.1311	1.0049	0.9870	5.68	3.04	1.58	0~21	-5~4	-4~0
	0.7	1.1983	1.0081	0.9770	8.61	5.43	3.16	0~32	-10~6	-7~1
	0.8	1.2961	1.0105	0.9602	12.81	9.59	6.17	0~51	-19~10	-14~2
	0.9	1.4510	1.0032	0.9297	19.39	18.17	12.27	0~85	-42~16	-27~6

\* 參閱圖六