

谷類平衡含水率之研究

Studies on Grain Equilibrium Moisture Content

第一部分：數學模式之推演

Part I. Derivation of Mathematical Model

臺大農工系講師

張 森 富

CHANG, Sen-Fuh

ABSTRACT

The equilibrium moisture content (EMC) of a cereal grain is defined as the moisture content of the material after it has been exposed to a controlled condition (fixed temperature and relative humidity) for an infinite long period of time. Generally, the EMC falls on a certain interval. The highest value is obtained from a desorption process and the lowest one from an adsorption process. It is called a hysteresis effect.

A semi-empirical equation is developed by correcting and modifying Henderson equation for describing the relationship between the relative humidity and the EMC. The following is the equation.

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{aM^b}$$

rh: relative humidity, %

M: equilibrium moisture content, % dry basis

a, b: constants depending mostly on temperature and grain variety

According to Juliano's experimental data of Taichung No. 65 Paddy, 4 equations are obtained for predicting the EMC of the paddy, if the relative humidity is known. Its error is less than 0.5%. The equations for Taichung

No. 65 Paddy are:

1. $1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.0031385M^{2.1621})}$, for desorption process at 27.5°C

2. $1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.0095530M^{1.8239})}$, for adsorption process at 27.5°C

3. $1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.0046551M^{2.0414})}$, for desorption process at 32.5°C

4. $1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.013008M^{1.7239})}$, for adsorption process at 32.5°C

Further experiments will be conducted for establishing the EMC equation for Tainan No. 5 Paddy, the most popular rice variety in Taiwan.

一、引言

爲了減少谷類在田間之損失或達到最高收穫量，一般谷類在收穫時之含水率（水分含量），均不適合長期儲存，因此谷類收穫後必須依所需儲存期間之長短立即乾燥到適當之程度，以確保儲存時其質與量之損失降至最低。以稻谷爲例，如欲安全儲存一年以上，其含水率須在濕基（wet basis, wb) 13%以下，因此本省農會收購稻谷便以此爲基準。

谷類之含水率與外界之相對濕度、溫度等有密切之關係，在某一特定的狀況下，其值有一定的範圍，即各有一上限值及下限值，乃是由於谷類經去濕或回潮過程所形成的，後文將述及。所謂平衡含水率是指谷類暴露在特定之狀況下（例如溫度與相對濕度保持一定），經過無限長的時間之後所測得之含水率。此無限長之時間乃指理論上而言，事實上平衡含水率乃是指經某一段長時間之後，儀器亦無法測出前後含水率之差時之值，例如經過 30 天與 40 天後所測之值相同，此即爲平衡含水率。在這段不同期間之中，或許含水率仍有變化，但儀器受精密度之限，無法測得；或許水分進出之擴散情形仍在進行，只是其出入值約略相等而達到動平衡。不管如何，對我們所需用到的巨觀狀態而言，如此所得之平衡含水率已充分足夠應用了。

平衡含水率在谷類乾燥方面非常重要，因爲在特定狀況下，谷類經過乾燥後可能達到之最終含水率即可由之決定。同樣的，谷類儲存時，如因溫度上升需通風，也需考慮平衡含水率的問題，以免由於通風空氣相對濕度太高使得谷類之含水率上升，則不但未收到降低谷溫之效果，反而因含水率上升而加速谷類損壞便得不償失。

平衡含水率也會因谷類品種、成熟度等之差異而有不同之值，進步國家均已由研究人員建立其自有品種之基本資料，因此我們自己亦應建立有關此方面各種農作物之基本資料，以供應用。

二、研究目的

1. 找出谷類含水率與相對濕度、溫度之間平衡關係之半經驗公式，以供谷類儲藏、乾燥或其他研究或實際上之應用。所謂半經驗公式，是指數學模式之推演一方面根據理論分析，另一方面再配合

實驗資料求得有關之常數，而使公式完整可直接運用。

2. 將來逐步建立本省主要農作物之平衡含水率之基本資料，即求得各相關之常數，使得各種作物均有適當之半經驗公式可以應用。如此可節省重複做實驗之人力、財力與物力，而可向其他方面研究發展。

三、文獻探討

在 1952 年，Henderson 發表一篇「平衡含水率之基本概念」報告，其中詳述有關平衡含水率半經驗公式之推演過程及根據其他研究者測得之資料分析而得多種作物之常數，以之預測各種作物之平衡含水率，較以前許多學者所導之方程式均佳，且適應範圍亦廣，故被稱爲最著名之平衡含水率方程式 (5, 1)*。

$$\text{Henderson 方程式: } 1 - \frac{rh}{100} = e^{-kT M^n}$$

rh: 相對濕度, %

M: 平衡含水率, % db

T: 絕對溫度, R ;

k, n: 與作物有關之常數。

但該篇報告並未述及平衡含水率有關上、下限值之問題，且在方程式推演過程中，略有錯誤，雖影響不大，但終非正道，另外配合實驗資料分析時只是以圖解法說明，並未根據統計學之原理進行理論分析。本文即針對此三方面繼續分析，使該方程式更完美，將於後文敘述。

1952 年以後，仍有許多學者研究有關平衡含水率之數學模式問題，但仍是以 Henderson 方程式爲基礎，或另以其他之理論支持導出相當繁瑣之公式 (3, 4, 8)。反而不如 Henderson 方程式簡單明瞭，因此本文仍是以此爲基礎，期導出更簡單而不失其原有優點之公式。其中較佳者之方程式分述於後：

1) Chung & Pfof 方程式 (3):

$$\ln\left(\frac{rh}{100}\right) = -\frac{A}{RT} e^{-BM}$$

rh: 相對濕度, %;

R: 水蒸氣之氣體常數

T: 絕對溫度, R ;

M: 平衡含水率, % db

A, B: 與作物有關之常數

* 括弧內數字爲參考文獻之編號

2) Day & Nelson 方程式 (4):

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{-a \cdot M^b}$$

rh: 相對濕度, %;

M: 平衡含水率, % db

a, b: 與作物有關之常數

3) Young & Nelson 方程式 (8):

$$M_s = \frac{\rho v_m}{W}(\theta + \alpha) + \rho \frac{V}{W} \phi$$

$$M_d = \frac{\rho v_m}{W}(\theta + \alpha) + \rho \frac{V}{W} rh_{max}$$

M_s : 回潮過程之平衡含水率, % db.

M_d : 去濕過程之平衡含水率, % db.

W: 乾物重; ρ : 密度

v_m : 單層水分子之體積;

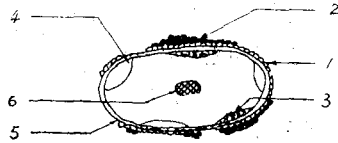
V: 飽和時吸附水分子之體積

rh_{max} : 谷物曾經歷過之最高相對濕度

θ : 單層附著水分子覆蓋表面之比例

α : 正常凝結水分之層數

ϕ : 兩層或兩層以上附著水分子覆蓋表面之比例



1. 粘附水分 (第一種)
2. 正常凝結水分 (第二種)
3. 吸收水分 (第三種)
4. 可容水分之氣室
5. 細胞壁
6. 細胞核

圖一 單細胞水分分布示意圖

Young 及 Nelson 將谷類所含之水分, 以單一生物細胞來考慮分成三種, 第一種為附於細胞壁外之單層水分稱為「黏附水分」, 第二種為第二層以上所附之「正常凝結水分」, 第三種為已進入細胞壁內之「吸收水分」。根據這種假設可以說明谷類平衡含水率在去濕與回潮過程有上限及下限值的原因, 這種現象稱為水分留滯現象, 完全是由第三種「吸收水分」造成的。

當谷類放於較濕的環境時, 便會由外界吸收水分, 此為回潮過程, 首先於表面吸附單層之水分, 然後在以上各層附著「正常凝結水分」愈聚愈多, 則擴散力大於水分子與細胞壁之結合力便滲透入細胞內成為第三種之「吸收水分」; 但將此谷類再放

於較乾之環境時, 水分會由谷類釋放出來, 這是去濕過程, 水分移出仍是由表面之單層及二層以上之水分先進行, 到最後才移出細胞內之水分, 此時作用力較小, 故造成水分留滯現象, 而較回潮時之水分含量較高。平衡含水率之上限值便是由去濕過程所形成, 下限值則由回潮過程時所造成。因此, Young & Nelson 二者將平衡含水率方程式以二種方式表示如第 3 式。

四、理論分析

Henderson 主要根據水分吸附時之熱力關係式①及滲透壓力公式②, 推演其著名之平衡含水率方程式, 其過程如下:

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = - \left(\frac{\partial P_o}{\partial s} \right)_T$$

α : 吸附水分之表面張力, lbf/ft 或 ft-lbf/ft²

V: 水分體積, ft³

S: 濕潤之表面積, ft²

P_o : 滲透壓, lbf/ft²

$$\textcircled{2} \quad P_o = \frac{RT}{V_p} \ln \frac{P_s}{P}$$

P_o : 滲透壓, lbf/ft²

R: 一般氣體常數, T: 1545.33 ft-lbf/(lbmole·R)

T: 絕對溫度, R

V_p : 水分之摩爾體積, ft³/(lbmole)

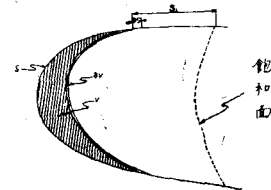
P_s : 溫度 T 時之飽和水蒸氣壓力, lbf/ft².

P: 吸附水分之蒸氣壓, lbf/ft²

由①②並取適當之偏微分可得:

$$\textcircled{3} \quad \partial \sigma = CRT \partial \ln P$$

C: 吸附水分之濃度, moles/ft³



圖二 微觀空間

上式直接積分所得之結果, 是指如圖二未濕潤 S₁ 部份, 本文所要的乃是含水率部分, 因此 Henderson 以 (P - P_s) 代入 P 而得以下各式:

$$\textcircled{4} \quad \partial \sigma = CRT \partial \ln(P - P_s), \text{ 積分得:}$$

⑤ $\sigma - \sigma_0 = CRT \ln \frac{P - P_s}{-P_s}$ ，再整理得：

$$\textcircled{6} \quad -\ln \frac{P_s - P}{P_s} = \frac{CRT}{\sigma - \sigma_0}$$

以上④、⑤、⑥式，由於第④式以 $(P - P_s)$ 代入 P ，有誤，以至接連有錯，應更正為以 $(P_s - P)$ 代入 P 才對。 $(P_s - P)$ 才是正數，方合乎對數 \ln 之運算，故以上各式應修正如下：

$$\textcircled{4}' \quad \partial \sigma = CRT \partial \ln(P_s - P)$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \partial \sigma = \int_0^P CRT \partial \ln(P_s - P)$$

$$\textcircled{5}' \quad \sigma - \sigma_0 = CRT \ln \frac{P_s - P}{P_s}$$

$$\textcircled{6}' \quad \ln \frac{P_s - P}{P_s} = -\frac{\sigma - \sigma_0}{CRT}$$

⑥'式與⑥式可明顯看出其不同之處，左項無負號，右項為其倒數，自此之後 Henderson 之假設均可接受，繼續推演如下：

$$\textcircled{7} \quad C = k_1 M^a$$

M ：含水率，% db； k_1, a ：常數

$$\textcircled{8} \quad \frac{1}{\sigma - \sigma_0} = f(\sigma) = k_2 M^b$$

M ：含水率，% db； k_2, b ：常數

將⑦、⑧二式代入⑥'式得：

$$\textcircled{9} \quad \ln \frac{P_s - P}{P_s} = \frac{1}{k_2 M^b \cdot k_1 M^a RT} \\ = \frac{1}{k_1 k_2 RT M^{(a+b)}}$$

$$\textcircled{9}' \quad \ln \frac{P_s - P}{P_s} = \frac{1}{k TM^n} = k^{-1} T^{-1} M^{-n} \\ = k' T^{-1} M^{n'}$$

$$k = k_1 k_2 R, \quad n = a + b, \quad k^{-1} = k', \quad n' = -n$$

⑨'式之最右邊項與 Hendersen 所得之結果為 $k TM^n$ 很類似只差 T 為倒數； k 與 n 或 k' 與 n' ，為由實驗資料求得之常數，在代入數據時，可自動修正。Hendersen 方程式一直為研究者樂予採用，便是因為類似⑨式，因此 20 多年來幾乎沒有人注意到其中有誤。Henderson 推演至類似⑨式（見文獻探討）之方程式用來預測平衡含水率，其結果令人滿意。但是還可以簡化，以下為根據筆者修正之⑨'式繼續分析。因為測定一組實驗資料， T 是一定的，不同之溫度 T ，應分開來討論，因此⑨'式可簡化為下式：

$$\textcircled{10} \quad \ln \frac{P_s - P}{P_s} = a M^b$$

$a = k' T^{-1}$ ， $b = n'$ ，均為常數。

再整理，又 $\frac{P}{P_s} = \frac{rh}{100}$ ， rh 為相對濕度，%。可得：

$$\ln \left(1 - \frac{P}{P_s} \right) = a M^b \rightarrow \ln \left(1 - \frac{rh}{100} \right) = a M^b$$

因此可得谷類平衡含水率與相對濕度之間關係之簡明公式如下：

$$\textcircled{11} \quad 1 - \frac{rh}{100} = e^{a M^b}$$

rh ：相對濕度，%

M ：平衡含水率，% db

a, b ：與作物有關之常數

對於上式仍可利用統計學上之線性迴歸分析理論，繼續推演如下，先將⑪式取對數二次得下列二式：

$$\text{第一次：} \left(\ln \left(1 - \frac{rh}{100} \right) \right) = a M^b,$$

再取對數時須變換符號使為正數。

$$-\ln \left(1 - \frac{rh}{100} \right) = -a M^b$$

$$\text{第二次：} \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{rh}{100} \right) \right) = \ln(-a M^b)$$

$$\ln \left(-\ln \left(1 - \frac{rh}{100} \right) \right) = \ln(-a) + b \ln M$$

$$\text{上式令 } Y = \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{rh}{100} \right) \right),$$

$$X = \ln M, \quad A = \ln(-a) \quad B = b$$

則可改寫如下：

$$Y = A + BX$$

上式為標準之線性方程式，因此可利用實驗資料及線性迴歸分析求 X, Y 即 $\ln M$ 與 $\ln(-\ln(1 - \frac{rh}{100}))$ 間之線性相關係數 R ，便可了解其相關之程度。

五、資料分析與討論

筆者曾利用 Karon & Adams 所測之水稻平衡含水率資料，應用前節之公式分析其 $\ln(-\ln(1 - \frac{rh}{100}))$ 與 $\ln M$ 之間之線性相關程度，所得之線性相關係數之平方值即 R^2 均大於 0.99，此即說明該二者之間，我們有 99% 以上之自信認為該二者是線性相關(2)。

Juliano 曾做有關臺中 65 號梗稻之去濕與回潮平衡含水率之實驗，其資料如表一(6)。根據其所得之資料，再應用線性迴歸分析，可得以下各式。一般工程上之應用，含水率計算均採乾基(dry basis, db)，而其資料為濕基(wet basis, wb)，故先變換後再分析，所得結果亦列於表一。

表一、臺中 65 號梗稻實驗資料與 $1 - \frac{rh}{100} = e^{aM^b}$ 計算結果之比較

1. 27.5°C 去濕過程						
rh, %	實驗資料 (G) %		a, b, R ²	計算結果 %		比較 %
	濕基	乾基		乾基	濕基	
44.5	10.2	11.36	a = -0.0031385 b = 2.1621 R ² = 0.9925	11.26	10.12	-0.08
64	12.2	13.90		14.52	12.68	0.48
75	14.1	16.41		16.73	14.33	0.23
84	15.8	18.76		19.03	15.99	0.19
96.5	20.4	25.63		25.16	20.11	-0.29
2. 27.5°C 回潮過程						
44.5	8.8	9.65	a = -0.0095530 b = 1.8239 R ² = 0.9965	9.58	8.74	-0.06
64	11.3	12.74		12.96	11.47	0.17
75	13.0	14.94		15.32	13.28	0.28
84	15.0	17.65		17.85	15.15	0.15
3. 32.5°C 去濕過程						
43.5	9.7	10.74	a = -0.0046551 b = 2.0414 R ² = 0.9943	10.55	9.54	-0.16
63	11.8	13.38		13.84	12.16	0.36
75	13.8	16.01		16.29	14.01	0.21
84	15.4	18.20		18.67	15.74	0.34
96.5	20.3	25.47		25.10	20.07	-0.23
4. 32.5°C 回潮過程						
43.5	8.3	9.05	a = -0.013008 b = 1.7239 R ² = 0.9977	8.97	8.23	-0.07
63	10.8	12.11		12.37	11.01	0.21
75	12.9	14.81		15.00	13.05	0.15
84	14.9	17.51		17.64	15.00	0.10

12-1 27.5°C 之平衡含水率去濕曲線方程式

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.0031385 M^{2.1621})}, R^2 = 0.9925$$

12-2 27.5°C 之平衡含水率回潮曲線方程式

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.0095530 M^{1.8239})}, R^2 = 0.9965$$

12-3 32.5°C 之平衡含水率去濕曲線方程式

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.0046551 M^{2.0414})}, R^2 = 0.9943$$

12-4 32.5°C 之平衡含水率回潮曲線方程式

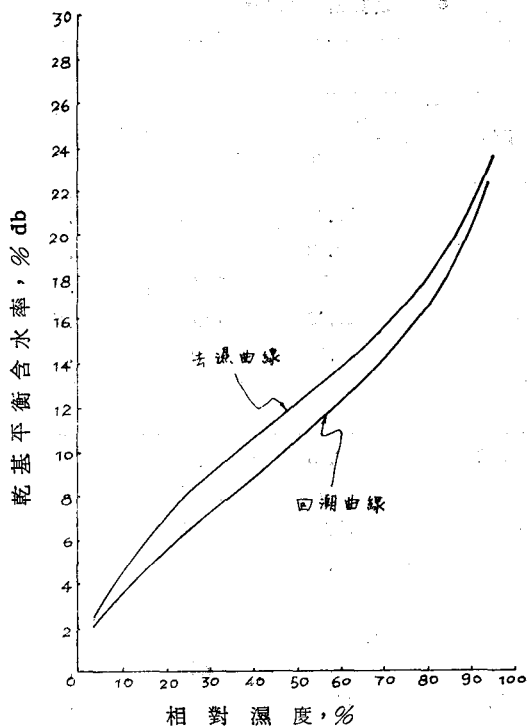
$$1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.013008 M^{1.7239})}, R^2 = 0.9977$$

以上四式所得之 R² 均大於 0.99，其相關性很高，可說明前節公式之實用性高。再根據以上四式，利用實驗時之相對濕度反過來求出含水率，並由乾基轉換為濕基，均列於表一。由表一中，可看

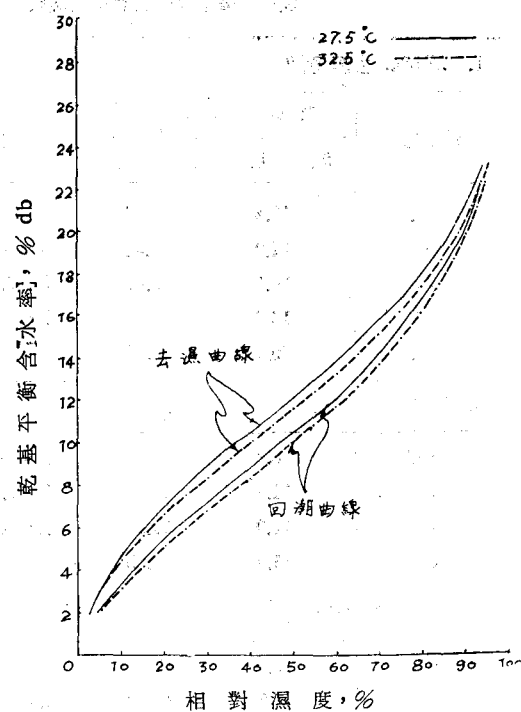
出計算值與實驗值相差最多者為 0.48 %。一般美國倉庫收存谷類，以每 0.5 % 跳一級計算補償或乾燥費用，而且實驗也往往產生誤差，一般允許者為 0.2 %，因此以上之公式在一般之應用乃足夠。

根據 12-1 至 4 等方程式可繪成平衡含水率曲線圖如圖三，四分別為 27.5°C 及 32.5°C 者，圖五則為不同溫度之比較，溫度較高者曲線向右向下移。如實驗之溫度增多，則可建立更完整之曲線圖，應用起來更方便，此為筆者未來之研究方向。很明顯的可看出 a, b 兩常數，除與作物有關外，限定作物時，則仍與溫度有關，也就是說，a 與 b 為 T 之函數。

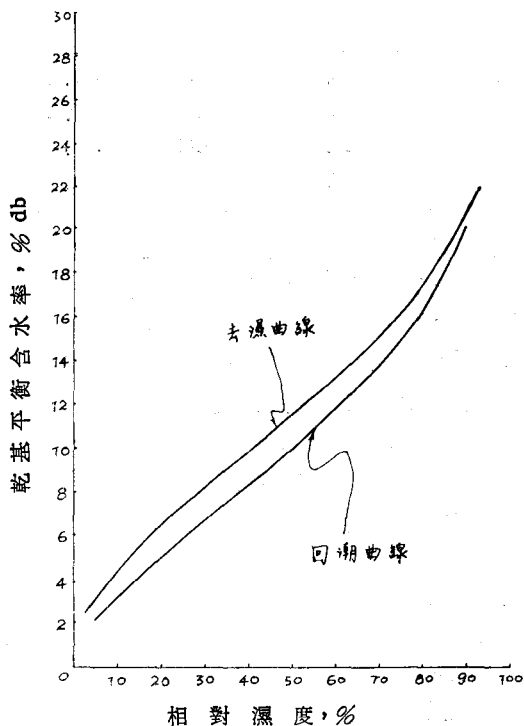
根據以上之分析，方程式①用來預測回潮與去濕之平衡含水率之結果，均可令人滿意，因此不必



圖三、臺中 65 號梗稻 27.5°C 平衡含水率曲線



圖五、不同溫度平衡含水率曲線之比較



圖四、臺中 65 號梗稻 32.5°C 平衡含水率曲線

分別列公式，只要將資料代入，求得常數即可。
 ⑩式為簡明之方程式，歸根結底，貢獻最大者為 Henderson 先生，他將許多理論綜合才有這一型式的公式出現。⑪式乃是對原 Henderson 公式做修正與補充工作使之更完美而已。

六、結 論

1. 谷類之平衡含水率，不管是去濕或回潮曲線，其與相對濕度之關係如下：

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{-aM^b}$$

rh：相對濕度，%

M：平衡含水率，% db

a、b：與作物及溫度有關之常數，須配合實驗資料求得之。

2. 常數 a、b 對於相同品種之作物為溫度 T 之函數，其間之關係如何，須更進一步之研究。

七、未來之工作方向

1. 本省最主要水稻品種臺南五號及六號梗稻之平衡含水率曲線方程式，應儘速進行實驗獲取資料，建立起來。主要之品種建立之後再及其他品種，水稻的公式建立之後再建立其他作物之公式，則可

使基本資料完整，後人研究時可省時省力。這類實驗須費時及耐心，並須研究經費支持，才能購置精密天平及恆溫器等進行較正確之實驗，導出之公式也就較佳。

2. 對於平衡含水率方程式之常數 a, b, 如能以下列之關係式表示：

$$a = C_1 TC_2, \quad b = C_3 TC_4$$

則可取對數而仍得線性方程式，再利用多組不同溫度之實驗資料，便可進行線性迴歸分析，而了解其線性有關之程度。

八、誌 謝

本文之撰寫乃受美國加州大學戴維斯校區 Henderson 教授在 1975 年初之鼓勵，一直到 5 年後的現在才算寫成初稿，仍在起步階段，尚須繼續進行實驗建立自己的資料。在這 5 年中，內心常存「吾愛吾師，吾更愛真理」之念頭，但却不易下筆，現在總算寫出來了，內心最感謝的是 Henderson 教授。

九、參考文獻

1. 馮丁樹譯 1978. 穀物乾燥，臺北市徐氏基金會。
2. 張森富 (Chang, Sen-Fuh), 1975. Equilibrium moisture content. Unpublished Term Report, University of California at Davis.
3. Chung, D. S., and H. B. Pfost. 1967. Adsorption of water vapor by cereal grains and their products. Transactions of the ASAE: 549-557.
4. Day, D. L., and G. L. Nelson. 1965. Desorption isotherms for wheat. Transactions of the ASAE: 293-297.
5. Henderson, S. M. 1952. A basic concept of equilibrium moisture. Agricultural Engineering Vol. 33 No. 1: 29-32.
6. Juliano, B. O. 1964. Hygroscopic equilibria of rough rice. Cereal Chem. 41: 191-197.
7. Karon, M. L., and M. E. Adams. 1949. Hygroscopic equilibrium of rice and rice fractions. Cereal Chem. 26: 1-12.
8. Young, J. H., and G. L. Nelson. 1967. Theory of hysteresis between sorption and desorption isotherms in biological materials. Transactions of the ASAE: 260-263.

十、中文摘要

谷類之平衡含水率是指谷類暴露在特定狀況下(溫度與相對溫度保持一定)，經過了很長時間後，所測得之含水率。一般谷類之平衡含水率，由於其所經過程之不同而有上下限值，去濕過程所得者為其上限，回潮過程者為其下限，此為水分留滯現象。

到目前為止用來預測谷類平衡含水率之許多方程式中，仍以 Henderson 方程式最著名。但他在推演過程中略有錯誤，且在驗證時只用到圖解法，未用線性迴歸分析，另外也沒有討論水分留滯現象有關去濕與回潮過程平衡含水率不同之問題。本文乃在此三方面深入研究導出平衡含水率與相對濕度之關係如下：

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{aM^b}$$

rh: 相對濕度, %

M: 平衡含水率, % db

a, b: 主要與溫度作物品種有關之常數

根據 Juliano 所得有關臺中 65 號硬稻之實驗資料，可求得常數 a, b 而得到相關之平衡含水率方程式。以之預測一定相對濕度之平衡含水率，其誤差小於 0.5%，其 R² 大於 0.99。R 為相關係數。下列為所得之方程式：

1. 臺中 65 號硬稻 27.5°C 去濕曲線方程式

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.0031385M^{2.1621})}$$

2. 臺中 65 號硬稻 27.5°C 回潮曲線方程式

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.0095530M^{1.8239})}$$

3. 臺中 65 號硬稻 32.5°C 去濕曲線方程式

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.0046551M^{2.0414})}$$

4. 臺中 65 號硬稻 32.5°C 回潮曲線方程式

$$1 - \frac{rh}{100} = e^{(-0.013008M^{1.7239})}$$

未來之工作將優先建立本省最主要稻作品種臺南 5 號之平衡含水率曲線方程式，此須經由實驗獲得各種資料後才能完成。