一般化水文系統模式之理論及其在曾文水庫集水區之應用

The Application of General Hydrologic System Model on Tsengwen Reservoir Watershed

臺灣大學農工研究所研究生
林 尉 濤
Wei-Taw Lin

臺灣大學農工研究所客座教授
美國加州州立大學洛杉機分校土木系教授
鄭 英 松
Raymond I. Jeng

ABSTRACT

A general mathematical model for the transfer function of a watershed system developed by Chow and Kulandaiswamy was slightly modified and the application of the proposed model to the Tsengwen reservoir watershed was illustrated.

The system storage is shown to be a linear combination of input and output and their derivatives with respect to time. The coefficients are considered to be constant for a given storm and assumed to be functions of certain characteristic values of input. The transfer function of a watershed system, derived from the system storage and the continuity equation, is solved linearly for a particular storm. The watershed system storage is then considered as nonlinear due to the characteristic values of input changing from storm to storm. Thus the model recommended in this study for practical application is quasi-linear.

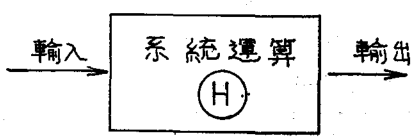
Hydrologic data from six storms on the Tsengwen reservoir vatershed were analyzed. The agreement between the observed runoff and the computed runoff from the modified model is shown to be very good.

一、諸 言

在一水文系統(Hydrologic System)中，如何由暴雨量推估流域洪水流量乃是水文學上重要課題之一;從1932年美國水文學家薛爾曼氏(L. K. Sherman)創議單位歷線(Unit Hydrograph)以來，此方法普遍受到重視與採用，迄今已歷半個世紀之久；近十餘年來學者專家又有線性水庫(Linear Reservoirs)、線性河道(Linear Channels)等數學模式之提出，這些模式皆是爲用來描述瞬時單位歷線(Instantaneous Unit Hydrograph)所編造的，且皆屬於線性非時變模式(Linear Time-invariant Model)，若以系統處理方式(System approach)來分析集水區之水文現象，則以上所述之數學模式僅爲本文所述之一般化水文系統模式(General Hydrologic System Model)中之特例。

通常系統可被定義爲各變異部(Various Parts)交互作用之集合體，水文循環之現象即可

視爲一動態水文系統 (Dynamic Hydrologic System)。在此系統中之變異部有：降雨、截留、蒸發、蒸散、入滲、窪蓄、地表逕流、地下逕流 (Subsurface Runoff)、地下水逕流等，經由水流分佈和連續的現象，這些變異部構成了水文之循環現象。一系統通常由輸入 (Input)、輸出 (Output) 和通過此系統之過算素 (Throughput) 所組成。在一動態水文系統中，系統必可接受確定量之輸入，而在系統中受水文氣象學 (Hydrometerology) 上及地文學 (Physiography) 上物理現象因子之約制 (Constraints)，而後有確定量之輸出，此系統運算概念如圖(一)所示。



圖(一) 系統運算示意圖

在集水區或其他水文系統中，輸入和輸出間之關係可用數學式表示如：

$$Q=\phi I \cdots\cdots\cdots (1)$$

上式中，Q爲輸出，I爲輸入，ϕ爲傳遞函數 (Trpnsfer function)，此函數表示系統由輸入量至輸出量間之運轉形式；如所熟知的單位歷線，即爲集水區系統傳遞函數之一。

本文之目的在推導集水區系統中傳遞函數之一般化數學模式，並以實測水文資料的分析系說明此數學模式之運用。爲了推導模式此系統可視爲一集結參數系統 (Lumped Parameter Systems) 或黑箱 (Black Box)；文中推出一具有非線性 (Nonlinear) 性質之準線性 (Quasi-linear) 之物理概念；並以曾文水庫集水區自民國 63 年以來六個颱風或暴雨之水文資料，運用電子計算機處理，求得此集水區之傳遞函數模式，再以由模式所得之計算逕流值與實測逕流值作一比較，其結果甚爲脗合。

二、一般化系統模式之理論

由系統連續之基本概念，吾人可將系統之連續方程式以下式表示之：

$$I-Q=\dot{S} \cdots\cdots\cdots (2)$$

式中 I 爲集水區系統之輸入量，在此可考慮爲有效雨量 (Rainfall Excess)；Q 爲集水區系統之輸出量，在此可考慮爲直接逕流量 (Direct Runoff)；S 爲集水區系統之豬蓄量，$\dot{S}$ 表豬蓄量對時間的一次微分，寫成 $\dot{S}=ds/dt$；且 I、Q、S 三者均爲時間的函數。因系統豬蓄量乃受水文和地文因子之影響，故系統豬蓄量爲輸入量與輸出量及其對時間變率的函數，其數學式可寫爲：

$$S=f(I,\dot{I},\ddot{I},\cdots,\overset{m}{I},Q,\dot{Q},\ddot{Q},\cdots,\overset{n}{Q})=f \cdots (3)$$

式中 $\dot{I},\ddot{I},\cdots,\overset{m}{I}$ 是爲I 對時間之一階、二階至m階之微分

$\dot{Q},\ddot{Q},\cdots,\overset{n}{Q}$ 是爲Q 對時間之一階、二階至n階之微分

倘若輸入量 I 保持連續和穩定 (Steady)，則輸出量亦必然漸漸趨於穩定，吾人寫爲：若 $I=I_*$，則 $Q\rightarrow Q_*$，故在穩定狀況下 I 與 Q 對時間之微分爲零。前述之註標 * 表穩定狀況。

在穩定狀況下，系統豬蓄量可簡單地與 I、Q 呈下列之關係：

$$S_*=f(I_*,\ Q_*)=aI_*+bQ_* \cdots\cdots\cdots (4)$$

式中 a、b 爲常數

將方程式(3)利用泰勒級數 (Taylor's Series) 對 I_* 和 Q_* 展開可得：

$$S=f(I_*,\ Q_*)+[\,]f+\frac{1}{2!}[\,]^2f+\cdots\cdots\cdots (5)$$

式中

$$[\,]=[(I-I_*)\frac{\partial}{\partial I}+(\dot{I}-\dot{I}_*)\frac{\partial}{\partial \dot{I}} +\cdots\cdots+(\overset{m}{I}-\overset{m}{I}_*)\frac{\partial}{\partial \overset{m}{I}} +(Q-Q_*)\frac{\partial}{\partial Q}+(\dot{Q}-\dot{Q}_*)\frac{\partial}{\partial \dot{Q}} +\cdots\cdots+(\overset{n}{Q}-\overset{n}{Q}_*)\frac{\partial}{\partial \overset{n}{Q}}]$$

爲了使f的微分式簡化起見，吾人以 $a_0=\partial f/\partial I$，$a_1=\partial f/\partial \dot{I}$，直到 $a_m=\partial f/\partial \overset{m}{I}$，$b_0=\partial f/\partial Q$，$b_1=\partial f/\partial \dot{Q}$，直到 $b_n=\partial f/\partial \overset{n}{Q}$，以上之微分式必須以 I_* 和 Q_* 代入。又 $\dot{I}_*$，$\ddot{I}_*$，……$\overset{m}{I}_*$，$\dot{Q}_*$，$\ddot{Q}_*$，……$\overset{n}{Q}_*$ 均爲零，同時 $I-I_*$, $\dot{I}-\dot{I}_*$,…, $Q-Q_*$, $\dot{Q}-\dot{Q}_*$,… 皆很小，所以它們的高次項可以省略，故(5)式可寫爲

$$S=f(I_*,\ Q_*)-(a_0I_*+b_0\ Q_*)+a_0I$$

$$+a_1\dot{I}+\cdots\cdots+a_m\overset{m}{I}+b_oQ+b_1\dot{Q}+\cdots\cdots$$

$$+b_n\overset{n}{Q}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (6)$$

再進一步簡化上式得：

$$S=S_o+\sum_{m=0}^{m}a_m\overset{m}{I}+\sum_{n=0}^{n}b_n\overset{n}{Q}\ \cdots\cdots\cdots\ (7)$$

式中 $S_o=f(I_*,Q_*)-(a_oI_*+b_oI_*)$

$$=(a-a_o)I_*+(b-b_o)Q_*$$

$$=AI_*+BQ_*$$

其中 $A=a-a_o$, $B=b-b_o$, 兩者皆爲常數。S_o所表示之物理意義爲初始潴蓄量 (Initial Storage),即在降雨開始前集水區中所蓄存之水量，此數值乃隨臨前水文狀況而變。

當其中係數 a_n，b_n 爲輸入量 (I) 和輸出量 (Q) 的函數，則(7)式可再表示爲：

$$S=S_o+\sum_{m=0}^{m}a_m(I,Q)\overset{m}{I}+\sum_{n=0}^{n}b_n(I,Q)\overset{n}{Q}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (8)$$

上式中因係數 a_m、b_n 是 I、Q 的函數，故爲非線性之微分方程式，若將 a_m、b_n 視爲常數或對 I、Q 爲具獨立之性質，則爲線性微分方程式，其解將至爲簡易。

由於線性模式過於簡化，無法充分表現集水區之各種水文特性，而非線性模式却又過於繁雜，今吾人乃推出一種具有非線性模式性質之準線性 (Quasi-linear) 之數學模式，此模式乃將 a_m、b_n 視爲輸入量和輸出量二者中確定特徵值之函數，如平均輸入量 $\bar{I}$、總輸入量 I_v、尖峰輸入量 I_p、尖峰輸入量對輸入總量比值 I_r，或平均輸出量 Q、總輸出量 Q_v、尖峰輸出量 Q_p、尖峰輸出量對總輸出量之比值，以上諸量皆爲 I、Q、之確定特徵值，此特徵值隨暴雨雨型、強度、延時之不同而改變，係數 a_m、b_n、亦隨之改變，故具有動態水文系統之特性。

將方程式(8)或方程式(7)代入方程式(2)，則可整理得：

$$Q=\left(-\frac{a_mD^{m+1}+a_{m-1}D^{m}+\cdots\cdots+a_0D-1}{b_nD^{n+1}+b_{n-1}D^{n}+\cdots\cdots+b_0D+1}\right)I$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (9)$$

式中 $D^m=d^m/dt^m$，$D^n=d^n/dt^n$ 等

方程式(9)之括弧中所示者即爲傳遞函數，若將傳遞函數中之分子與分母之多項數式以 M(D) 及 N(D) 表示，則(9)式可簡寫爲：

$$Q=\frac{M(D)}{N(D)}I\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (10)$$

$$或\ \phi=\frac{M(D)}{N(D)}$$

方程式(9)或方程式(10)即爲一般化水文系統模式之形式，一些水文數學模式皆可由一般化水文系統模式中導演得之，茲列舉如下：

(1) $m=0$，$n=0$

即 $M(D)=-a_0D+1$，$N(D)=b_0D+1$，則方程式(9)可寫成：

$$Q=\left(\frac{-a_0D+1}{b_0D+1}\right)I\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (11)$$

簡化上式，並代入方程式(2)中可得：

$$S=a_0I+b_0Q\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (12)$$

上式爲所熟知的馬斯金更方程式 (Muskingum Equation)，或謂馬斯金更洪流演算法之線性模式。

(2)使 N(D)=1

令 $a_{j-1}=(-1)^{j-1}c_j/j!$，$j=1,2,\cdots\cdots,m+1$

故 M(D) 可表示爲

$$M(D)=1-CD+\frac{C^2D^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^m\frac{C^{m+1}D^{m+1}}{(m+1)!}\cdots\cdots\cdots\cdots\ (13)$$

將上式兩邊乘以 I (t) 得：

$$M(D)\cdot I(t)=\Big[1-CD+\frac{C^2D^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^m\frac{C^{m+1}D^{m+1}}{(m+1)!}\Big]I(t)\cdots\cdots\cdots\ (14)$$

上式右邊爲 I(t－c) 對 t 的泰勒展開式，故可寫成

$$M(D)I(t)=(t-c)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (15)$$

將(15)式代入方程式(10)，可得：

$$Q(t)=I(t-c)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (16)$$

(16) 式即爲所謂線性河道模式 (Linear Channel Model) 之數學方程式。

(3)使 $a_i=0$，$i=0,1,2,\cdots\cdots m$

$b_0=K$；$b_j=0$，$j=1,2,\cdots\cdots n$

則方程式(10)可寫成

$$Q=\left(\frac{1}{1+KD}\right)I\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (17)$$

將(17)式代入方程式(2)中可得：

$$S=KQ\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (18)$$

上式即為線性水庫模式(Linear Reservoir Model)之數學表示式。

在方程式(8)及方程式(9)中之 m、n 值之決定，須以集水區之實測水文資料代入模式試算，由 $m=0$，$n=0$ 始，逐步增加 m，n 之值，直到得一滿意之結果為止，此時 m，n 之值即為本集水區之最適值。

今吾人取 m、n 分別為 1、2，並以曾文水庫自民國六十三年來之六個水文事件做為輸入資料，做為模式演算之說明；由以上之設定，方程式(8)與方程式(9)可寫成：

$$S=S_0+a_0I+a_1\dot{I}+b_0Q+b_1\dot{Q}+b_2\ddot{Q} \quad (19)$$

$$Q=\left(\frac{1-a_0D-a_1D}{1+b_0D+b_1D^2+b_2D^3}\right)I \cdots\cdots (20)$$

在方程式(20)中分母部分之多項數式可解得三個根，設此三根為 p、q、r，其可能組合計有四種，從方程式(20)可得這四種的瞬時單位歷線(Instantaneous Unit Hydrograph)之數式表示，茲分述如下：

(1)互為不等之實根，即 $p\neq q\neq r$；得瞬時單位歷線數式如下：

$$U(t)=-pqr(Ae^{pt}+Be^{qt}+Ce^{rt})\cdots\cdots (21)$$

式中 $A=\dfrac{1-a_0p-a_1p^2}{p^2-p(q+r)+qr}$

$B=\dfrac{1-a_0q-a^1q^2}{q^2-q(p+r)+pr}$

$C=\dfrac{1-a_0r-a_1r^2}{r^2-r(p+q)+pq}$

(2)有兩相等之實根，即 $p\neq q=r$；得瞬時單位歷線數式如下：

$$U(t)=-pq^2(Ae^{pt}+Be^{qt}+Cte^{qt})\cdots\cdots (22)$$

式中 $A=-a_1-B$

$B=\dfrac{a_0q+c(q-2p)-2}{q^2-pq}$

$C=\dfrac{1-a_0q-a_1q^2}{q-p.}$

(3)為三相等之實根，即 $p=q=r$；得瞬時單位歷線數式如下：

$$U(t)=(A+Bt+Ct^2)e^{pt}\cdots\cdots (23)$$

式中 $A=-a_1p^3$

$B=-a_0p^3-2a_1p^4$

$C=\frac{1}{2}(p^3-a_0p^4-a_1p^5)$

(4) p 為實根，q，r 為共軛虛根(Complex Conjugates)，即 $q=\alpha+\beta i$，$r=\alpha-\beta i$；得瞬時單位歷線數式如下：

$$U(t)=-p(\alpha^2+\beta^2)\left[Ae^{pt}+(B\cos\beta t+\frac{C+B\alpha}{\beta}\sin\beta t)e^{\alpha t}\right]\cdots\cdots (24)$$

式中 $A=\dfrac{1-a_0p-a_1p^2}{p^2-2\alpha p+\alpha^2+\beta^2}$

$B=-a_1-A$

$C=-a_0-a_1p+A(2\alpha-p)$

三、系統模式之建立

(一)集水區和水文資料選用之要件

當吾人從事模式製作時，首先必須對已選定之集水區從事水文資料之蒐集；由理論及經驗得知，欲滿足本模式之製作，集水區和水文資料之性質必須滿足下列五項要件：

(1)集水區面積在250至25000平方公里之範圍。

(2)收集各種不同雨型、降雨強度和延時之可適用的連續降雨及逕流記錄。

(3)降雨和逕流記錄必須具有單峰歷線之性質。

(4)有效降雨和直接逕流若非同時間開始，則須平移有效雨量或直接逕流使同時間開始。

(5)入滲量和基流量之計算有可靠之依據。

(二)模式製作步驟

(1)假定該集水區所適用之 m、n 值，則可得如方程式(19)及方程式(20)之形式。通常可由 $m=0$，$n=0$ 開始試之。

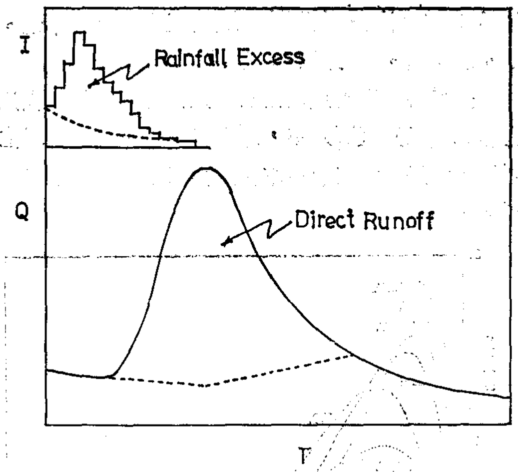
(2)求算各種降雨損失量和基流量值，由雨量圖及流量圖中扣除，得有效雨量和直接逕流量；如圖(二)所示。所得有效降雨開始時間如果與直接逕流開始時間不致，則須平移有效降雨或直接逕流，使開始時間一致。

(3)決定時間間距 Δt 之大小，於有效降雨組體圖及直接逕流歷線圖上取該時間間距位置上之量。

(4)以數字微分方法求算 $\dot{I}$、$\dot{Q}$及$\ddot{Q}$ 在時間間距 Δt 上之數值。

(5)利用方程式(2)計算豬蓄量 S 在時間間距 Δt 上之實際值。

(6)於方程式(19)中，以複迴歸分析法(Multiple Regression)求出初始豬蓄量 S_0 及傳遞函數 a_i b_i 係數值。



圖(二)　有效雨量及直接逕流量求算示意圖

(7)尋求傳遞函數係數a_i b_i與平均有效降雨量$\bar{I}$、有效降雨峰值 I_p、有效降雨體積 I_v、有效降雨值峰對體積比值I_r，及平均直接逕流量$\bar{Q}$、直接逕流峰值Q_p、直接逕流總量Q_v、直接逕流峰值對體積比值 Q_r 等諸特徵值間之適當函數關係。

(8)在步驟(7)中求得之a_i b_i 值與特徵值之關係可得各場暴雨之瞬時單位歷線。再利用褶合積分式(Convolution Integral) 可得其計算逕流值，其結果如與觀測逕流值相差很大，則所假設之m.n值不適用，必須返回步驟(1)，重新假設m.n值，直至得一滿意之結果為止。

四、曾文水庫集水區實際水文資料之演算說明

曾文水庫位於曾文溪中游之柳藤潭狹谷，壩址以上集水面積為 481.1 平方公里；曾文水庫之水文記錄自民國六十三年以來至民國六十六年止，經吾人收集完整可用之資料計有五次颱風及一次熱帶性低氣壓，茲以做為模式分析之用；如表(一)所示。

表(一)　使用資料名稱與日期表

編　號	颱　風　名　稱	日期(年、月、日)
1	妮　娜 (NINA)	64. 8. 3
2	熱帶性低氣壓 (T. D.)	64. 8. 16
3	畢　莉 (BILLIE)	65. 8. 9
4	賽洛瑪 (THELMA)	66. 7. 25
5	薇　拉 (VERA)	66. 7. 31
6	愛　美 (AMY)	66. 8. 21

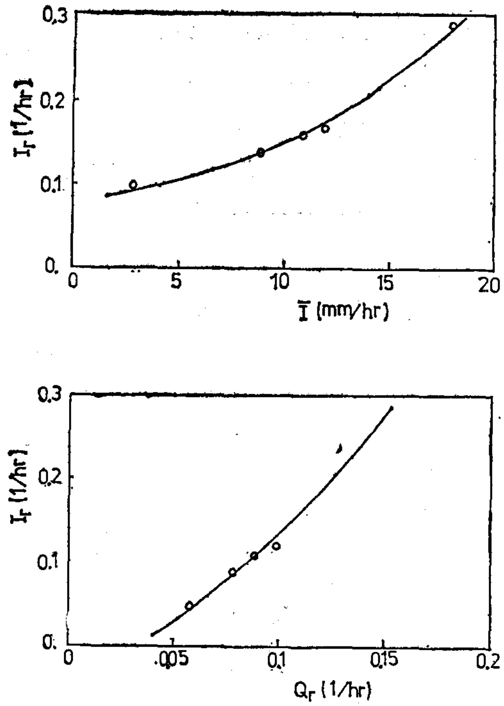
將以上六組水文資料經上節所述之先後步驟處理，並設定 m、n 分別為1、2，吾人求得各有效降雨與直接逕流之特徵值及傳遞函數係數 a_0、a_1、b_0、b_1、b_2 之數值，茲列出於表(二)。

表(二)　各組記錄求得之特徵值與其傳遞函數係數表

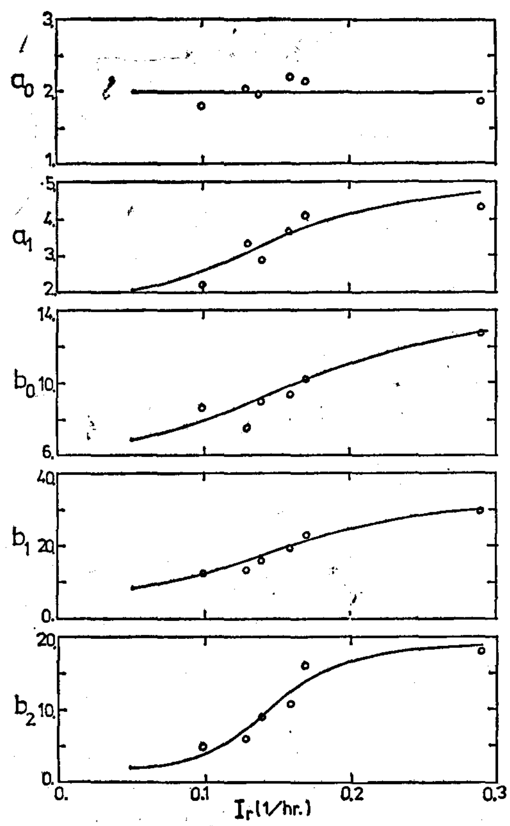
特徵值與係數 / 颱風名稱	I_v (mm)	I_p (mm/hr)	$\bar{I}$ (mm/hr)	I_r (1/hr)	Q_v (cms. hr)	Q_p (cms)	$\bar{Q}$ (cms)	Q_r (1/hr)	s_o	a_0	a_1	b_0	b_1	b_2
NINA	365	48	19	0.13	48752	5230	1016	0.11	4.05	2.06	3.31	7.48	13.64	6.06
T. D.	348	60	12	0.17	46521	4616	1257	0.10	10.05	2.13	4.20	10.17	25.83	16.67
BILLIE	226	35	11	0.16	30193	2796	570	0.09	12.21	2.20	3.83	9.33	19.44	11.11
THELMA	109	32	18	0.29	14625	1963	457	0.13	2.03	1.81	4.32	12.82	30.00	18.18
VERA	216	20	4	0.10	28881	1782	525	0.06	2.12	1.83	2.03	8.58	13.61	5.56
AMY	253	36	9	0.14	33802	2635	719	0.08	1.03	1.97	2.86	8.92	16.25	8.33

因傳遞函數係數不為常數，且隨著暴雨形態之不同而改變，又有效雨量和直接逕流量特徵值具有暴雨形態之因子，故吾人假定傳遞函數係數為諸特徵值的函數。

今由表(二)中可察知各傳遞函數係數與 $\bar{I}$、I_r、Q_r 具有良好之相關，又 $\bar{I}$、I_r、Q_r 間亦具有相關性，茲將 I_r 對 $\bar{I}$ 及 I_r 對 Q_r 作圖如圖(三)所示。



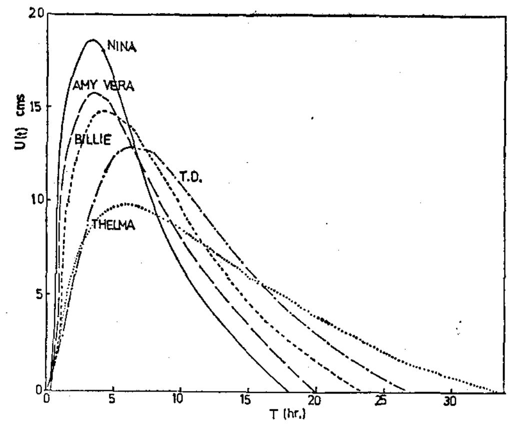
圖㈢ I_r 對 I、Q_r之相關圖



圖㈣ 傳遞函數各係數對 I_r 之關係圖($S_0 \neq 0$)

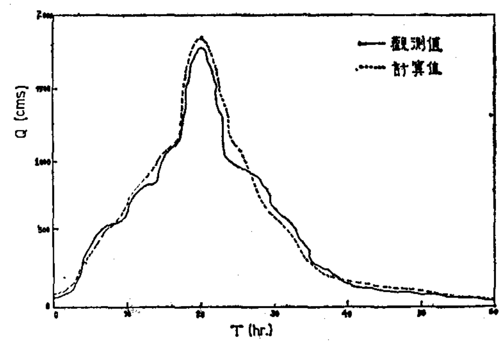
今吾人爲簡化問題起見，可假定傳遞函數係數僅爲 I_r 之函數，若此則將各傳遞函數之係數 a_0、a_1、b_0、b_1、b_2 分別對 I_r 做圖，如圖㈣。

茲以各組颱風或暴雨所得之傳遞函數係數代入方程式 (21)～(24) 中，則可得其各別之瞬時單位歷線，由以上六組水文事件所得者以圖表表示如圖㈤。



圖㈤ 曾文水庫集水區瞬時單位歷線圖

將各組記錄之有效雨量及所求得之瞬時單位歷線利用褶合積分式，以數字積分方法處理，則可得計算直接逕流量、並以此和觀測值做一校驗；玆以民國六十六年之微拉颱風爲例，將其直接逕流之計算值與觀測值表示於圖㈥，由圖中可見結果甚爲脗合。



圖㈥ 微拉颱風直接逕流計算值與觀測值之校驗

五、初始瀦蓄量之探討

在任一水文模式中，臨前水文狀況估計之精確與否往往對於模式的可靠性具有擧足輕重的影響，因此在本文所述之模式中，吾人導入了初始瀦蓄量之觀念，其優點可由本節之實例演算結果窺其一斑。

當吾人不考慮臨前水文條件時，初始瀦蓄量可設爲即 $S_o=O$，故方程式(8)可表示爲：

$$S=\sum_{m=o}^{m} a_m (I,Q)\overset{m}{I}+\sum_{n=o}^{h} b_n (I,Q)\overset{h}{Q}\cdots(25)$$

方程式 (25) 即爲周氏與柯氏 (Chow and Kulandaiswamy) 所導出之一般化水文系統模式之數學方程式。當 m=1, n=2 時可寫成：

$$S=a_0I+a_1\dot{I}+b_0Q+b_1\dot{Q}+b_2\ddot{Q}\cdots\cdots(26)$$

於方程式 (26) 中，傳遞函數係數之計算，可由最小二乘法 (Least Square Method) 之原理推演得一矩陣 (Matrix) 之表示式如下：

$$\begin{pmatrix}\Sigma SI\\ \Sigma S\dot{I}\\ \Sigma SQ\\ \Sigma S\dot{Q}\\ \Sigma S\ddot{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma I^2 & M\dot{I}I & \Sigma IQ & \Sigma\dot{Q}I & \Sigma\ddot{Q}I\\ \Sigma\dot{I}I & \Sigma\dot{I}^2 & \Sigma\dot{I}Q & \Sigma\dot{I}\dot{Q} & \Sigma\dot{I}\ddot{Q}\\ \Sigma QI & \Sigma Q\dot{I} & \Sigma Q^2 & MQ\dot{Q} & \Sigma Q\ddot{Q}\\ \Sigma\dot{Q}I & \Sigma\dot{Q}\dot{I} & \Sigma\dot{Q}Q & \Sigma\dot{Q}^2 & \Sigma\dot{Q}\ddot{Q}\\ \Sigma\ddot{Q}I & \Sigma\ddot{Q}\dot{I} & \Sigma\ddot{Q}Q & \Sigma\ddot{Q}\dot{Q} & \Sigma\ddot{Q}^2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ b_0\\ b_1\\ b_2\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(27)$$

上式中，符號Σ所表示之意義爲所有資料數之累加和；又方程式(27)可簡寫爲：

$$Y=C*X\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

上式中，Y表(27)式左端之行矩陣；C表(27)式右端之方矩陣；X則表(27)式右端之行矩陣，即傳遞函數係數矩陣；再將方程式(28)轉換可得：

$$X=C^{-1}*Y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

今以曾文水庫集水區之六組水文資料，依第三節所述之步驟及方程式(29)，可得一組當初始瀦蓄量爲零的條件下，傳遞函數與特徵值 I_r 之關係曲線，玆將其作圖表示於圖(七)。

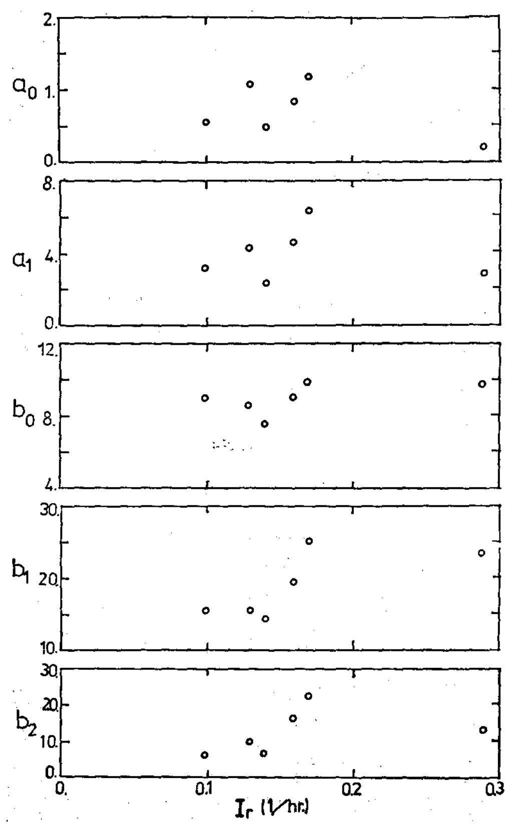
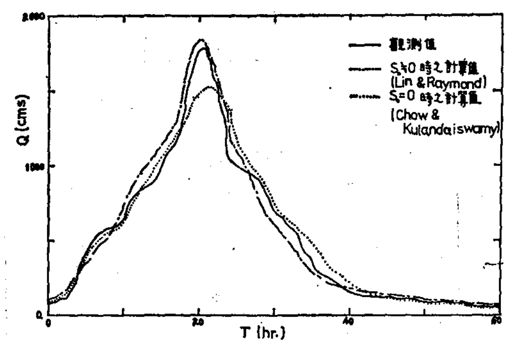


圖 (七)當 $S_o=O$ 時傳遞函數係數對 I_r 之關係圖

在圖(七)中，吾人可發現各數據點之分佈較圖(四)不爲規則，此現象吾人認爲是因爲初始瀦蓄量爲零之不合理假設所致。且再以薇拉颱風爲例，分別求算 $S_o\neq O$ 和 $S_o=O$ 情況下之計算逕流量來和觀測逕流量做一比較，如圖(八)所示，由圖中可發現在考慮初始瀦蓄量時所得之結果與觀測值較爲接近。



圖(八) $S_o\neq O$與$S_o=O$時之計算逕流量和觀測逕流量之比較圖

六、模式之應用

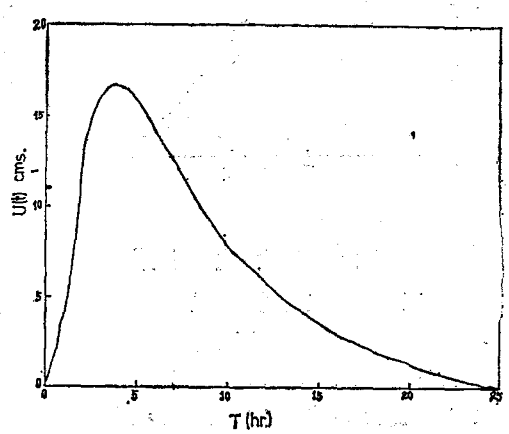
在水工設計如溢洪道、堤防、橋樑、排水渠道等，及水資源系統規畫之工作中，往往須要由已知之設計暴雨量來計算設計逕流量；如已知設計暴雨量之有效雨量，則依據前述之步驟，即可求得設計逕流量。

在此吾人以曾文水庫集水區已知之最大可能降雨 (Probable Maximum Pricipitation) 如表㈢所示，代入模式中求算其最大可能洪水量 (Probable Maximum Flood)。

表㈢ 曾文水庫設計最大暴雨期序表

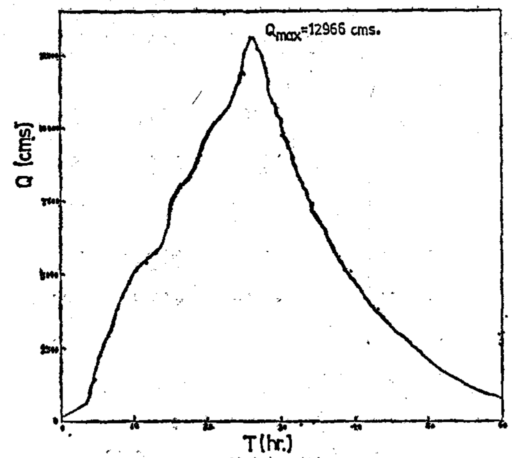
時 間 (小時)	時間雨量 (公釐)	時 間 (小時)	時間雨量 (公釐)	時 間 (小時)	時間雨量 (公釐)
1	42	21	87	41	14
2	44	22	90	42	13
3	46	23	153	43	12
4	48	24	95	44	11
5	50	25	40	45	10
6	52	26	38	46	9
7	54	27	36	47	8
8	57	28	34	48	7
9	59	29	32	49	7
10	61	30	30	50	6
11	64	31	28	51	6
12	66	32	27	52	5
18	68	33	25	53	4
14	70	34	23	54	4
15	73	35	22	55	4
16	75	36	20	56	4
17	78	37	19	57	4
18	80	38	17	58	4
19	83	39	16	59	4
20	85	40	15	60	4

由表㈢中可求算得特徵值 $I_v=2242mm$，$I_p=153\ mm/hr$，得 $I_r=0.068\ 1/hr$ 再以此特徵值於圖㈣中可求得 $a_0=2.0$，$a_1=2.8$，$b_0=8.0$，$b_1=16.5$，$b_2=10.0$，代入方程式(21)～(24)中則得設計瞬時單位歷線如圖㈨所示。



圖㈨ 曾文水庫集水區最大可能降雨之瞬時單位歷線圖

由設計之瞬時單位歷線與最大可能降雨經褶合積分後得最大可能洪水量如圖㈩所示，其峰值爲 12966 CMS，與原最大設計洪水量 12760 CMS 甚爲相近。



圖㈩ 由系統模式求得曾文水庫集水區最大可能逕流歷線圖

七、結 論

(1)通常，在傳統上認爲一特定之集水區中僅有一瞬時單位歷線，然在本系統模式中，在同一集水區可容許不同的瞬時單位歷線之存在。

(2)在模式中傳遞函數之係數可視爲特徵值 I_r 之函數，此模式可稱爲準線性 (Quasi-linear) 模式，其性能則優於傳統之線性模式。

(3)本模式在曾文水庫集水區之試算中發現特徵值 I_r 對傳遞函數係數有密切之相關；而 I_r 爲有效降雨峰值與有效降雨總量之比值，其單位爲時間的倒數，此數值與降雨形態有密切關係；又傳遞函數係數決定系統之輸出量；故吾人可得一結論：在曾文水庫集水區中降雨形態對流量歷線有重大之決定性。

(4)初始瀦蓄量可做爲顯示臨前水文狀況之因子。在模式建立過程中，傳遞函數係數與特徵值 I_r 之函數關係中若能導入初始瀦蓄量之因子，吾人認爲當可得一更爲適當合理之關係曲線。

(5)本文所設計之系統模式，在水資源規畫或水工設計計畫中，爲很有用的分析工具。

(6)若能以本系統模式配合氣象上降雨預報模式，則可建立一有效之洪水預報系統。

(7)建議以更多的雨量和逕流資料，找出更好的傳遞函數係數與特徵值間之關係。並以更多不同面

積大小集水區的雨量和逕流資料，求出 m.n 值和雨量特徵值之關係，以便於各個集水區之應用。

八、誌　　謝

本文承蒙臺大農工系易任教授（美國密西西比州立大學土木系客座教授）詳加校閱，又承臺大水工試驗室主任王如意教授以及劉佳明教授時予指導鼓勵，使本文得以順利完成，至爲銘感，特此致敬謝忱。

九、參　考　文　獻

(1) Chow, V. T. and Kulandaiswamy, V. C. :" General Hydrologic System Model," Hydraulics Div., Proc. ASCE, Vol. 97, pp. 791-804, June, 1971.

(2) Nash, J. E.: "The Form of the Instantaneous Units Hydrograph," Publication No. 45, International Association for Scientific Hydrology, Vol. 3, pp. 114-121, 1957.

(3) Brown, M. M.: The Mathematical Theory of Linear System, Chapman & Hall, Ltd., London, 1961.

(4) Chow, V. T. : Handbook of Applied Hydrology, Section 14, New York, 1964.

(5) O'Donnell, T. : "Methods of Computation in Hydrograph Analysis and Synthesis," Imperial Collage, Univ. of London. Recent Trends in Hydrograph Synthesis, Proc. Tech. Meeting 21, T. N. O., The Hague, 1966.

(6) Amorocho, J.: "Nonlinear Hydrologic Analysis" Department of Water Science and Engineering, Univ. nf California, Davis, California.

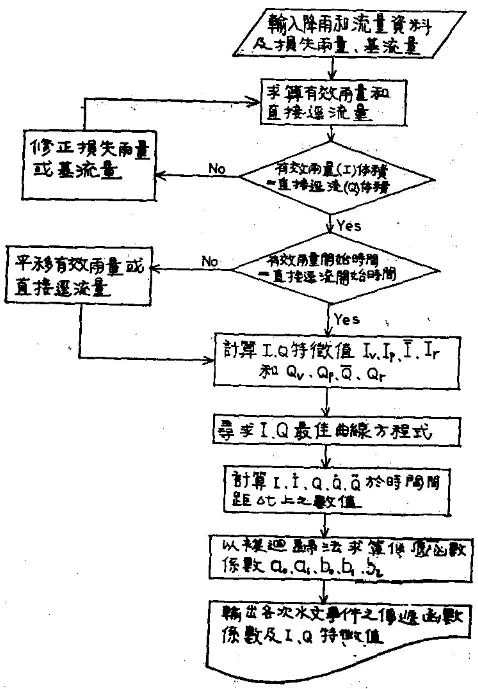
(7) 易　任：單位歷線（TUH）及瞬時單位歷線（IUH）之比較研究及應用，水利復刊第 20 期，民國 62年，pp. 15-31.

(8) 王如意：臺灣主要集水區水文系統最佳模式之研擬，臺灣水利第 23 卷第 4 期，民國 64 年 11 月。

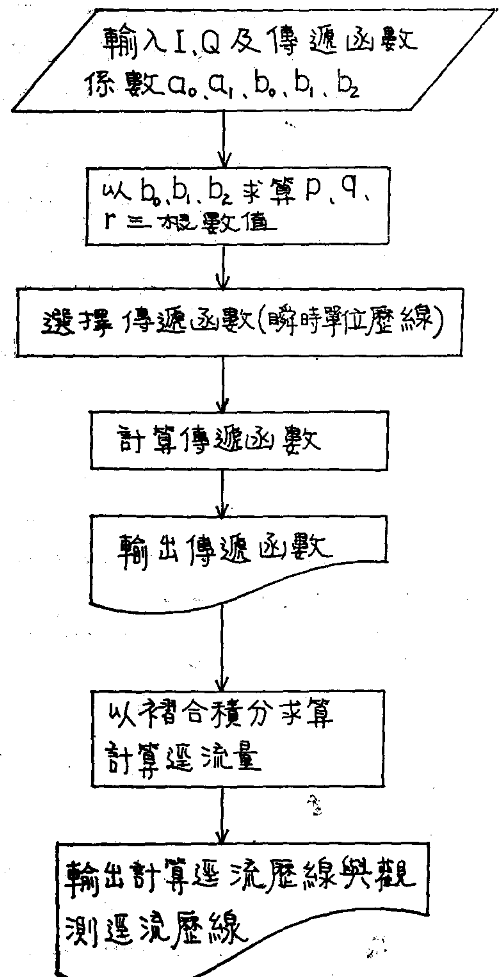
(9) 王如意：臺灣集水區瞬時單位歷線之研究，臺灣水利第 19 卷第 4 期，民國 60 年 11 月。

(10) 曾文水庫管理局：曾文水庫多目標運轉規則之研究，曾管叢字第六號，民國 65 年 12 月。

十、附　　錄



1.求算傳遞函數係數及 I. Q 特徵值之流程圖



2.　求算傳遞函數及計算逕流歷線之流程圖