元件法在農業工程設計及研究上之應用

Finite Elements Method

With its Application in the Agricultural Engineering Research and Design

中興大學農機組教授

彭 珈 琍

by Prof. & Dr. C.L. Pen,

Summary

The recent progresses in computer techonlogy-both in software and hardware Engineering-made possible to apply the numerical mathematics in solving engineering problems, althongh the demand on programming works, machine capacity and computing time is still very large.

The finite element method was at first developed to analyse the engineering structures in aspect to their stress and strain behaviors. A structure will be visualized as an assemblage of structural elements interconnected at a discrete number of nodal points. If such a idealization is permissible, we can set up for every element an equation of the force-displacement relationship. Thus we can establish for the whole structure a system of equations and by introducing boundary conditions and using matrice technique we can solve the equation system with a compuer. The solution described the behaviour of the system in response to the boundary conditions.

The finite element method can be applied not only in the structural prblems, but also in interconnected electrical circuits, heat transfer analysis deformation problems in plastic mechanics, field analysis etc. The essential properties of an element will even then be of the form encountered in structural analysis. This the article will introduce the principles of the finite element method their numerical treatments on example of elastic continuum with solved aplications in Agricultural Engineering.

一、前　　　　言

如果一個力學結構，它可以用許多形態簡單性質相同的元件集合來表示，而這些由簡單元件組合而成的集合又可以用一組聯立方程式來表示它的各元件的力學特性，則可以利用處理矩陣的數字方法（numerical method)使用電腦求出該組聯立方程式的解，因而可以求出該結構各文件在一定的邊界情況（Boundary Conditions)下的行爲。在實用上，因爲聯立方程式的龐大，這種方法需要利用記憶部位很大，演算速度很高的電腦。由於近代電腦工業的發達及電腦使用的普遍，元件法在工程研究和應用上的重要性與日俱增。

元件法最先發展的時候，是爲了作飛機機體的力學分析。後又在水利工程的力學分析上面，爲人廣泛應用。到目前,造船及其他的機械工程上,也經常採用這種方法來利用電腦，簡化設計工作。尤其它的使用範圍，如今已不限於彈性力學的範圍，而應用到熱傳導的問題上，穩定流體的分析，電磁場的分析，塑性力學和粘滯性流體力學的分析等等問題上面。這些不同的問題，初看好像各不相干。但是，他們都可以近似看成許多簡單小元件的組合，再依其物理特性可以建立一組代表這些特性的聯立方程式。吾人再利用元件法的一套現成的求解方法，不同的問題都能够同樣處理而求得解答，以推算出每一個元件在已知條件下的行爲。所以這種方法已經隨着電腦的發達，成爲工程上和自然科學上用來分析力，變形、位移、位能、動態等等現象的常用工具。下面我謹來介紹一下元件法的一般原理。

二、元件法原理簡介

圖 2.1 是一個受張力的有孔矩形板，圖 2.2 是爲了利用文件法處理該矩形板而假設該板由許多簡單的三角形組合而成圖中可以若由出所設的三角形愈細小個數愈多，則假設的情況與眞實的點況愈相近。元件固然可以是三角形，但爲了分析的對象情況不同，也

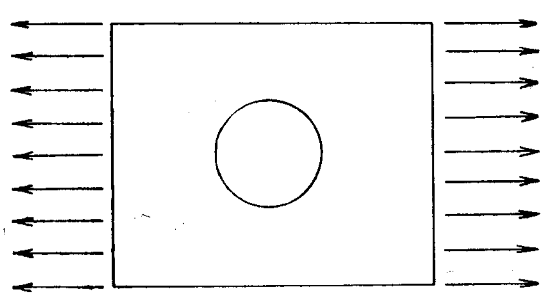


圖 2.1　受張力的有孔矩形板

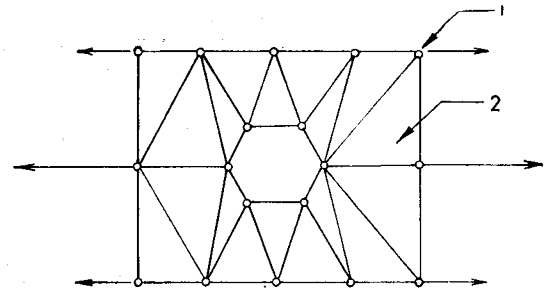


圖 2.2　用元件法來分析前圖時假設矩形板由許多簡單形狀（三角形）的元件，所組合而成，而一切的作用上都作同在節點上。

可以是四方形，球面三角形，球面四方形，它也可以是四角的立體；小的方形立體；環狀體等。利用元件法分析一個物體時，假設該物體受外力時內部發生的應變，可以由各元件的節點（Nodes）的位移來完全的描述、而無論是外力或者是內力通通假設它只作用於這些節點之上。讓我們來考慮四個三角形，它們交於 i 點，如 2.3 圖所示。令 u 和 v 是節點在 x 和 y 上方向的位移（圖 2.4）。

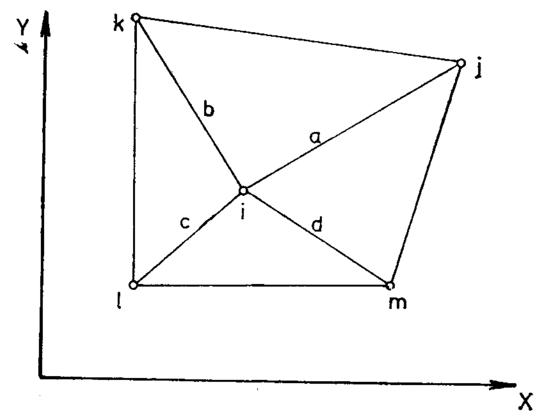


圖 2.3　四個三角形元件共 i 點

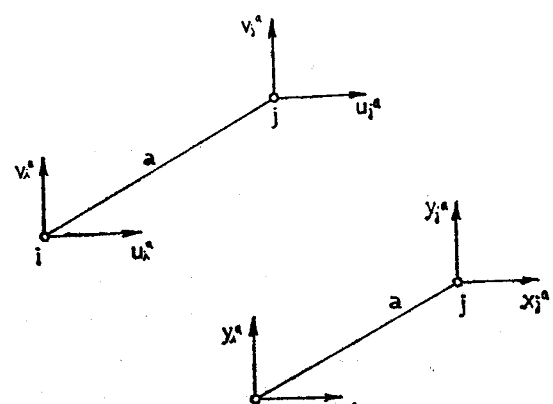


圖 2.4　節點受力及位移的標示

則有：

$$\left.\begin{aligned} u_i^a = u_i^b = u_i^c = u_i^d = u_i \\ v_i^a = v_i^b = v_i^c = v_i^d = v_i \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (2.1)$$

的關係。

如果內力的分力（x, y）和外力的分力（P_x, P_y）在平衡狀態的話，那麼，平衡的方程式就是

$$\left.\begin{aligned} x_i^a + x_i^b + x_i^c + x_i^d = zx_i = Px_i \\ y_i^a + y_i^b + y_i^c + y_i^d = zy_i = Py_i \end{aligned}\right\} \cdots (2.2)$$

按照物體性質的方程式（Rheological Relationships）可得到每一個元件節點的受力和節點的位移的方程式，也就是：

$$\left.\begin{aligned} & x_i^a = f_a\,(u_i^a, v_i^a, v_j^a, v_j^a), \\ & y_i^a = g_a\,(u_i^a, v_i^a, u_j^a . v_j^a) \\ & x_i^b = f_b(u_i^b, v_i^b, u_k^b, v_k^b), \\ & y_i^b = g_b\,(u_i^a, v_i^b . v_k^b, v_k^b) \\ & x_i^c = f_c\,(u_i^c, v_i^c, u_e^c, v_e^c), \\ & y_i^c = g_c\,(u_i^c, v_i^c, u_e^c, v_e^c) \\ & x_i^d = f_d(u_i^d, v_i^d, u_m^d, v_m^d), \\ & y_i^d = g_d(u_i^d, v_i^d, u_m^d, v_m^d) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3)$$

又將（2.3）代入（2.2）可得：

$$\left.\begin{aligned} & Px_i = f_a(u_i^a, v_i^a, u_j^a, v_j^a) + \\ & f_b(u_i^b, v_i^b, u_k^b, v_k^b) \\ & + f_c(u_i^c, v_i^c, u_e^c, v_e^c) + \\ & f_d(u_i^d, v_i^d, u_m^d, v_m^d) \\ & Py_i = g_a(u_i^a, v^a, u_j^a, v_j^a) + \\ & g_b(u_i^b, v_i^b, u_k^b, v_k^b) \\ & + g_c(u_i^c, v_i^c, u_e^c, v_e^c) + \\ & g_c(u_i^d, v_i^d, u_m^d, v_m^d) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

引用（2.4），（2.2）式可寫成：

$$\left.\begin{aligned} & Px_i = F_i\,(u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, \\ & v_k, u_e, v_e, u_m, v_m) \\ & Py_i = G_i(u_i, v_c, u_j, v_j, u_k, \\ & v_k, u_e, v_e, u_m, v_m) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.5)$$

同樣的道理，可以為 n 個節點寫出這樣 n 組方程式而每一組方程式的個數，正是節點的自由度。上面的式子中，節點位移的未知數有 2 n 個。如果這些方程式是線性（linear）方程式的話（好像虎克彈性方程式一類的），那麼我們可以利用矩陣的方法，利用電腦來解決。

三、利用元件法分析彈性物體

元件法使用在彈性物體上對一個任意的三角形元件（i,j,k）在一個彈性體中如圖（3.1）及（3,2）可以做出一個矩陣形式來描述三個節點的位置，

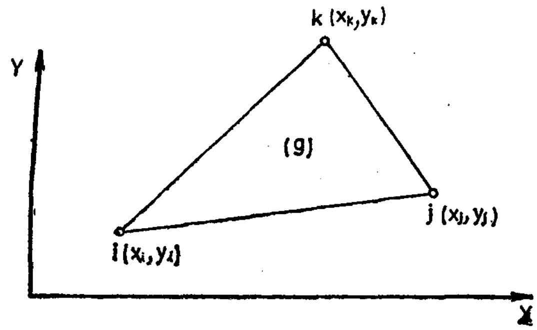


圖 3.1 三角形元件的 x, y 坐標值

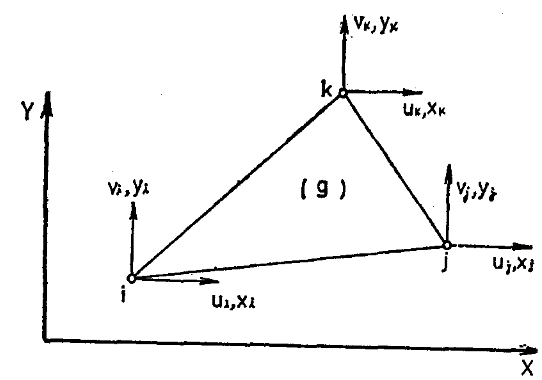


圖 3.2 三角形元件的標示 u, v 是 x 及 y 向的位移，X, Y 是 x 及 y 向的受力

$$\{\delta_g\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \cdots (3.1) \qquad \{f_g\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \end{Bmatrix} \cdots (3.2)$$

普通應變的公式是

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

在一個小的三角形裡面，如果我們假設 u 和 v 是常數的話，那麼 u 和 v 可以節點的座標（x,y）來描述：

$$\left.\begin{aligned} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.4)$$

把它寫成矩陣的形態有：

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \cdots (3.5)$$

引入第一式就是：

$$\{\delta_g\} = [c]\ \{\alpha\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.5')$$

而向量 $\{\alpha\}$ 可以用下列的式子求出來：

$$\{\alpha\} = [c^{-1}]\ \{\delta_g\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.6)$$

所以，任何一個節點的變形向量是：

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$= [s]\{\alpha\} = [s][c^{-1}]\{\delta_g\} \cdots\cdots (3.7)$$

將 (3.4) 式代入 (3.3) 式可以得到：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \cdots (3.8)$$

簡化的寫法：

$$\{\varepsilon\} = [B]\ \{\alpha\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.8')$$

由彈性的定律知道：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \cdots\cdots (3.9)$$

E：是楊氏係數。

v：是 poisson's Ratio。

用矩陣的簡式來表示的話，有

$$\{\sigma\} = [D]\ \{\varepsilon\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.9')$$

所以現在我們有一組待解的聯解的聯立方程式。這組聯立方程式的 u 和 v 是節點位移，是未知數，而有常數矩陣 $[K_g]$ 和節點上的受力X和Y爲已知：

$$\left.\begin{aligned} X_i &= K_{11}u_i + K_{12}v_i + K_{13}u_j + K_{14}v_j + K_{15}u_k + K_{16}v_k \\ Y_i &= K_{21}u_i + K_{22}v_i + K_{23}u_j + K_{24}v_j + K_{25}u_k + K_{26}v_k \\ X_j &= K_{31}u_i + K_{32}v_i + K_{33}u_j + K_{34}v_j + K_{35}u_k + K_{36}v_k \\ Y_j &= K_{41}u_i + K_{42}v_i + K_{43}u_j + K_{44}v_j + K_{45}u_k + K_{46}v_k \\ X_k &= K_{61}u_i + K_{52}v_i + K_{53}u_j + K_{54}v_j + K_{55}u_k + K_{56}v_k \\ Y_k &= K_{61}u_i + K_{62}v_i + K_{63}u_j + K_{64}v_j + K_{65}u_k + K_{66}v_k \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3.10)$$

寫成矩陣形式，則元件 g 的應力與應變有如下的關係式：

$$\{f_g\} = [K_g]\ \{\delta_g\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.10')$$

其中矩陣 $[K_g]$ 又叫做硬度矩陣，因爲在理論上它就好像彈性係數一樣可以表現一個元件的硬度情況一畫三角形的元件設它的厚度在Z軸方向，受外力之後內部的能量是：

$$W_{in} = \iiint \{\varepsilon^*\}^T\ \{\sigma\}\ dx\ dy\ dz \cdots\cdots (3.11)$$

$\{\varepsilon^*\}$ 是變形向量。而外在的能量是

$$W_{au} = \{\delta_g^*\}\ \{f_g\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.12)$$

$\{\delta_g\}$是位移的向量，在沒有能量轉移的假設下，有：

$$W_{in} - W_{au} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3.13)$$

所以 (3.11) 在代入 (3.9′) 之後變成：

$$W_{in} = \iiint \{\varepsilon^*\}^T [D]\{\varepsilon\}\ dx\,dy\,dz \cdots (3.14)$$

再利用 (3.8′)、(3.14) 就變成爲

$$W_{in} = \iiint \{\alpha^*\}^T [B]^T [D][B][\alpha]\ dx\ d\ dz\ y \cdots\cdots\cdots\cdots (3.15)$$

又代入 (3.6) 以消去 $\{\alpha\}$ 得到

$$W_{in} = \iiint \{\delta_g^*\}^T [C^{-1}]^T [B]^T [D]\ [B]\ [C^{-1}]\ \{\delta_g\}\ dx\ dy\ dz \cdots\cdots\cdots\cdots (3.16)$$

因爲 $[\delta_g^*]^T$ 和 $[\delta_g]$ 對 x,y 不相關，在積分的時候可以取出來，原式變成爲：

$$W_{in} = [\delta_g^*]^T\ [\delta^*] \iiint [C^{-}]^T\ [B]^T\ [D]\ [B]\ [C^{-1}]\ dx\ dy\ dz \cdots\cdots\cdots\cdots (3.17)$$

將 (3.17) 和 (3.12)代入(3.13) 內，得

$$[\delta_g^*]^T [[f_g] - [\delta_g] \iiint [C^{-1}]^T [B]^T [D]\ [B]\ [C^{-1}]\ dx\ dy\ dz] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3.18)$$

要想使 (3.18) 爲任何一個變形 $[\delta_g^*]$ 都有效的話，它的形態必須是：

$$[f_g] = [\delta_g] \iiint [C^{-1}]^T\ [B]^T\ [D]\ [B]\ [C^{-1}]\ dx\ dy\ dz \cdots\cdots\cdots\cdots (3.19)$$

將 (3.19) 和 (3.10′) 比較；我們可以看得很清楚；

$$[K_g] = \iiint [C^{-1}]^T [B]^T\ [D]\ [B]\ [C^{-1}]\ dx\ dy\ dz \cdots\cdots\cdots\cdots (3.20)$$

就因爲 [B] 和 [D] 與 x,y 不相干，積分的結果就是：

$$[K_g] = Ah\ [C^{-1}]^T [B]^T\ [D][B][C^{-1}] \cdots (3.21)$$

在這裡 A 是三角形文件的面積

h 是元件的厚度

對整個的結構來講，它有一個硬度矩陣 [K]，而這裡的 $[K_g]$ 只是元件 g 的硬度矩陣，也只是矩陣 [K] 的一個子矩陣。如果 $[\delta]$ 是未知的各節點位移向量（有 2n 個數值）以及 [P] 是已知的外力矩陣，那麼有

$$[P] = [K]\ [\delta] \cdots\cdots\cdots\cdots (3.22)$$

因此每一個節點的位移就可以代入邊界情況：而求得卽：

$$[\delta]=[K^{-1}][P] \cdots\cdots\cdots\cdots(3.23)$$

利用 (3.8′) 和 (3.6) 可以算出應變：

$$[\varepsilon]=[B][C^{-1}][\delta] \cdots\cdots\cdots\cdots(3.24)$$

再利用(3.9′)便可以算出每一個元件中的應力。

四、元件法的電腦程式

元件法的電腦程式需要有以下幾個步驟：

(1)第一個步驟是輸入資料：

這些輸入資料包括，楊氏係數 Poisson's Rat o，節點坐標元件結構，邊界及外力等。

(2)第二個步驟是計算文件的硬度矩陣 $[K_g]$。利用 (3.21) 式及 $[C^{-1}]$,$[B]$,$[D]$ 可以算出每一個元件的硬度矩陣。

(3)第三個步驟是把所算出來的各文件的硬度矩陣 $[K_g]$ 置入總結構硬度矩陣 $[K]$ 裡面的恰當位置。

(4)第四步要矯正$[K]$使得邊界數值能够引入系統。不能够發生位移的節點，它的位移要等於0($\delta_B=0$)它的反作用力 (P_B) 如果是未知的話，那麼要利用下面這個方式安排 $[K]$；

$$\begin{Bmatrix} P_A \\ \cdots\cdots \\ P_B^+ \end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c} K_{AA} & K_{AB} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ K_{BA} & K_{BB} \end{array}\right]\begin{Bmatrix} \delta_A^+ \\ \cdots\cdots \\ \delta_B \end{Bmatrix} (4.1)$$(十表示未知)

(5)解總矩陣：

未知的節點位移$[\delta_A^+]$可以用矯正的硬度矩陣 $[K_{AA}]$ 及已知的節點受力向量 $[P_A]$ 而求出

$$[\delta_A^+]=[K_{AA}^{-1}][P_A] \cdots\cdots\cdots\cdots (4.2)$$

(6)計算未知的反作用力：

固定元件的反作用力向量 $[P_B^+]$ 可以下式算出：

$$[P_B^+]=[K_{BA}][\delta_A]$$
$$=[K_{BA}][K_{AA}^{-1}][P_A] \cdots\cdots (4.3)$$

(7)利用 (3.24) 及 (3.9′) 式計算應力及應變。

(8)印出計算結果：包括各元件的應力應變及變形。

五、元件法在農業工程上處理彈性問題的例子

(1)分析簡單結構的應力應變：

輸入：四個節點。

①、②、③、④的座標

輸出，各節點的應力及應變

及各文件的節點，固定節點及外力，Poisson 常數彩性係數等。

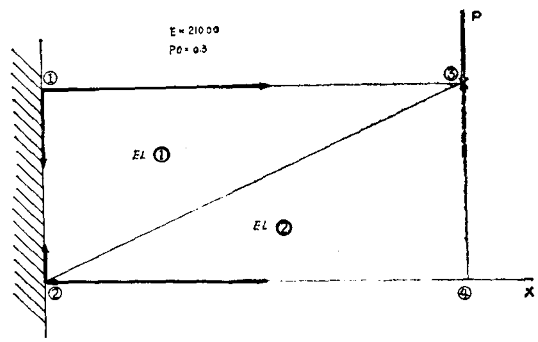


圖 5.1 看成爲兩個元件 ①、②、③及②、③、④合成的簡單結構

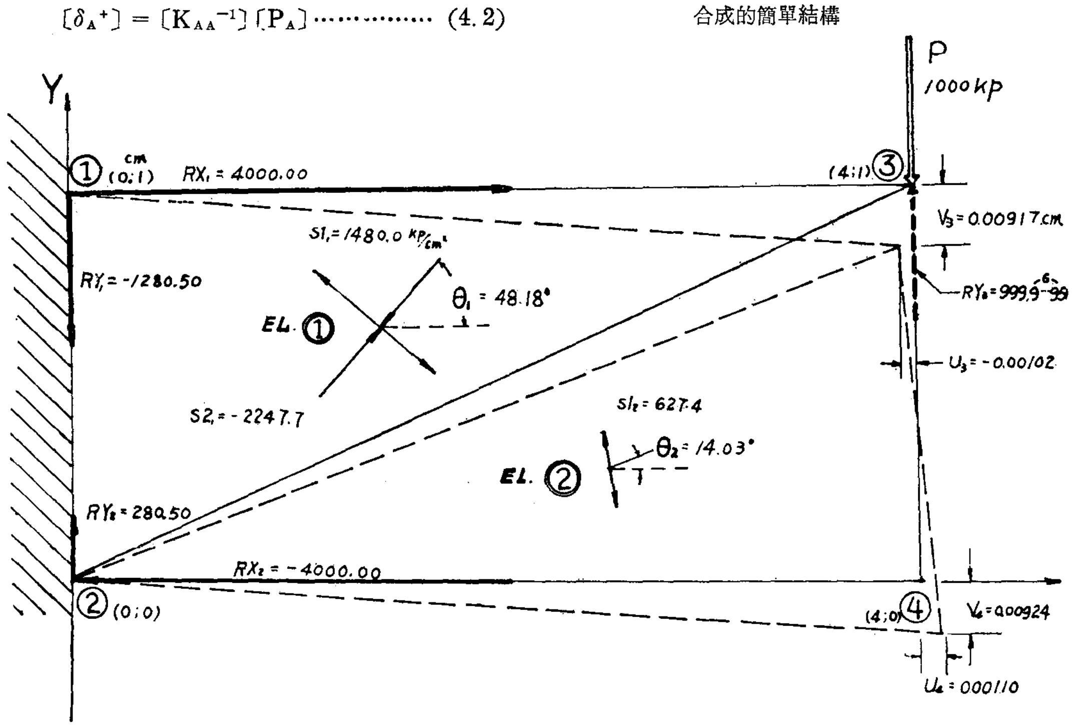


圖 5.2 元件法彈性分析程式對 5.1 問題的解

(2)分析曳引機安全機架受外力的彈性變形。(5.3)

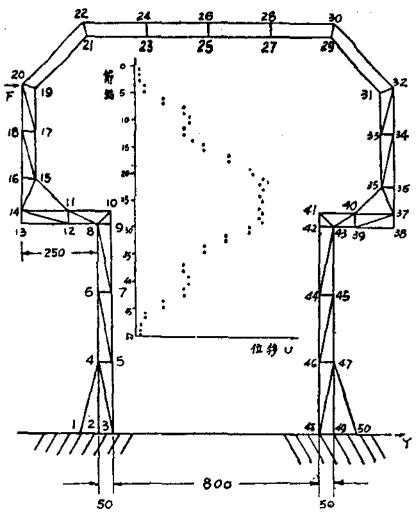


圖 5.3 曳引機安全架受外力 P_1 各節點的位移分析

(4)車心或其他受力零件的分析
(5)地面受壓的應力應變分析
(6)車體力學分析
(7)醃牧草草庫的力學分析
(8)水壩的應力應變分析體（圖54,55）

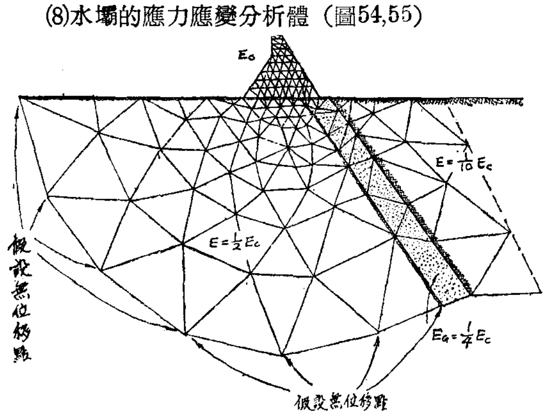
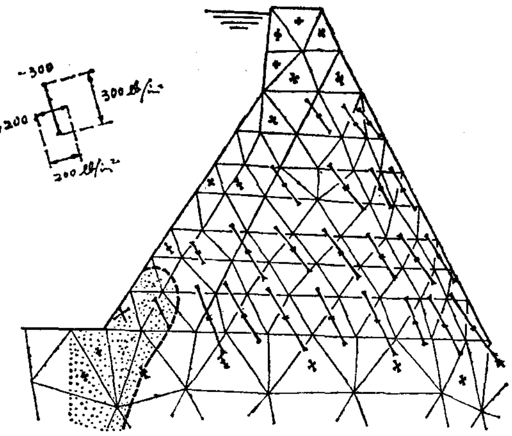


圖 5.4 水壩應力分析的 FEM 假設



5.5 元件法型式對圖9.5分析的解

六、參 考 文 獻

1. Argyris, J.H. and H.E. Buck et al.: Application of Matrix Displacement Method to the Analysis of Pressure Vessel. Jr. Eng. Ind., Trans. ASME No. 5 p. 317-329, 1970.
2. Kitani, O.: Anwendungsmoglichkeiten des Finit-Element-Verfahrens in des Landtechnik, manuscript in Inst. fier Landmaschinen, TUM, 1972.
3. Radaj, D.: Computer-unterstütes Konstruieren. Konstruktion Hf. 10. p. 373-380, 1971
4. Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, William Clowes & Sons, London, 1971.