

臺灣集水區月河川流量模擬之研究

A Study on the Simulation of Monthly Streamflows of Watersheds in Taiwan

臺灣大學農業工程學系副教授

王 如 意

Ru-yih Wang

Abstract

The study herein is applying the multi-month Markovian generating process to simulate monthly river discharges of seven larger watersheds in Taiwan. The purpose of simulating streamflow is generally to produce long series of values that could as likely occur in the future as could repetition of historical values, thus providing a more complete sampling of potential runoff than is represented in flows as they occurred historically.

Gamma distribution is assumed to fit the actual distribution of monthly discharges of watershed. Applying the mathematical model of first-order Markov chain which is operated by an electronic computer, synthetic monthly streamflows with 100 years for each watershed can be simulated. The general patterns of generated discharges verse observed ones for most watersheds match quite well.

The gamma-distributed first order Markov chain (FIMC) model is proved to be one of useful models of this category, since marginal distributions of many hydrologic variables can be approximated satisfactorily by the gamma distribution. It is considered to give reasonably good results, but will warrant further testing and possible refinement due to particular hydrologic and physiographic characteristics of certain watersheds in Taiwan.

一、引 言

水文時列 (Hydrologic time series) 為水資源規劃不可或缺之憑藉, 唯水文記錄為歷史性資料, 有待經年累月、長期間不中斷之量測。水文資料之年數不足, 往往令人怯於運用。吾人於規劃水庫或估計灌溉、水電、給水等實際工程, 時因限於水文設計所需之記錄年數, 以致無法達成整個經濟分析年限之要求。故規劃與運用時, 如何以短暫之記錄, 推估較長

之水文時列, 為一亟待研究之課題。

依序推衍法 (Sequential generation)^{(6,17)*}

對於水文時列分析具有甚重要之實用價值。一般水文資料之年代不足常導致於運用上之困難。近年來, 水文學方面之理論隨着電子計算機之普遍應用而日新月異。水文學家期冀突破此水文觀測記錄年數不足之困境, 遂有序率模式 (Stochastic models)^(7,20,21,25) 之創見, 構成人為之合成水文資料, 以合乎所期望足夠之水文年限。易言之, 依序推衍法即為根據某種統

* 括號內號碼表示參考文獻目錄

計可信極限，創造足夠運用之水文合成資料，以供水資源規劃、水文分析需要之一種機率應用方法。

在一水文時列中，若能決定樣本大小為 n 之變數 $x_i, i=1, 2, \dots, n$ 之統計特性，諸如均數 \bar{x} ，標準偏差 s ，偏度係數 (Coefficient of skewness) g 及相關係數 (Coefficient of correlation) r 等，則可依序推衍合成水文資料。所推衍記錄之樣本大小可隨心所欲或依應用需要決定之，其程序可根據統計分析、迴歸方法 (Method of regression)、馬可夫模造歷程 (Markov generating process) 及蒙特卡洛法 (Monte Carlo method)⁽⁵⁾ 等方式推求之。

本省河川流量記錄大多殘缺不全或年數不足，年數最長者只有三十年之譜，大多數河川之水文站只有十數年，甚至三五年實測記錄而已，給予水文運用、研究上一大難題。且水文記錄之長短影響水文分析可靠精度頗大。如何根據序率水文之理論，構成最適之合成流量模式，推衍出人為且具可用精度範圍內之水文資料，俾供本省集水區經營、水文分析之需要，為本專題研究之目的。

二、馬可夫模式之理論

若有一序列逢機歷程 (Random process) 水文量 $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ ，其中 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ，如 t_n 時間該水文量 $x(t_n)$ 發生之機率承受其臨前 $t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_2, t_1$ 諸水文量 $x(t_{n-1}), x(t_{n-2}), \dots, x(t_2), x(t_1)$ 等之傳遞效應 (Carry-over effect)，即

$$p[x(t_n) | x(t_{n-1}), x(t_{n-2}), \dots, x(t_2), x(t_1)]$$

則上隨機歷程稱之為馬可夫歷程。此為一般通式，表示 $x(t_n)$ 之大小乃受 $x(t_{n-1}), x(t_{n-2}), \dots, x(t_1)$ 等 $n-1$ 個臨前水文事件持續性 (Persistence) 之影響，此謂之 $n-1$ 階馬可夫鏈 ($n-1^{\text{th}}$ order Markov chain)。一般實際應用上僅用一階馬可夫鏈，即導求 $p[x(t_n) | x(t_{n-1})]$ 之隨機歷程，或解釋為 $x(t_n)$ 受 $x(t_{n-1})$ 影響可能發生之條件機率。馬可夫歷程之特性頗多，其一為假定馬可夫歷程具有定常性 (Stationary)^(7, 20)，在漫長無限之水文歷程中任取其中任一時段，仍必為馬可夫歷程；另一為馬可夫歷程具有可逆性⁽²⁶⁾，因之在水文應用上，可以後期記錄反推前期記錄，以做為水文資料補遺及校驗之用。

有關合成流量之時列可由下式表示：

$$q_i = d_i + e_i \quad (1)$$

式中， d_i 為合成流量推估之確定分量 (Deterministic component)， e_i 為其隨機分量 (Random component)。

吾人假定於推衍歷程中， e_i 隨水文資料之零均數 (Zero mean) 與單一變方 (Unit variance) 而獨立分佈，且兩不同流量之相關與其間之時間差距有關。

確定分量具線性自迴歸型式 (Linear autoregressive form)，即

$$d_i = \beta_0 + \beta_1 q_{i-1} + \beta_2 q_{i-2} + \dots + \beta_m q_{i-m} \quad (2)$$

即 d_i 為臨前 m 個流量之線性組合 (Linear combination)，或 d_i 承受 q_{i-1}, \dots, q_{i-m} ，等 m 個臨前流量持續性之影響； $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ 為諸待定迴歸係數。亦言之， d_i 為水文資料族羣均數 μ 、變方 σ^2 以及臨前 m 個水文量 q_{i-1}, \dots, q_{i-m} 之函數。即

$$d_i = f(\mu, \sigma^2, q_{i-1}, q_{i-2}, \dots, q_{i-m}) \quad (3)$$

流量持續特性可示之如圖 1。

式(2)最簡單之模式為 $m=1$ ，則一階或稽延一馬可夫模式 (First order or lag one Markov model) 可表示為：

$$q_i = \beta_0 + \beta_1 q_{i-1} + e_i \quad (4)$$

上模式假定過去對目前水流影響端視其臨前水文條件 (Antecedent hydrologic conditions)，尤其先前單一流量而定。此種模式與實際現象雖有出入，然因其簡便有效，一般流量推衍廣受應用。

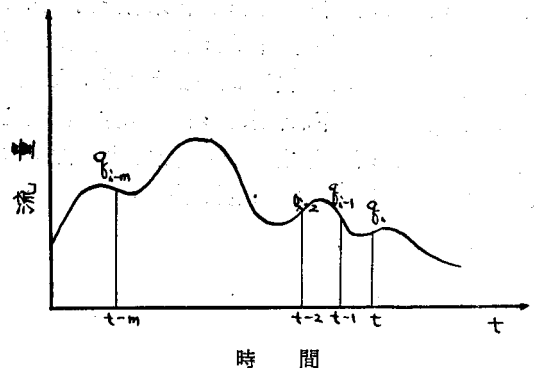


圖 1 流量持續特性示意圖

一階馬可夫水流推衍模式中係數 β_0, β_1 可與實際流量配合。首先假定常態水流 (Normal flows) 中， μ 為平均水流， ρ 為一階系列相關係數 (First order serial correlation coefficient)，則：

$$q_i = \mu + \rho(q_{i-1} - \mu) + e_i \quad (5)$$

此即流量 q_i 為其平均水流量 μ ，臨前水流與均數差異量比例與隨機分子 e_i 之總和。

目前，吾人只假定隨機分量 e_i 具零均數與固定

變方且與 q_{i-1} 無關。如 q_i 為常態分佈， e_i 亦將為常態，故 q_i 之期望值為 μ ，其變方則可導求如下：

$$\begin{aligned} \text{Var}(q_i) &= \sigma^2 = E[(q_i - \mu)^2] \\ &= E\{[\mu + \rho(q_{i-1} - \mu) + e_i] - \mu\}^2 \end{aligned}$$

上計算可化簡為：

$$\sigma^2 = \rho^2 \sigma^2 + \sigma_e^2$$

$$\text{或 } \sigma_e^2 = \sigma^2(1 - \rho^2) \quad (6)$$

上式， σ_e^2 為隨機分子之變方，則 e_i 之標準偏差 σ_e 為：

$$\sigma_e = \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \quad (7)$$

假設 t_i 為常態分佈且隨零均數與單一變方獨立隨機變化，即 $t_i \sim N(0,1)$ ，則隨機分子 $e_i = t_i \sigma_e$ ，即

$$e_i = t_i \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \quad (8)$$

由式(5)、(8)得一階馬可夫推衍模式為：

$$q_i = \mu + \rho(q_{i-1} - \mu) + t_i \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \quad (9)$$

式中， t_i 為具零均數及單一標準偏差之獨立常態樣本變異量 (Normal sampling deviate)，其可令常態分佈之合成流量保持歷史流量實測記錄之均數、變方及一階系列相關係數。

馬可夫水流模式之意義須做一簡明闡釋。吾人假設某時間發生之水流 q_i 受其臨前水流 q_{i-1} 及隨機因子 e_i 之影響，此為河川水流持續性之特徵。亦即，臨前水流 q_{i-1} ，對目前水流 q_i 具傳遺效應。此可解釋為某時間之高流量將增加該地區地下水及地下水滯蓄量，因之，如下一時段，即使未有降雨，亦可造成該河川高流量之趨勢。同理，在低流量期間地下水供應將逐漸消滅，即使下一時段發生降雨，大部份將滲入地下而流入地下水含水層，故河川亦呈低流量狀況。由此可知，馬可夫歷程持續性水文特性之基本假設與實際河川流量變化情形頗為符合。

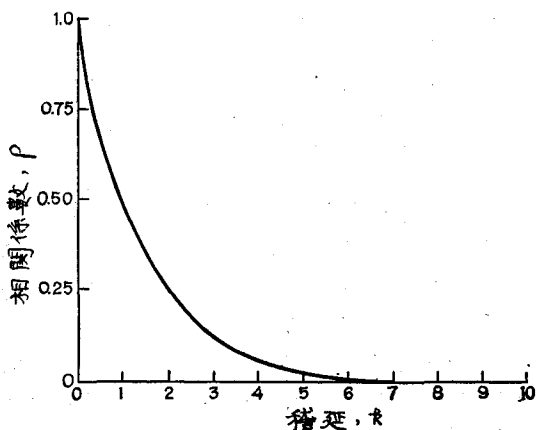


圖 2 理論馬可夫相關圖

常態馬可夫歷程中另一特性為在合成推衍序列中之因子，如其時間相差 k 單位，其關係數則為 ρ^k ，即 k 階或稽延 k 序列相關係數⁽⁹⁾。圖 2 表示在一馬可夫歷程中，稽延 k 相關係數 ρ^k 對相距時段 k 關係之曲線。此圖形亦稱之為相關圖 (Correlogram)，由圖中顯示序列水文因子間之相關隨其因子間距增加呈現指數消滅之趨勢。

馬可夫模式設計

$$q_i = \mu + \rho(q_{i-1} - \mu) + e_i$$

中，亦可適用於水流分佈為伽瑪分佈 (Gamma distribution)⁽¹⁰⁾。設族羣均數 μ ，變方 σ^2 ，偏度 r_x ，首先介入水文事件隨機分子之偏度 r_e ，其定義為⁽⁶⁾：

$$r_e = \frac{1 - \rho^3}{(1 - \rho^2)^{1.5}} r_x \quad (10)$$

假定 t_i 仍為均數為 0，變方為 1 之常態分佈，則一修正隨機樣本變量 e_i 可定義為⁽⁸⁾：

$$e_i = \frac{2}{r_e} \left[\left(1 + \frac{r_e t_i}{6} - \frac{r_e^2}{36} \right)^3 - 1 \right] \quad (11)$$

上變量為具均數 0、均方 1、偏度係數 r_e ，大致呈伽瑪分佈。甚者，其應用實測記錄流量之第三動差，則具伽瑪分佈馬可夫推衍模式與式(9)相似，為：

$$q_i = \mu + \rho(q_{i-1} - \mu) + e_i \sigma \sqrt{1 - \rho^2}$$

上結果之流量序列 q_i 為具均數 μ 、標準偏差 σ 、一階相關係數 ρ 及偏度係數 r_x 之伽瑪分佈。

另一類假設水流為伽瑪分佈之理論⁽¹¹⁾如下：設具常態馬可夫推衍模式，其均數 0、變方 1、一階相關係數 ρ_y 之長期數列 y_1, y_2, \dots ，則選擇一適當之整數 m ，依下式形成一新之數列 z_1, z_2, \dots ，即：

$$z_i = \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} y_j^2 \quad (12)$$

亦即以數列 y 分成具長度 m 之次數列， z_i 為第 i 個此類次數列因素平方之總和。 z 即為以均數 m 、變方 $2m$ 、偏度係數 $2\sqrt{2/m}$ 、序列相關係數 ρ_y 之伽瑪分佈。合成流量之數列 q_1, q_2, \dots ，最後可形成如：

$$q_i = \bar{x} + s(x) [(2m)^{-0.5} z_i - (m/2)^{0.5}] \quad (13)$$

式中， \bar{x} 及 $s(x)$ 為歷史流量資料之均數及標準偏差。 q_i 保持歷史水流之均數、變方及一階相關係數，其偏度為 $(8/m)^{0.5}$ 。因 m 為整數，此過程不能生成具有任意偏度係數之流量。一般情形，其偏度不得大於 $2\sqrt{2}$ 。

如假設馬可夫合成模式為對數常態分佈 (Logarithmic-normal distribution)，吾人可取河川流

量之對數，再計算其均數、變方、序列相關係數及偏度係數。馬他拉斯氏 (Matalas)⁽¹¹⁾ 曾修正此對數常態模式推衍方式，其假設 a 為一可能水流之低界值、 x 為其水流量，則 $y = \log(x-a)$ 為常態分佈。參數 x 與 y 之關係可由下諸式求出。

$$\mu(x) = a + \exp[\sigma^2(y)/2 + \mu(y)] \quad (14)$$

$$\sigma^2(x) = \exp\{2[\sigma^2(y) + \mu(y)] - \exp[\sigma(y) + 2\mu(y)]\} \quad (15)$$

$$\gamma(x) = \frac{\exp[3\sigma^2(y)] - 3\exp[\sigma^2(y)] + 2}{\{\exp[\sigma^2(y)] - 1\}^{3/2}} \quad (16)$$

$$\rho_1(x) = \frac{\exp[\sigma^2(y)\rho_1(y)] - 1}{\exp[\sigma^2(y)] - 1} \quad (17)$$

為保存歷史記錄水流之統計量，馬他拉斯氏建議代入上四式計算樣本統計量 \bar{x} 、 $s^2(x)$ 、 $g(x)$ 及 $\gamma_1(x)$ 。由上四式即可解得 $\mu(y)$ 、 $\sigma^2(y)$ 、 $\rho(y)$ 及 a 。此類估算，非為歷史性流量對數之樣本統計量，可應用於流量合成過程得一序列水流合成對數級數 h_1, h_2, \dots ，則其合成流量可推衍如：

$$q_i = \exp(h_i) + a \quad (18)$$

上流量具有期望參數 \bar{x} 、 $s^2(x)$ 、 $g(x)$ 及 $r_1(x)$ 。

上列所用馬可夫模式之推衍期距常以日或年為單位，但如吾人研究之河川流量對象為季節性、月份性，則需較繁雜之推估模式^(2,9)，蓋一年中濕潤季節之平均流量與乾旱季節者截然不同，每月平均流量亦然有月份性之差異分別。

考慮每年具有 m 個季節或月份之常態馬可夫模式。此模式應用二引數：第一引數表示某一流量發生之年代；第二引數表示其季節或月份，其由 1 至 m 循環變化。是故，河川流量可表示如 $q_{i,j}$ ；其中， i 表示河川流量序列之發生年代， j 為其季節或月份。 μ_j ， j 由 1 至 m ，為 m 季節或月份內河川之平均流量， σ_j 為該期間內水流之標準偏差， $\rho(j)$ 為在目前季節或月份 j 與前一期間 $j-1$ 流量之相關係數。 $\rho(j)$ 亦即一階序列相關係數，其定義為⁽⁸⁾：

$$\rho(j) = E\{(x_{i,j} - \mu_j)(x_{i,j-1} - \mu_{j-1})\} / (\sigma_j \sigma_{j-1}) \quad (19)$$

上式中， $x_{i,j}$ 表示季節或月份 j 之流量， $\rho_{(1)}$ 為第 1 季節或月份對第 m 季節或月份之相關係數，因第 1 季節或月份緊隨第 m 季節或月份之後。如 $j=1$ ， $\mu_{j-1} = \mu_0 = \mu_m$ ，同理 $x_{i,0} = x_{i,m}$ ， $\sigma_0 = \sigma_m$ 。故複季節性或複月份性馬可夫模式 (Multi-season/Multi-month Markov model) 之推衍方程式可表示如：

$$q_{i,j} = \mu_j + \frac{\rho(j)\sigma_j}{\sigma_{j-1}}(q_{i,j-1} - \mu_{j-1}) + t_{i,j} \sigma_j \sqrt{1 - \rho(j)} \quad (20)$$

即在第 i 個年代、第 j 季節或月份發生之合成流量為式(20)中三項之總和。第一項為季節或月份 j 之平均水流，第二項為先前期間 $j-1$ 之水流與該季節或月份之差異量再乘上迴歸係數 $b_j = \rho(j)\sigma_j/\sigma_{j-1}$ ，第三項為具有 0 均數及 1 標準偏差之常態分佈度量 $t_{i,j}$ ，乘上其隨機分子標準偏差 $\sigma_\varepsilon = \sigma_j \sqrt{1 - \rho(j)}$ ，則流量具有所期望之變方。

再者，吾人考慮具珈瑪分佈、複月份性馬可夫推衍模式。設 μ_j 、 σ_j 、 $\rho(j)$ 與上述常態分佈馬可夫模式之定義相同，另假定 r_j 等於第 j 月份流量之偏度係數，其定義為：

$$r_j = \frac{n^2 \sum_{i=1}^n x_{i,j}^3 - 3n \sum_{i=1}^n x_{i,j} \sum_{i=1}^n x_{i,j}^2 + 2(\sum_{i=1}^n x_{i,j})^3}{n(n-1)(n-2)\sigma_j^3} \quad (21)$$

設 $r_{i,j}$ 為第 j 月份隨機變量之偏度係數，其計算方式如：

$$r_{i,j} = \frac{[r_j - \rho(j-1)r_{j-1}]}{[1 - \rho(j)]^{1.5}} \quad (22)$$

再設 $t_{i,r,j}$ 為基於一常態標準化變量 (Normal standardized variate) $t_{i,j}$ 之轉化隨機樣本變量，則：

$$t_{i,r,j} = \frac{2}{r_{i,j}} \left[\left(1 + \frac{r_{i,j} t_{i,j}}{6} - \frac{r_{i,j}^2}{36}\right)^3 - 1 \right] \quad (23)$$

式(23)中， $t_{i,j}$ 為具 0 均數及 1 標準偏差之常態分佈，而 $t_{i,r,j}$ 為具 0 均數及 1 標準偏差與偏度 $r_{i,j}$ 之珈瑪分佈。因之，具珈瑪分佈複月份性一階馬可夫推衍模式可由式(20)求之。

三、分析方法

1. 水文資料之收集與整理

臺灣為一臨海島嶼，水文、地文獨具奇異時性。中央山系由北向南延伸，平均高度在 3,000 公尺以上，將本省分為不對稱之東西兩大斜面。溪流自中央山地發源，分向東西兩側下流，流路短促，坡路陡峻。甚至本省位居亞熱帶，全年雨量不均，夏潦冬旱。每年四月至十一月，時遭颱風侵襲，常有暴雨發生，河川亦呈洪水氾濫之危險。反之，十二月至翌年三月又多乾旱現象，河川幾位於乾涸之程度。

本省主、次要河川有 61 條，本研究因限於人力、時間之不敷，選擇淡水河、高屏溪、濁水溪、烏溪、曾文溪、蘭陽溪、卑南溪等七大流域內之主要水文站流量資料加以分析。茲將所擬研究之流域位置圖示之於圖 3，其有關水文資料列於表 1。



圖 3 臺灣主要集水區位置圖

表 1 本省主要流域水文資料一覽表

流域名稱	編號	站名	站號	流域面積 (KM ²)	記錄年份	年數	經辦單位	備註
淡水河	3	石門(1)	H 5	754.28	民國35~57年	23	水利局	
蘭陽溪	10	蘭陽大橋	H 6	820.69	39~60	22	水利局	
烏溪	27	柑仔林	H 6	954.24	45~60	16	水利局	
濁水溪	29	集集	H21	2310.84	30~33 36~37 40~60	27	水利局	記錄中斷
卑南溪	40	臺東大橋	H11	1584.29	31~33 37~60	27	水利局	記錄中斷
曾文溪	41	照興(3)	H 2	520.73	45~60	16	水利局	
高屏溪	51	九曲堂(2)	H26	3056.63	40~60	21	水利局	

本省河川流量記錄大多斷續不全或年數不足，測站記錄年數最多者 30 年，一般皆在十數年之譜，令人怯於運用。水文資料為水資源規劃之主要憑藉，完整且足夠年數之水文記錄誠屬必要者。筆者基此理由，期冀應用馬可夫鏈之序率模式以推衍河川合成流量，爰以為水文設計頻率分析之用。序率模式所採用之時間間距 (Time interval)，視需要而定，或推估年、季、月、旬或日流量。年流量之推衍，已有甚多之文獻^(1,14,15,18)；日流量之模造，亦有一些論文^(24, 27,16)發表；季、月、旬之模式相似，水資會曾有大甲溪乾濕兩季流量之推估⁽²⁸⁾。筆者蓋以本省河川流量隨月份有週期性之變化，故應用複月份伽瑪分佈第一階馬可夫模式之理論，分析並推衍上述本省七大流域重要水文站河川之月流量資料。此類流量記錄於水資會編印之臺灣水文年報⁽²²⁾內有完妥整理，應用頗稱簡便。

2. 月流量之推衍模式

本研究偏重於本省七大集水區水文站月流量之推衍，所採用流量模造之數學方式為複月份型、具伽瑪分佈馬可夫一階模式。假設某一水文站河川月流量記錄排列如：

$$\begin{aligned} & X_{1,1}, X_{1,2}, X_{1,3}, \dots, X_{1,12} \\ & X_{2,1}, X_{2,2}, X_{2,3}, \dots, X_{2,12} \\ & \vdots \\ & X_{n,1}, X_{n,2}, X_{n,3}, \dots, X_{n,12} \end{aligned}$$

其可由 $x_{i,j}$, $i=1\sim n$, $j=1\sim m$ 。因一年有 12 月，即 $m=12$ ； n 為流量記錄之年數。

首先計算第 j 個月之月流量均數如：

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,j} \quad (24)$$

月流量之變方可表示為：

$$s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_{i,j}^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n x_{i,j} \right)^2 \quad (25)$$

第 j 月流量與臨前 $j-1$ 月流量之相關係數：

$$r(j) = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i,j} x_{i,j-1} - n \bar{x}_j \bar{x}_{j-1}}{(n-1) s_j s_{j-1}} \quad (26)$$

月流量分佈之偏度係數：

$$g_j = \frac{n^2 \sum_{i=1}^n x_{i,j}^3 - 3n \sum_{i=1}^n x_{i,j} \sum_{i=1}^n x_{i,j}^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_{i,j} \right)^3}{n(n-1)(n-2) s_j^3} \quad (27)$$

j 月份隨機變量之偏度：

$$g_{i,j} = \frac{g_j - r(j-1)^3 g_{j-1}}{[1 - r(j)^2]^{1.5}} \quad (28)$$

假設 $t_{1,1}, t_{1,2}, \dots, t_{1,m}, t_{2,1}, \dots, t_{i,j}, \dots, t_{n,m}$ 為具 0 均數及 1 標準偏差具常態分佈之獨立隨機數列。表 2 為其中 200 個隨機號碼，可供一般流量推衍之用。

表 2 常態隨機號碼 $t_{i,j}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.523	0.611	-0.359	-0.393	0.084	-0.931	-0.027	0.798	1.672	-1.077
1	-1.536	-0.454	0.071	-2.129	1.525	0.261	2.319	0.972	0.767	-2.849
2	-0.121	0.968	-1.943	0.581	-0.711	-0.060	-0.482	-0.746	-0.747	1.254
3	-0.542	-0.807	0.168	0.839	-0.756	-0.453	-1.912	0.766	-0.890	0.205
4	0.131	-0.859	-1.096	-0.785	0.310	1.314	-0.231	0.029	1.819	-1.602
5	-0.234	0.551	0.743	-0.900	0.435	-2.999	0.212	0.869	-0.716	-0.410
6	-1.010	1.347	0.230	0.009	-1.495	2.145	-1.033	0.729	0.309	0.920
7	0.273	-0.885	-0.016	0.775	-1.740	0.353	-1.519	0.958	-0.448	2.185
8	-0.102	-1.111	-0.585	1.461	-0.307	1.489	-0.196	0.506	-0.662	-1.175
9	0.308	-0.710	0.407	0.066	-0.617	-0.580	0.107	-2.247	1.616	-1.060
10	-1.762	1.382	1.142	-2.056	-0.400	-1.701	-0.914	-1.000	-0.172	0.903
11	0.306	-0.607	-0.324	1.171	1.016	-1.829	1.723	-0.513	-0.657	2.011
12	-0.465	-1.214	-0.174	0.894	0.245	-0.987	-1.155	0.592	-0.411	-0.109
13	-0.004	-0.029	-0.633	0.004	-0.603	1.104	-0.655	1.191	0.938	-0.805
14	0.593	0.252	-0.541	0.318	1.268	1.972	0.875	-1.030	-1.175	0.445
15	0.233	0.430	-0.331	-1.272	-0.289	-0.060	-0.754	0.789	0.546	0.687
16	0.571	-0.215	-1.090	0.610	-0.810	-0.364	-1.282	0.010	0.586	0.926
17	0.370	0.976	1.017	1.106	0.441	-2.376	0.793	0.016	-0.704	0.146
18	-0.009	-1.285	-0.346	-0.323	0.609	-0.373	0.078	-1.034	0.153	0.997
19	0.416	-0.131	0.668	0.662	-1.835	1.646	0.197	0.131	0.783	0.076

常態分佈之隨機數列 $t_{i,j}$ 及具皮爾遜第三類分佈 (或伽瑪分佈) 之隨機數列 $t_{i,r,j}$ 之關係, 可表示如⁽⁶⁾:

$$t_{i,j} = \frac{6}{g_{i,j}} \left[\left(\frac{g_{i,j} t_{i,r,j}}{2} + 1 \right)^{1/3} - 1 \right] + \frac{g_{i,j}}{6} \quad (29)$$

故, 具伽瑪分佈之隨機號碼 $t_{i,r,j}$ 可由上式加以改寫為:

$$t_{i,r,j} = \frac{2}{g_{i,j}} \left[\left(1 + \frac{g_{i,j} t_{i,j}}{6} - \frac{g_{i,j}^3}{36} \right)^3 - 1 \right] \quad (30)$$

上列諸月流量之統計參數求得後, 可先假定 i 固定, j 由 1 增至 m , 即先推估某一年份 1 至 12 月之流量, 再推求 $i+1$ 年份之 1 至 12 月, 除此類推, 週而復始。在此宜說明者為第一年 1 月 $q_{1,1}$ 之推衍, 吾人可假定其先前流量 $q_{0,m} = \bar{x}_m$, 則具伽瑪分佈複月份型馬可夫流量推衍模式可由下列一連串公式推求之。

$$q_{1,1} = \bar{x}_1 + \frac{r(1)s_1}{s_m} (q_{0,m} - \bar{x}_m) + t_{1,r,1} s_1 \sqrt{1-r(1)^2}$$

$$q_{1,2} = \bar{x}_2 + \frac{r(2)s_2}{s_1} (q_{1,1} - \bar{x}_1) + t_{1,r,2} s_2 \sqrt{1-r(2)^2}$$

其一般通式為:

$$q_{1,j} = \bar{x}_j + \frac{r(j)s_j}{s_{j-1}} (q_{1,j-1} - \bar{x}_{j-1}) + t_{1,r,j} s_j \sqrt{1-r(j)^2} \quad (31)$$

上式中, $t_{1,r,j}$ 為具伽瑪分佈之隨機變量, 其可依式(30), 由常態隨機 $t_{i,j}$ 求出。隨機號碼 $t_{i,j}$, 可直接由電子計算機隨機號碼產生器 (Random-number generator) 取出代入, 或直接或由表 2 獲得。

3. 電子計算機之運用

複月份型具伽瑪分佈一階馬可夫模式之理論已如前節闡述, 唯實際應用集水區水文站流量記錄以推衍

合成流量資料, 其間演算程序十分繁瑣, 非賴運用電子計算機不為功。

本研究利用國立臺灣大學電子計算機中心 CDC 3150 電子計算機。首先將測站相鄰兩個月份之河川流量當其輸入, 由電子計算機依式(24)、(25)、(27)算出各月份流量之樣本均數 \bar{x}_j 、變方 s_j^2 及其偏度係數 g , 再求算該月與其前一月份流量線性迴歸關係中之相關係數 $r(j)$, 如式(26)所示。吾人假定河川月流量之最佳適合屬伽瑪分佈, 此理論有多人證實^(10,11,19)。由式(28)再將其月流量之偏度係數轉化為隨機變量之偏度, 然後再由表 2 中任意取出一常態隨機號碼 $t_{i,j}$, 依式(30)轉換為適合伽瑪分佈之隨機號碼 $t_{i,r,j}$, 最後代入式(31)之通式, 依序推衍無限年數 1 至 12 月之合成月流量資料。

為便於應用參考, 茲將馬可夫模造歷程之電子計算機解法, 其符號註解、計算流程圖及電子計算機程式附於附錄 1、2、3。

4. 結果分析

由電子計算機模擬所推衍集水區合成月流量資料可模造 50 年、100 年或任何期限之漫長記錄, 甚至可模造出無窮多組具相同年數之記錄, 此完全視應用需要而定。

茲將由電子計算機求出之本省七大流域重要水文站根據各單一測站歷史實測記錄所顯示之水文統計特性示之如表 3—A、B、C、D、E、F、G。由表 3 可知, 本省集水區月流量變化有時甚大, 尤其在每年七、八、九月颱風侵襲時期呈現與平常期間完全迥異且怪異奇特之現象。此理由可由某些測站在颱風季節或鋒面兩時期流量之變異係數 (Coefficient of variation) 大於 1 顯見。上七水文站之流量變異係數 C、

表 3 集水區水文統計特性
A. 0305 淡水河石門 (1)

欄數	月份 統計參數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		月											
1	均 數 \bar{x}_j	14.93	21.18	20.19	24.66	31.42	61.15	59.84	71.34	105.15	49.96	31.80	24.89
2	變 方 s_j^2	23.33	102.20	110.08	307.15	395.59	1377.18	915.30	5576.96	8476.13	743.32	416.02	175.96
3	標 準 偏 差 s_j	4.82	10.11	10.49	17.53	19.89	37.18	30.25	23.62	92.07	27.36	20.40	13.26
4	變異係數 $c_v = \frac{s_j}{\bar{x}_j}$	0.3228	0.4773	0.5196	0.7109	0.6330	0.6080	0.5055	0.3311	0.8756	0.5476	0.6394	0.5327
5	j 月之相關係數 r_j	-0.2628	0.3933	0.4701	0.6396	0.6980	0.3633	0.1497	0.0439	0.0042	-0.1008	0.4252	-0.0230
6	j 月之偏度係數 g_j	0.8113	0.7463	0.8650	1.8097	0.8362	1.3343	0.6316	3.3024	2.1097	1.3447	1.4820	1.1898
7	逢機變量之偏度 $g_{t,j}$	0.9032	0.9792	1.1920	3.7864	0.9877	1.2982	0.5873	3.3098	2.1095	1.3655	2.0005	1.0707

B. 1036 蘭陽溪蘭陽大橋

欄數	月份 統計參數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		月											
1	均數 \bar{x}_j	46.43	40.74	31.61	25.55	39.13	63.44	51.17	61.51	143.16	180.92	113.84	75.82
2	變方 s_j^2	763.32	554.71	234.15	244.04	1216.93	1140.29	1756.45	2483.27	7735.37	9706.39	4089.37	2258.34
3	標準偏差 s_j	27.63	23.55	15.30	15.62	34.88	33.77	41.91	49.83	87.95	98.52	63.95	47.52
4	變異係數 $c_v = \frac{s_j}{\bar{x}_j}$	0.5951	0.5781	0.4840	0.6114	0.8914	0.5323	0.8190	0.8101	0.6143	0.5446	0.5618	0.6267
5	j月之相關係數 r_j	0.0535	0.6736	0.6692	0.6059	0.4258	0.2155	-0.0563	0.1084	0.1006	0.2447	0.3653	0.7137
6	j月之偏度係數 g_j	1.5253	0.3383	0.7106	2.2654	2.2176	0.8429	2.0726	2.4729	0.8034	0.1871	1.1741	1.3740
7	逐機變量之偏度 $g_{i,j}$	1.0302	0.8375	1.4798	4.0768	2.3134	0.7214	2.0740	2.5176	0.8126	0.2044	1.4521	3.8313

C. 2706 烏溪柑仔林

欄數	月份 統計參數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		月											
1	均數 \bar{x}_j	12.95	14.23	20.09	19.47	40.41	142.48	65.39	103.65	114.77	35.71	21.53	15.34
2	變方 s_j^2	10.37	41.35	162.90	129.55	660.48	15156.31	574.89	7363.09	13287.20	142.98	20.32	13.98
3	標準偏差 s_j	3.22	6.43	12.76	11.38	25.70	123.11	23.98	85.81	115.27	11.96	4.51	3.73
4	變異係數 $c_v = \frac{s_j}{\bar{x}_j}$	0.2486	0.4519	0.6351	0.5845	0.6360	0.8641	0.3667	0.8279	1.0044	0.3349	0.2095	0.1956
5	j月之相關係數 r_j	0.4298	0.2279	0.5426	0.8600	0.4622	0.2281	0.4417	0.6194	0.2663	0.8939	0.9286	0.8951
6	j月之偏度係數 g_j	0.9691	1.8756	1.5873	1.3204	0.7586	1.7277	0.2222	1.2819	1.6781	0.8350	0.2794	1.2758
7	逐機變量之偏度 $g_{i,j}$	0.0733	1.9485	2.6408	0.0284	-0.1165	1.7906	0.2793	2.6098	1.5336	8.9140	-6.2028	11.8773

D. 2921 濁水溪集集

欄數	月份 統計參數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		月											
1	均數 \bar{x}_j	49.44	42.63	54.29	81.35	127.81	272.75	212.61	227.25	260.22	112.28	75.90	58.70
2	變方 s_j^2	294.65	117.03	847.79	4196.47	12940.46	49048.45	6416.54	13748.71	38664.62	2743.86	1267.15	186.57
3	標準偏差 s_j	17.17	10.82	29.12	64.78	113.76	221.47	80.10	117.25	196.63	52.38	35.60	13.66
4	變異係數 $c_v = \frac{s_j}{\bar{x}_j}$	0.3473	0.2538	0.5364	0.7963	0.8901	0.8120	0.3767	0.5160	0.7527	0.4665	0.4690	0.2327
5	j月之相關係數 r_j	0.1564	0.5183	0.5919	0.5208	0.8867	0.6377	0.2284	0.2688	0.2278	0.2977	0.1195	0.3285
6	j月之偏度係數 g_j	2.3096	0.9863	2.4451	2.3750	1.8083	1.0200	-0.0944	0.7001	1.6758	1.7970	3.0434	0.5505
7	逐機變量之偏度 $g_{i,j}$	2.3768	1.5629	4.4068	3.0026	14.9071	-0.5269	-0.3890	0.7847	1.8006	2.0426	3.0613	0.6472

E. 4011 卑南溪臺東大橋

欄數	月份		統計參數											
	1月	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1	均數 \bar{x}_j	28.32	17.77	13.79	26.73	51.26	130.75	170.66	179.94	260.69	146.01	77.41	51.28	
2	變方 s_j^2	217.62	191.53	145.63	777.84	3417.45	23680.34	17094.14	14447.29	48283.89	15545.21	4836.85	3337.57	
3	標準偏差 s_j	14.75	13.84	12.07	27.89	58.46	153.88	130.74	120.20	219.74	124.68	69.55	56.90	
4	變異係數 $c_v = \frac{s_j}{\bar{x}_j}$	0.5208	0.7788	0.8753	1.0434	1.1405	1.1769	0.7661	0.6680	0.8428	0.8539	0.8985	1.1096	
5	j月之相關係數 r_j	0.3323	0.6761	0.9215	0.4693	0.5213	0.7276	0.2269	0.2679	0.2432	0.5157	-0.0155	0.4841	
6	j月之偏度係數 g_j	1.0906	1.9780	2.5424	1.5715	1.5584	2.5170	0.3803	0.7720	1.2736	2.3680	2.4539	4.4406	
7	隨機變量之偏度 $g_{1,j}$	0.6975	4.8456	32.9524	-0.6067	2.2462	7.1120	-0.6378	0.8583	1.3793	3.7359	2.1300	6.6277	

F. 4102 曾文溪照興 (3)

欄數	月份		統計參數											
	1月	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1	均數 \bar{x}_j	2.63	2.59	2.94	3.52	18.41	80.27	55.58	99.06	78.92	14.95	5.63	3.39	
2	變方 s_j^2	1.01	2.02	5.45	8.29	335.86	3749.88	530.01	44447.00	3954.02	39.31	3.52	0.86	
3	標準偏差 s_j	1.00	1.42	2.33	2.88	18.33	61.24	23.02	66.69	62.88	6.27	1.88	0.93	
4	變異係數 $c_v = \frac{s_j}{\bar{x}_j}$	0.3802	0.5488	0.7925	0.8182	0.9957	0.7629	0.4142	0.6732	0.7968	0.4194	0.3339	0.2743	
5	j月之相關係數 r_j	0.2294	0.8844	0.6396	0.8562	0.7066	0.4574	-0.1449	0.2582	0.0620	0.5429	0.7149	0.8868	
6	j月之偏度係數 g_j	1.7544	1.3394	2.1828	2.5154	1.8127	0.7991	0.2627	0.8723	1.6208	0.4470	1.0147	0.9940	
7	隨機變量之偏度 $g_{1,j}$	1.1506	12.9586	2.7658	14.0978	0.6602	0.2270	0.1923	0.9684	1.6151	0.7541	2.7585	6.3188	

G. 5126 高屏溪九曲堂 (2)

欄數	月份		統計參數											
	1月	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1	均數 \bar{x}_j	28.23	22.66	26.39	51.41	183.34	534.00	442.22	621.79	486.44	191.40	88.05	56.62	
2	變方 s_j^2	73.69	106.46	226.87	3535.27	43836.87	170629.92	73842.53	233409.54	63202.13	8216.10	1920.05	1573.67	
3	標準偏差 s_j	8.58	10.32	15.06	59.46	209.37	413.07	271.74	483.12	251.40	90.64	43.82	39.67	
4	變異係數 $c_v = \frac{s_j}{\bar{x}_j}$	0.3039	0.4554	0.5707	0.1566	1.1420	0.7735	0.6145	0.7770	0.5168	0.4736	0.4971	0.7006	
5	j月之相關係數 r_j	0.5926	0.5272	0.7561	0.6202	0.9110	0.3048	0.0963	0.1045	-0.1929	0.1921	-0.2386	0.7152	
6	j月之偏度係數 g_j	1.0236	1.4304	1.6835	2.1171	2.0936	1.1449	0.9333	1.3983	1.2765	1.5652	1.0008	1.8302	
7	隨機變量之偏度 $g_{1,j}$	0.6774	1.9840	5.2593	2.8786	22.6474	-0.5070	0.9135	1.4207	1.3495	1.6657	1.0807	5.4004	

隨月份之變化，如圖 4 所示。一般言之，4~5、7~8 月，各測站流量之 C_v 較大，即河川流量變化較大，水文特性較不穩定；11 月至翌年 2 月， C_v 較小，亦即河川水文變化較小。是故，以一般統計方法推衍水文記錄年數較短且水文特性有時極端不穩定之本省集水區水文時列，有時不易收到預期之良好效果。

為便於檢驗由馬可夫模式推衍出河川月合成流量之可靠性，茲將每一測站求得之模造推衍流量與其實測流量記錄做一比較並繪之於圖 5-A、B、C、D、E、F、G。由圖顯示，由理論推衍合成流量與實測記錄，大小、變化趨勢頗為吻合，亦即應用複月份型、具伽瑪分佈馬可夫模式於本省集水區月流量之推衍，尚屬一可資推廣運用之方式。

茲將淡水河石門 (1) 站利用馬可夫模式推衍所得 100 年月合成流量資料附於表 4，俾供臺北地區水資源規劃之參考，其他流域水文站所推估之 100 年流量，限於篇幅，不予附上。

四、討 論

1. 河川合成流量推衍最大之困難為流域水文站歷水文記錄年數過短或殘缺不全，如本省大部份河川

記錄不過三十年，其中泰半只有十多年且中間或因戰亂、災禍或其他人為原因而輟斷者不乏其例。再者，本省河川水文特性極不穩定，尤其在鋒面雨或颱風季節，河川流量汹涌有如排山倒海，大異常態。由此，其呈現之水文統計特性，有時甚難予以解釋，如月流量資料之標準偏差大於其均數，即其變異係數大於 1。是故，以一般統計參數有時未能精確推估本省河川不穩定、時間相依性等實際特性。

2. 馬可夫模式之基本概念為河川水流以時間言之具持續性，即高流量甚可能緊接高流量，低水流甚易跟隨低水流。故持續水流之特性，以統計參數估量之，甚可能為正相關 (Positively correlated)。由本研究中之實際演算結果知，大部份月與月流量相關係數具 0.5~0.9 之譜，然在夏秋之交颱風季節，有些流域水文測站呈現 0.2~0.3 左右之低相關，甚至有一二極少數情形且有負相關，此亦可解釋本省集水區水文現象之不穩定、奇異特性。

3. 河川水流之機率分佈一般常用者有常態分佈、對數常態分佈及伽瑪分佈。一般實際應用，常態分佈較少。通常年流量、日流量之推估引用對數常態分佈較多，其可由統計擬說試驗證明一般年、日流量之對

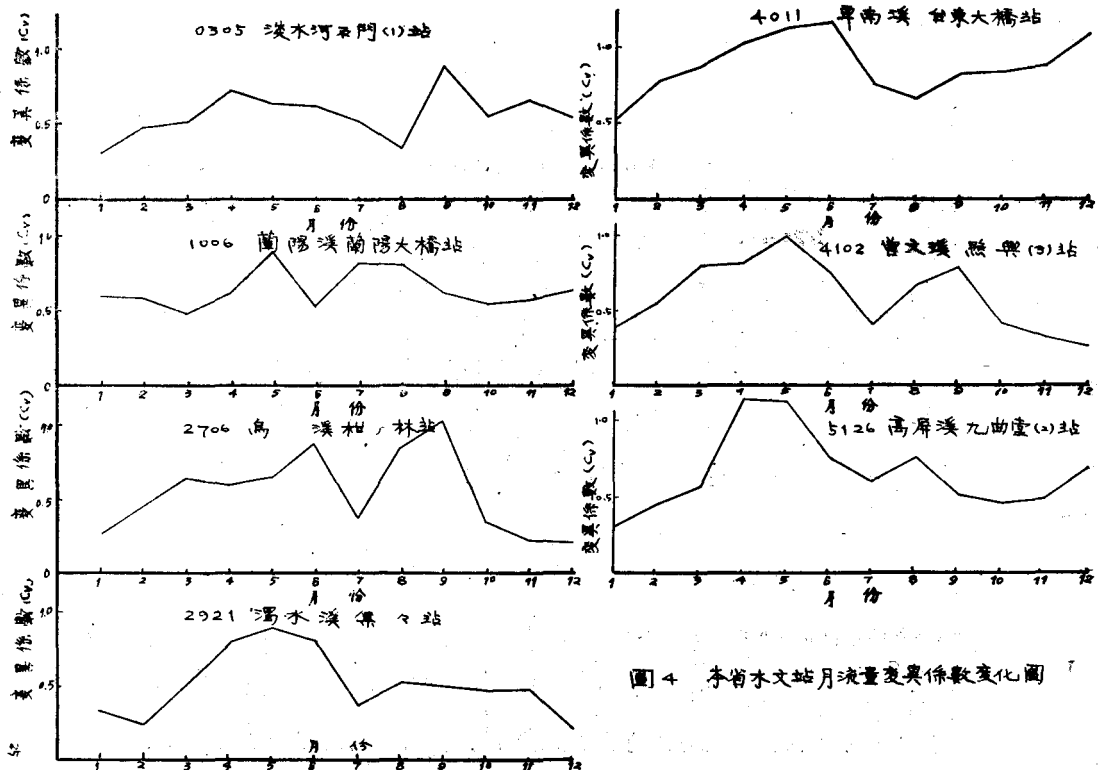
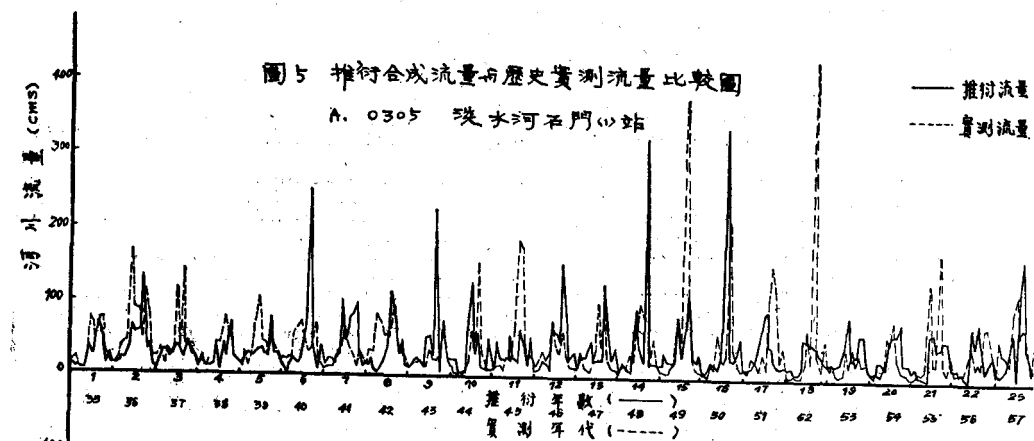


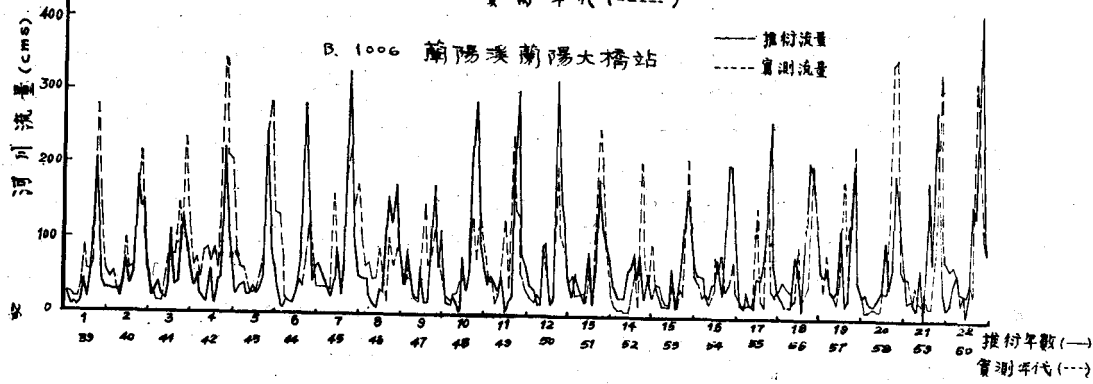
圖 4 本省水文站月流量變異係數變化圖

圖5 推衍合成流量與歷史實測流量比較圖

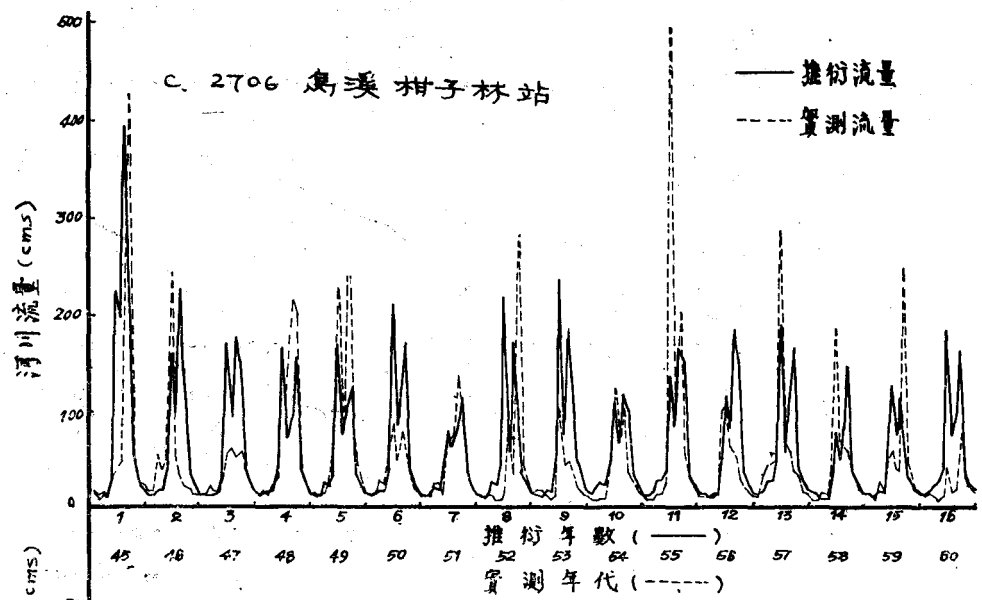
A. 0305 漢水河石門(3)站



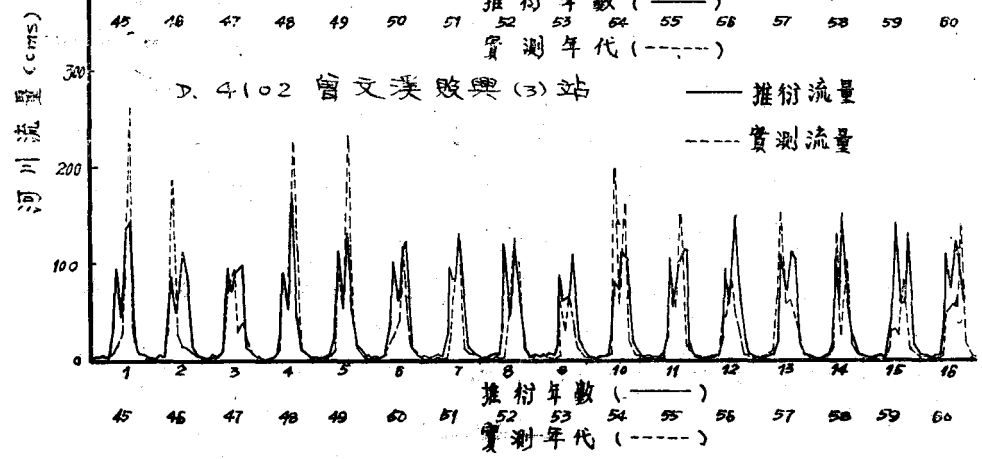
B. 1006 蘭陽溪蘭陽大橋站



C. 2706 烏溪柑子林站



D. 4102 曾文溪敗興(3)站



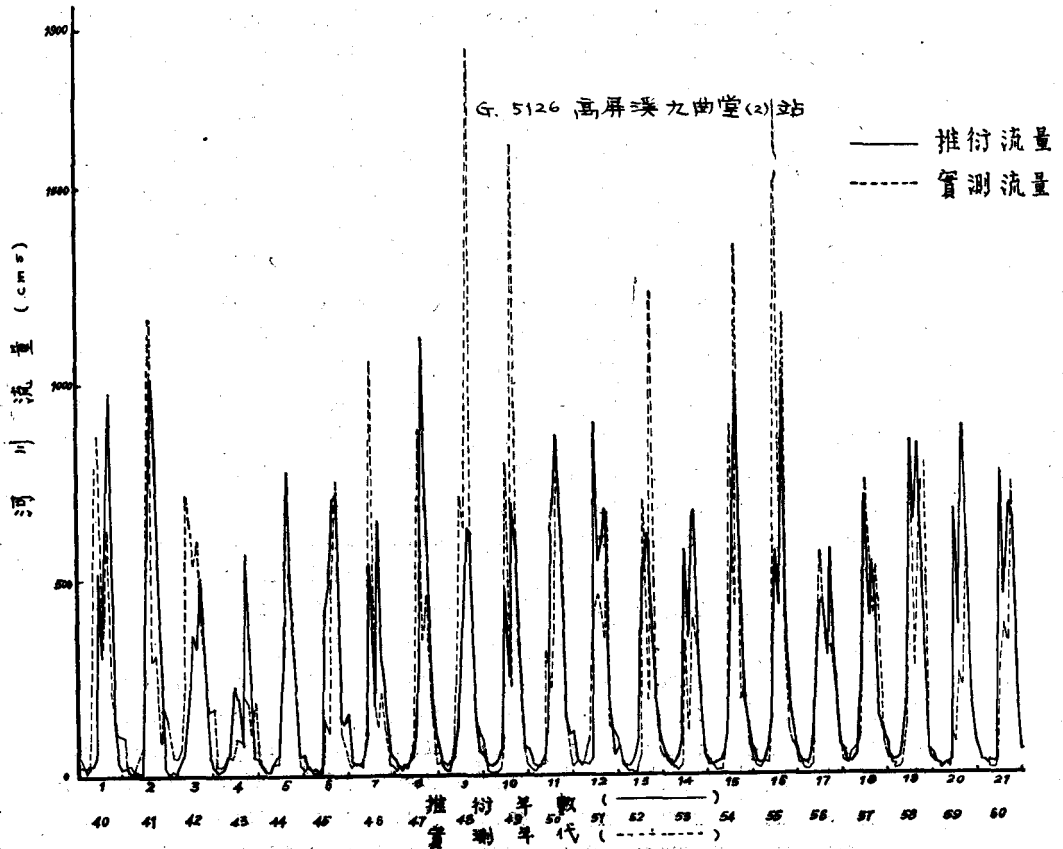
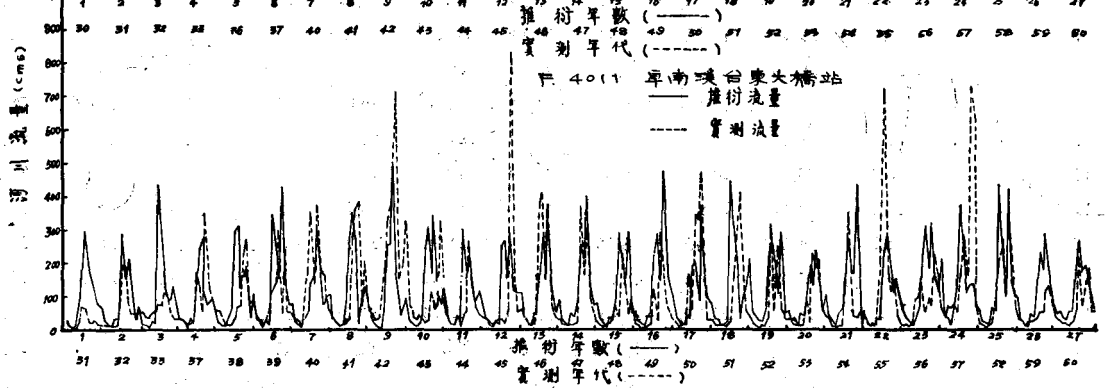
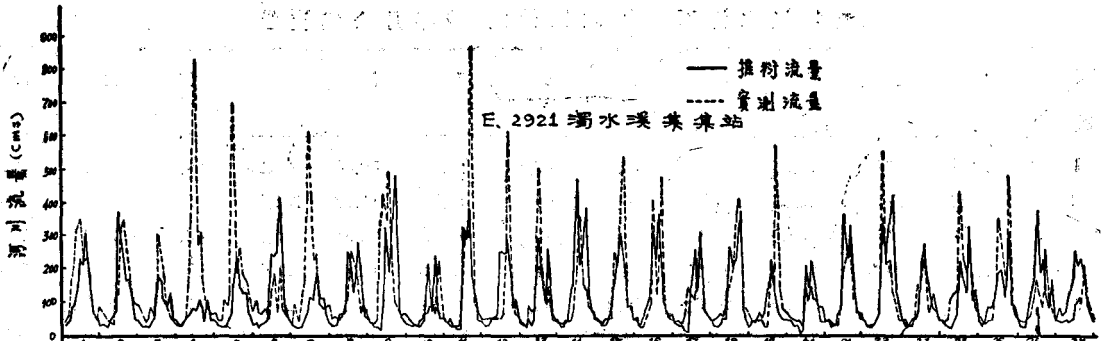


表 4 淡水河石門(1)站推衍之 100 年月合成流量

年 數	月 份											
	1 月	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12.09	7.03	10.51	7.23	17.22	37.41	27.26	50.06	69.58	54.97	15.54	26.86
2	12.31	17.51	22.35	22.84	36.17	69.85	57.73	61.73	131.23	33.36	41.01	13.86
3	10.90	21.70	33.69	31.97	22.59	29.12	99.57	32.66	25.59	45.76	29.11	28.41
4	13.31	28.45	13.65	11.55	14.21	44.61	8.15	42.76	28.05	68.01	35.78	22.33
5	11.86	21.01	30.59	29.01	30.38	36.14	38.84	30.08	28.05	77.85	30.83	31.97
6	12.59	4.93	16.08	23.45	18.95	22.66	52.50	89.35	252.40	41.31	10.86	40.84
7	18.79	22.92	22.17	19.60	34.24	100.11	52.51	79.29	82.80	97.39	33.59	14.43
8	15.69	24.44	10.79	6.63	10.93	23.32	41.04	113.58	95.91	31.64	49.28	18.93
9	11.07	20.70	24.08	20.47	15.15	57.67	54.03	29.62	226.90	7.20	76.06	26.61
10	22.50	21.31	8.47	3.82	1.43	77.77	128.84	48.84	54.33	14.32	10.39	50.23
11	14.12	48.43	28.00	24.31	25.87	57.23	29.14	22.80	63.57	48.01	16.51	51.79
12	9.96	10.45	22.10	19.60	11.33	70.05	60.33	49.77	152.92	72.42	25.41	33.62
13	14.37	28.06	29.00	39.45	48.28	24.73	25.95	25.76	128.97	81.64	26.48	33.98
14	14.28	19.31	10.44	9.40	46.57	92.81	40.46	24.55	321.69	22.91	22.88	17.61
15	11.58	35.38	23.84	21.59	21.57	83.50	29.04	67.59	128.54	28.90	22.09	33.94
16	10.20	0.79	22.21	22.49	11.15	28.55	82.48	338.43	27.91	26.50	37.10	57.96
17	13.76	12.57	18.39	26.41	45.07	68.00	90.00	47.62	46.73	20.40	15.35	16.76
18	14.83	17.64	9.75	9.69	15.93	56.06	13.09	50.32	49.38	45.66	35.76	25.55
19	17.01	24.88	20.15	22.10	36.23	44.43	86.10	29.81	34.19	61.55	61.33	12.86
20	10.09	10.18	28.57	26.57	17.42	43.61	62.37	63.14	62.64	75.27	23.27	21.13
21	12.73	18.52	6.31	5.23	1.55	61.26	63.85	41.30	44.04	56.88	53.41	18.48
22	13.49	13.51	10.56	7.69	3.54	75.00	48.82	79.40	53.02	15.64	25.98	34.81
23	11.15	9.80	12.95	19.05	49.66	68.48	8.93	129.62	165.51	42.37	29.21	10.26
24	17.22	33.24	21.73	26.73	31.93	120.76	44.78	25.60	101.14	56.00	16.46	7.43
25	12.94	13.17	11.38	21.79	30.31	36.79	96.03	37.13	35.76	58.14	40.06	6.55
26	10.66	18.59	16.66	13.99	42.63	16.98	128.77	65.55	257.29	27.22	6.85	7.08
27	10.48	27.67	46.25	46.66	41.96	19.53	41.31	210.19	75.44	139.16	48.85	6.01
28	13.25	20.25	10.90	7.29	12.83	44.85	30.48	224.19	27.73	32.76	38.36	14.38
29	9.59	23.26	20.12	20.19	37.88	96.15	40.89	87.25	78.77	70.88	46.84	36.51
30	16.67	7.87	5.03	1.50	19.60	84.44	33.75	88.65	77.41	45.31	14.94	24.51
31	23.76	34.63	19.54	16.85	55.80	51.50	65.10	30.90	40.93	102.87	40.84	15.25
32	12.52	27.35	13.64	16.57	31.45	35.26	58.33	90.74	28.72	13.46	43.08	25.07
33	8.72	11.23	23.02	75.86	56.80	45.29	83.93	294.00	70.38	28.99	27.39	35.25
34	18.98	24.35	30.37	30.37	27.22	17.78	48.13	27.81	86.15	39.24	13.15	26.44
35	13.79	22.21	8.69	8.83	10.82	39.92	72.78	52.90	126.85	53.31	27.34	28.23
36	17.22	17.89	26.86	24.67	19.17	65.27	102.46	31.27	27.66	31.82	53.07	15.55
37	9.78	15.21	17.78	19.71	22.42	85.86	26.83	33.61	54.52	47.37	12.88	25.03
38	10.14	23.15	21.45	20.36	18.60	59.32	94.15	36.20	64.97	32.03	14.33	18.99
39	10.16	26.34	18.20	23.04	22.90	8.47	68.55	97.30	36.89	28.52	19.74	33.85
40	22.32	26.37	9.80	23.60	42.27	61.49	66.60	26.99	130.94	78.19	31.19	31.87
41	14.62	36.50	20.72	18.13	28.37	67.00	19.95	21.11	57.21	32.55	15.88	37.88
42	15.37	15.28	29.47	27.98	22.28	63.10	76.14	26.59	32.08	53.07	26.54	17.50

年 数	月份											
	1 月	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
43	21.35	9.63	40.45	43.18	69.37	63.81	15.27	20.05	30.55	81.12	91.57	20.96
44	12.71	4.18	7.18	35.06	37.02	175.73	57.44	23.91	61.50	50.85	16.71	8.76
45	13.38	19.40	11.13	42.15	30.28	35.56	81.77	29.62	24.38	69.83	33.88	25.10
46	18.25	32.46	18.49	24.52	29.66	85.85	82.92	111.46	120.36	12.97	4.88	17.21
47	17.12	34.23	17.73	24.38	29.06	52.91	28.58	43.29	291.74	60.93	21.76	13.41
48	24.82	22.26	21.77	19.46	17.06	115.94	58.66	27.80	51.86	74.19	23.39	30.21
49	17.09	15.98	17.24	23.76	16.39	0	90.98	53.48	20.45	37.54	41.05	62.07
50	9.90	7.79	21.14	65.15	59.76	52.28	69.49	100.24	169.58	45.85	45.76	23.34
51	14.24	14.92	5.98	3.39	5.64	40.77	47.74	25.07	97.87	41.87	29.98	7.10
52	15.67	16.53	16.12	19.81	28.57	72.44	69.57	42.17	111.06	61.16	24.40	37.01
53	11.08	10.00	18.24	37.23	28.87	25.44	33.17	163.11	43.77	24.03	17.77	26.08
54	16.28	18.99	27.49	25.28	27.91	41.24	56.60	23.51	89.07	24.18	23.37	25.56
55	14.17	14.41	18.90	32.63	31.32	48.69	37.98	26.72	55.95	25.25	39.79	18.44
56	17.53	18.60	5.81	8.65	29.45	32.15	29.27	38.46	150.05	92.49	40.88	5.42
57	20.45	33.36	24.40	25.72	16.26	65.67	93.62	36.16	136.78	45.23	62.30	14.42
58	11.25	19.55	21.69	18.86	7.32	28.68	35.95	28.50	181.50	48.15	18.88	42.53
59	13.01	11.91	18.03	22.06	9.23	15.46	59.22	39.31	48.89	89.10	25.83	61.33
60	15.90	37.16	21.84	18.55	6.49	12.53	87.06	284.97	73.57	36.86	9.32	18.61
61	23.58	26.59	51.90	51.61	32.16	47.62	61.64	26.54	21.13	42.03	25.52	13.15
62	24.12	18.94	12.46	20.22	16.70	14.34	76.36	46.22	91.55	68.00	52.10	14.25
63	18.07	22.54	27.93	34.33	51.92	85.70	7.56	20.73	47.03	62.47	56.66	11.71
64	18.20	22.48	19.20	16.48	24.47	124.27	88.90	30.43	33.27	113.01	38.50	26.55
65	12.38	12.40	33.08	32.17	27.18	39.39	84.43	28.93	124.08	59.97	21.78	24.70
66	18.16	14.49	2.35	17.72	26.50	16.43	39.98	102.63	406.28	13.66	4.77	36.19
67	26.25	28.08	16.00	17.95	37.32	93.64	65.25	113.99	82.37	33.51	9.22	21.46
68	12.02	18.49	15.21	12.22	23.14	45.27	66.19	25.99	100.78	34.06	21.51	30.95
69	15.31	25.54	23.96	23.08	33.90	77.67	46.22	108.61	36.22	29.16	29.63	43.88
70	10.81	8.24	6.89	26.12	22.93	19.66	51.02	51.52	112.47	38.87	42.97	9.96
71	13.67	15.69	16.36	11.72	21.22	20.52	75.42	53.04	75.40	32.58	27.78	40.05
72	12.87	16.52	11.42	8.30	11.96	14.35	84.16	34.69	137.45	34.38	8.61	30.96
73	18.48	16.58	9.83	8.07	27.88	114.41	65.39	23.06	204.16	68.02	32.19	26.77
74	9.61	21.27	30.24	28.73	42.33	64.09	109.13	32.85	37.53	54.27	35.21	8.64
75	8.39	11.75	9.20	6.10	30.63	61.60	40.33	146.58	58.84	29.25	27.40	31.11
76	8.16	7.15	13.93	12.13	13.57	96.72	0	318.49	106.55	95.05	33.95	7.39
77	8.18	6.81	23.17	65.50	60.70	63.34	2.58	25.36	286.54	37.99	94.39	16.19
78	7.99	12.03	15.86	12.91	4.17	29.65	56.26	26.19	301.84	17.04	8.67	35.67
79	11.26	7.64	19.67	19.06	27.45	81.20	90.73	30.64	148.92	43.49	41.61	32.78
80	19.16	28.03	10.11	6.77	8.64	59.77	95.99	30.26	151.72	42.93	24.41	2.16
81	14.83	38.86	34.70	33.06	25.52	133.99	46.27	54.08	50.20	31.97	61.45	20.08
82	11.60	13.59	24.39	22.01	35.11	77.47	39.68	45.48	151.06	22.58	4.76	42.47
83	15.18	9.25	9.39	17.77	65.37	49.08	27.50	99.46	364.53	33.71	12.70	28.87
84	18.64	32.24	25.11	36.07	39.22	44.74	16.36	32.77	45.82	49.17	23.03	12.58

年數	月份											
	1月	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
85	15.51	19.2	20.90	17.35	27.70	38.36	54.04	73.87	94.69	60.37	35.89	22.42
86	16.21	26.71	17.60	27.46	21.90	25.49	69.65	161.59	34.09	25.63	10.85	44.85
87	11.78	8.45	11.97	11.89	25.26	43.40	86.26	29.12	67.61	37.16	23.41	6.23
88	15.01	11.78	21.21	21.60	26.50	34.63	66.13	131.97	56.86	41.45	16.49	16.75
89	12.84	10.03	23.63	21.62	36.80	46.38	4.88	67.62	158.18	26.68	9.83	23.03
90	18.12	38.60	27.50	22.95	46.91	98.68	61.63	56.25	24.68	63.71	54.52	18.48
91	17.50	22.57	36.67	35.18	28.53	62.49	70.42	27.31	19.25	39.68	16.07	18.22
92	19.51	25.72	16.10	32.78	31.87	33.26	67.04	76.54	18.97	29.59	23.83	21.97
93	12.36	31.90	10.64	60.54	62.61	139.52	50.44	24.60	18.73	27.79	43.07	55.97
94	13.98	15.90	3.89	0.48	38.93	58.26	141.41	38.67	18.44	41.34	27.02	12.13
95	8.94	13.10	15.42	12.45	50.12	39.08	36.24	97.47	37.93	23.39	33.33	23.55
96	15.14	27.89	31.78	29.95	45.05	64.17	85.06	88.64	173.82	55.97	15.40	12.58
97	12.13	23.15	32.27	30.45	45.85	64.11	57.77	26.12	86.14	104.18	58.31	14.14
98	10.80	37.70	21.23	22.25	21.64	29.55	108.47	41.30	41.17	36.90	41.33	10.80
99	16.88	26.99	16.08	15.57	33.96	29.50	0	139.19	92.68	18.40	11.29	36.39
100	27.61	21.70	11.46	19.66	52.56	71.78	36.44	61.31	161.57	70.46	35.15	37.36

數常態分佈具最佳適合⁽²⁷⁾。月流量之合成，常用珈瑪分佈，因其考慮實際月流量具高度偏度(Skewed)趨勢。唯珈瑪分佈之馬可夫模式中，如其偏度太大，有時求出轉化隨機變量之偏度亦大，故具珈瑪分佈之隨機號碼 $t_{i,r,j}$ 亦大。在馬可夫模式 $q_i = d_i + e_i$ 中，如 $t_{i,r,j}$ 之絕對值過大，有時可能得到負流量之推估。因河川不可能有負流量，在此情形只能假定其推衍流量為零。再如，相關係數太小，則推衍流量 q_i 由隨機分子 e_i 控制，其所構造出之流量，其誤差將大矣。

4. 流量推衍所採用之時間間距視實際應用需要而定。洪水推估可能用日流量；水庫營運，用月流量較多；一般估算，常用年流量。年流量推衍與日流量者相似。年流量推衍程序較簡便，然因其間時間稽延(Time lag)較長，其相關係數不高。日流量推衍，可得較高相關係數，所其推估程序頗繁，利用電子計算機操作，仍須費大量時間。本研究利用河川月流量做推衍分析，一者可檢定河川流量隨月份是否具週期性變化。如是，可利用諧和分析(Harmonic analysis)日後繼續探討其特性。再者，推衍出之合成月流量，可供本省水資源規劃之參考。

5. 由於河川實際水文記錄年數不足，故不易由統計樣本某些參數精確推估漫長水文時列之特性。不可諱言者，由馬可夫模式所推衍出之水文資料與其實際

歷史記錄或未來發生者不可能完全相同。然其結果，在某種統計可靠性內可被接受。此為方略水文學(Operational hydrology)研究之目的。此亦說明此種純由統計方式推衍之合成流量，並非為截然確定實際水流之因果模式(Causal models)，而只是最大或然發生(Most likely to occur)之序率模式。

6. 馬可夫推衍歷程唯一之缺點為其具較短之記憶長度(Memory length)，其合成流量推衍之好壞完全決定於水文資料統計參數分佈及其年數是否足夠而定。近年來，已有一二水文學家倡議非馬可夫模式(Non-Markov models)之嘗試，因非馬可夫模式具無限之記憶長度，不受水文資料記錄年數不足而影響推衍之結果。目前該類非馬可夫模式有第二類過濾估算部份雜波歷程(Filtering type 2 approximation of fractional noise process)⁽¹²⁾、折線歷程模式(Broken-line process model)⁽¹³⁾及自迴歸積分移動平均模式(Autoregressive integrated, moving-average model)⁽⁸⁾。唯此等理論方具雛形，有待日後繼續研究發展。

五、結 論

1. 依序推衍法仍利用過去觀測之水文記錄，分為前因性及機率性兩種分量向後推衍合成，以合理預測將來最可能發生之水文情況。

2. 序率河川流量模擬之基本假定在於假設河川水流可由定常性時間序列構成。上時間序列之定義為一串已知隨時間變化且按其發生時序先後排列之隨機歷程。分析一羣歷史性水文歷程，而以某些統計參數表示，即稱為時列分析 (Time-series analysis)。一種可以圓滿模擬由統計參數表示之實際水文時列歷程，謂之序率模式。此序率模式確定後，將可由求出之有關統計量及機率分佈，模擬推衍出具任何年限之流量時列。

3. 複月份型、具伽瑪分佈一階馬可夫鏈模式 (ΓIMC model) 適合於本省集水區月流量之推衍，其不失為一合理可用之預測方法。合成流量分析已成為水資源規劃重要工具之一，尤其配合電子計算機之運用，其可令規劃區域水文系統特性推估及預測更臻精確完善。

4. 集水區之水文頻率分析由於依序推衍法延伸水文記錄，所求之頻率可信度將大為提高。由依序推衍法演導之水文資料，可供水資源規劃最佳設計 (Optimal design) 可靠之依據。假設洪水 (Hypothetical flood) 之頻率分析對集水區系統水文現象將提供更精確、有效之研究途徑。

六、誌 謝

本研究之完成得行政院國家科學委員會之補助。臺灣大學電子計算機中心給予利用 CDC 3150 電子計算機，臺灣大學農工系曹以松教授准予使用 WANG's model 600 程式計算機，易任教授給予電子計算機時間。甚多計算、圖表煩請臺灣大學農工研究所陳明星、李鴻基，農工系陳獻、鄭隆生、徐年盛、簡立仲及蕭怡等諸多之協助。謹此一併致最大之謝意。

七、參考文獻

1. Beard, Leo R.: "Simulation of Daily Streamflows," International Hydrology Symposium, Fort Collins, Colorado, September, 1967.
2. Beard, Leo R.: "Estimation Monthly Streamflows with a Region," Journal of Hydraulics Division, Proceedings ASCE, Vol. 96, No. HY 1, January 1970.
3. Box, G. E. P. and Jenkins, G. M.: "Time Series Analysis Forecasting and Control," Holden-Day, 1970.
4. Chiu, Chao-lin: "Stochastic Methods in

Hydraulics and Hydrology of Streamflow," Geophysical Surveys 1, Dordrecht, Holland, 1972.

5. Chow Ven Te: "Handbook of Applied Hydrology," Section 8, 1964.
6. Chow Ven Te and S. Ramaseshan: "Sequential Generation of Rainfall and Runoff Data," Journal of Hydraulics Division, Proceedings ASCE, Vol. 91, No. HY 4, July, 1965.
7. Chow Ven Te, ed.: "Advances in Hydroscience," Vol. 5, Academic Press, New York, 1969.
8. Fiering, Myron B. and Jackson, Barbara B.: "Synthetic Streamflows," American Geophysical Union, Water Resources Monograph 1, 1971.
9. Hoshi, Kiyoshi and Yamaoka, Isao: "A Simulation Technique on Monthly Runoff by Use of Precipitation Time Series at Multistations," International Hydrology Symposium, Fort Collins, Colorado, September, 1972.
10. Klemes V. and Boruvka, L.: "Simulation of Gamma-Distributed First-Order Markov Chain," Water Resources Research 10 (1), February, 1974.
11. Matalas, N. C.: "Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology," Water Resources Research, Vol. 3, No. 4, 1967.
12. Matalas, N. C. and Wallis, J. R.: "Statistical Properties of Multivariate Fractional Noise Processes," Water Resources Research Vol. 7, No. 6, 1971.
13. Mejia, J. M., I. Radriguez-Iturbe and D. R. Dawey: "Streamflow Simulation, 2. The Broken Line Process as a Potential Model for Hydrologic Simulation," Water Resources Research, Vol. 8, No. 4, 1972.
14. Moore, Danald O.: "Synthesizing Daily Discharge from Rainfall Records," Journal of Hydraulics Division, Proceedings ASCE, Vol. 94, No. HY 5, September 1968.
15. Payne Kip, W. R. Neuman and K. D. Kerri: "Daily Streamflow Simulation," Journal of Hydraulics Division, Proceedings

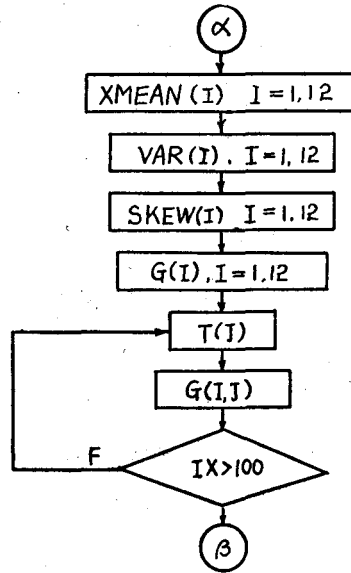
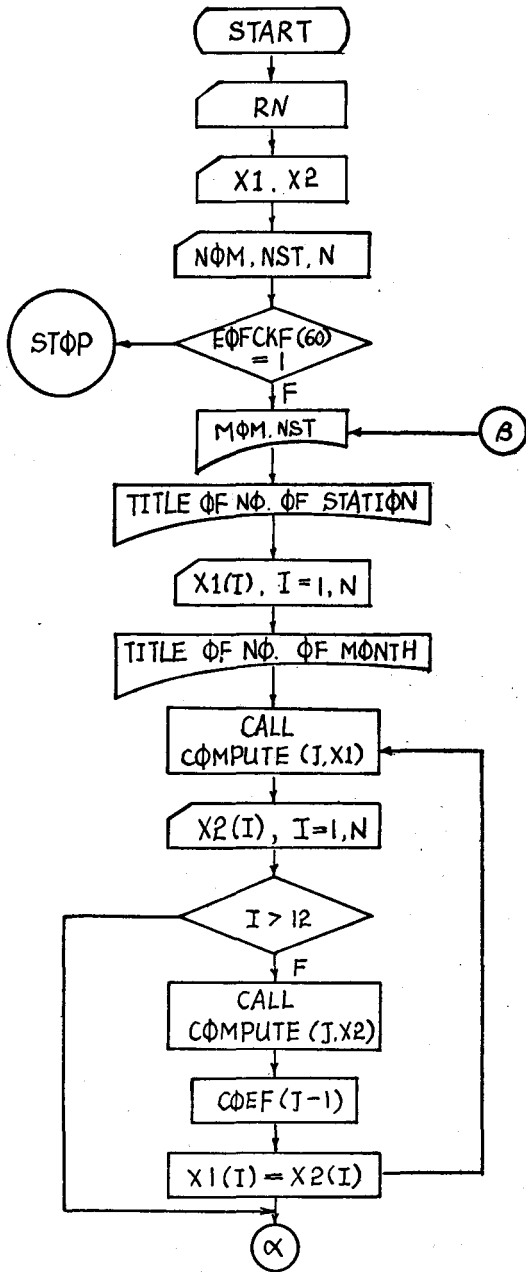
- ASCE, Vol. 95, No. HY 4, July 1969.
16. Quimpo, Rafael G.: "On the Use of Short-Term Data from Streamflow Synthesis," International Hydrology Symposium, Fort Collins, Colorado, September, 1972.
 17. Viessman, Warren, Terrence E. Harbaugh and John W. Knapp: "Introduction to Hydrology," Intext Educational Publishers, College Division, New York, 1972.
 18. Yevjevich, Vujica: "Fluctuations of Wet and Dry Years, Part II Analysis by Serial Correlation," Hydrology Paper No. 4, Colorado State University, June, 1964.
 19. Yevjevich, Vujica: "Probability and Statistics in Hydrology," Water Resources Publications, Colorado State University, 1971.
 20. Yevjevich, Vujica: "Stochastic Processes in Hydrology," Water Resources Publications, Colorado State University, 1971.
 21. Yevjevich, Vujica: "Stochasticity in Geophysical and Hydrological Time Series," Nordic Hydrology, II, Munksgaard, Copenhagen, Denmark, 1971.
 22. 經濟部水資會：「臺灣水文年報」，民國 61, 62 年。
 23. 經濟部水資會：「達見水庫計劃多目標運用研究」工作報告，民國 60 年 11 月。
 24. 吳建民：「流量時列之逐次推估法」，臺灣大學土木工程第 10 卷第 2 期，民國 56 年。
 25. 周文德：「推計水文學——一個新穎的研究課題」，水利第 13 期，民國 60 年 11 月。
 26. 羅建國：「降雨歷程之自相關與隨機推估之研究」，臺灣水利第 22 卷第 1 期，民國 63 年 3 月。
 27. 陳明星：「淡水河流域上游合成流量底率模式之研究」，碩士論文，臺灣大學農工研究所，民國 63 年 6 月。

附錄 1 電子計算機程式符號註解

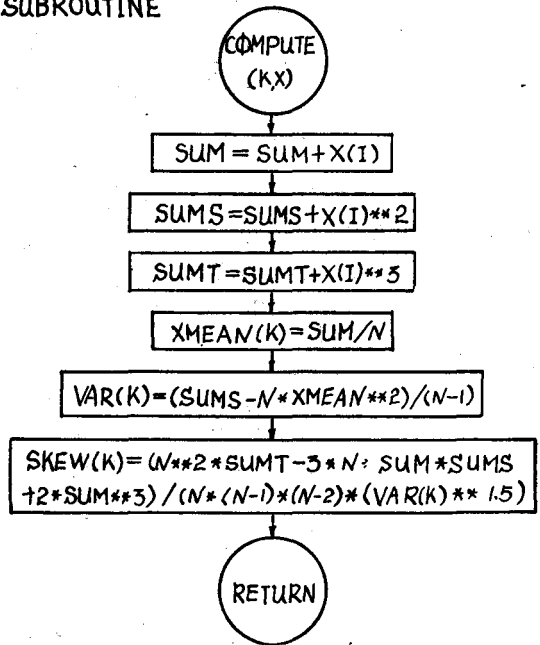
NOTATIONS IN COMPUTER PROGRAMMING

- COEF(J): Coefficient of correlation of monthly river discharges between month $j-1$ and j .
- G(J): Skewness of random variate of month j .
- N: Number of years of records.
- NOM: Number of river basin.
- NST: Number of gaging station.
- Q(I, J): Synthetic streamflows generated by Markov model.
- RN: Random numbers distributed with zero mean and unit variance.
- SKEW: Coefficient of skewness of hydrologic data.
- SUM: Sum of monthly river discharges.
- SUMS: Sum of square of monthly river discharges.
- SUMT: Sum of cubic of monthly river discharges.
- T(J): Transformed random sampling deviate of month j .
- VAR: Variance of hydrologic data.
- XJ: Hydrologic data of month j .
- XMEAN: Sample mean of hydrologic data.

附錄 2 電子計算機流程圖



SUBROUTINE



附錄 3 馬可夫模式之電子計算機程式

```

PROGRAM MARKOV
COMMON XMEAN (12), VAR (12), SKEW (12), COEF (12), G (12), Q (12), N, T (12)
COMMON/DATA/RN (200)
DIMENSION X1 (27), X2 (27)
READ (60, 65) (RN (I), I=1, 200)
65 FORMAT (10F8.3)
   IY=0
   IZ=0
99 READ (60, 1) NOM, NST, N
  1 FORMAT (2A2, I2)
   IF (EOFCKF (60). EQ.1) STOP
   IX=1
   IY=IY+1
   WRITE (61, 7) NOM, NST, IY
  7 FORMAT (1H1, 39X, 27 HNUMBER OF GAGING STATION, 6X, 2A2, 37X, 14HPAGE,
  1 I4)
   READ (60, 2) (X1(I), I=1, N)
   J=1
   WRITE (61, 17)
  17 FORMAT (1H0, 16X, 118H JANUARY FEBRUARY MARCH APRIL MAY JUNE
  JULY AUGUST SEPTEMBER OCTOBER NOVEMBER DECEMBER)
   CALL COMPUTE (J, X1)
200 J=J+1
   READ (60, 2) X2(I), I=1, N)
  2 FORMAT (10F8.2)
   IF (J. GT. 12) GO TO 300
   CALL COMPUTE (J, X2)
   SUM=0.
   DO 40 I=1, N
40 SUM=SUM+X1(I)*X2(I)
   COEF (J-1)=(SUM-N*XMEAN(J)*XMEAN(J-1))/(N-1)*(VAR(J)*VAR(J-1)*0.5)
   DO 50 I=1, N
50 X1 (I)=X2(I)
   GOTO 200
300 SUM=0.
   WRITE (61, 27) (XMEAN(I), I=2, 12), XMEAN(1)
  27 FORMAT (1H, 2X, 12HSAMPLE MEAN, 12F 10.2)
   DO 60 I=1, N
60 SUM=SUM+X1(I)*X2(I)
   WRITE (61, 37) VAR(I), I=2, 12), VAR(1)

```

```

37 FORMAT (1H, 2X, 12HVARIANCE, 12F10.2)
   COEF(12)=(SUM-N*XMEAN(12)*XMEAN(1))/((N-1)*(VAR(12)*VAR(1))**.5)
   WRITE(61, 47) (SKEW(I), I=2, 12), SKEW(1)
47 FORMAT(1H, 2X, 12HSKEWNESS, 12F10.4)
   DO 70 KK=2, 11
70 G(KK)=(SKEW(KK+1)-SKEW(KK)*COEF(KK-1)**3)/(1-COEF(KK)**2)**1.5
   WRITE(61, 57) (COEF (I), I=1, 12)
57 FORMAT (1H, 2X, 12HCORRELATION, 12F10.4)
   G(1)=SKEW(2)-SKEW(1)*COEF(12)**3)/(1-COEF(1)**2)**1.5
   G(12)=(SKEW(1)-SKEW(12)*COEF(11)**3)/(1-COEF(12)**2)**1.5
   WRITE(61, 91)(G(I), I=1,12)
91 FORMAT(1H, 2X, 4HG(J), 8X, 12F10.4//)
   IK=1
97 IZ=IZ+1
   IF(IZ.GT.12) IZ=1
   T(IZ)=2/G(1)*(1+G(1)*RN(IK)/6-G(1)**2/36)**3-2/G(1)
   Q(1)=XMEAN(2)+T(IZ)*SQRT(VAR(2)*(1-COEF(1)**2))
   DO 400 JK=2, 11
   IK=IK+1
   IF (IK.GT.200) IK = 1
   IZ=IZ+1
   T(IZ)=2/G(JK)*(1+G(JK)*RN(IK)/6-G(JK)**2/36)**3-2/G(JK)
400 Q(JK)=XMEAN (JK+1)+COEF (JK)*SQRT (VAR (JK+1)/VAR (JK)*(Q (JK-1)
   1 -XMEAN(JK)+T(IZ)*SQRT(VAR(JK+1)*(1-COEF(JK)**2))
   IK=IK+1
   IF(IK.GT.200) IK=1
   IZ=IZ+1
   T(IZ)=2/G(12)*(1+G(12)*RN(IK)/6-G(12)**2/36)**3-2/G(12)
   Q(12)=XMEAN(1)+COEF(12)*SQRT(VAR(1)/VAR(12)*(Q(11)-XMEAN(12))
   1+T(IZ)*SQRT(VAR(1)*(1-COEF(12)**2))
   WRITE(61, 92)(T(I), I=1, 12)
92 FORMAT (1H, 2X, 4HT(J), 8X, 12F10.2)
   WRITE(61, 77) IX. (Q(I), I=1, 12)
77 FORMAT(1H, 2X, 9HYEAR, I2, 1X, 12F10.2//)
   IX=IX+1
   IK=IK+1
   IF(IX.LE.50) GO TO 97
   GO TO 99
   END

```

附錄 3 之副程式

```
SUBROUTINE COMPUTE (K, X).  
COMMON XMEAN(12), VAR(12), SKEW(12), YY(36), N  
DIMENSION X(27)  
SUM=0.  
SUMS=0.  
SUMT=0.  
DO 300 I=1, N  
SUM=SUM+X(I)  
SUMS=SUMS+X(I)**2  
300 SUMT=SUMT+X(I)**3  
XMEAN(K)=SUM/N  
VAR(K)=(SUMS-N*XMEAN(K)**2)/(N-1)  
SKEW(K)=(N**2*SUMT-3*N*SUM*SUMS+2*SUM**3)/(N*(N-1)*(N-2)*VAR  
1(K)**1.5)  
RETURN  
END
```

慶 祝

中國農業工程學會成立廿週年紀念

三協機械工程公司

地址：臺北市涼州街一〇號
電話：五 七 一 六 五 二

慶 祝

中國農業工程學會成立廿週年紀念

和泰企業有限公司

負責人 沈 忠 信

臺北市和平東路二段一一八巷五二弄二六號
電話：七 七 二 二 〇 四