

灌溉壟溝入滲率之研究

Study on Intake Rate of Furrow

林俊男

施嘉昌

臺大農工系研究助理

臺大農工系教授

論 文 摘 要

入滲率為灌溉方法試驗首先必須測定之因子。壟溝灌溉之入滲為二向度之問題，與埤間灌溉截然不同。二向度之入滲除了用數值分析法 (Numerical Analysis) 解二階偏微分方程式得精確度較高之解外，並無分析解存在。因此運用 Zhukovsky 函數及邊界限制條件，試求其代數解。以

$$x = \frac{W-2H}{2} + H \exp\left(\frac{\pi y}{W-2H}\right)$$

劃分為重力水活動區及毛管水活動區。上式中 H 為水深，W 為水面寬，水面為 x 軸，溝形中線為 y 軸。同時以

$$\pm x = \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{y-c}{H\lambda}\right) + \sqrt{H^2\lambda^2 - (y-c)^2}$$

表示重力水濕潤線方程式，c 值需滿足 $y_0 - c = H \exp\left(\frac{c\pi}{W-2H}\right) = H\lambda$ ， y_0 為 y 軸濕潤端之位置。而毛管水濕潤方程式則為 $y^3 + \alpha y^2 + \beta x^2 + \gamma y + \delta = 0$

累積入滲水量 (V_{OBS}) 與重力水濕潤區之土壤水份增加淨量 (V_{CAL}) 成正比。即

$V_{CAL} = m V_{OBS}$ 式中 m 為比值。濕潤端在 y 軸之位置 (y_0) 為時間之級數，於有水頭之情況下為

$$y_0 - H = \omega_1 t^{0.5} + \omega_2 t \quad \text{式中 } \omega_1, \omega_2 \text{ 為係數。以佳里與砂質壤土為試驗土壤，於 } y = 10 - 0.02x^2 \text{ 之壟溝斷面及 10 公分之水頭下，試驗觀測濕潤線及累積水量。並討論驗證以上所列之式。}$$

壹、引 言

近幾年來由於人口之增加，引起人類對於有限天然資源之運用加以注意。尤其是水，更是人類在生活中不可欠缺的。舉凡衣、食、住、行，無一不是與水有直接、間接之關係。因此以此有限的水資源，除了應付種種需求之外，亦得考慮水資源分配後之最大效益。

灌溉是將水資源引入田間，供給植物吸收利用。自有農業以來，灌溉既成爲重要耕作技術。由於近代講求限量水資源之分配，灌溉之技術不再以古老的經驗、概括之方式操作，而隨着科學方法之發展而進步，要求適時、適量及最大效益。將此有限的水資源，作合理的、經濟的運用，配合農作技術，在有限耕作面積上獲得最高之產量，不僅應付目前人口之需求，亦須使將來所增加人口之需求亦無匱乏。

臺灣屬於亞熱帶海洋性氣候，雨量豐沛，年平均雨量有 2,500 公厘，但雨量分佈不均。尤其中南部，每年五月至十月爲雨季，十一月以後迄翌年四月爲旱季。因此致使佔臺灣全省可耕地面積 $\frac{1}{3}$ 之嘉南地區，實施輪灌制度。臺灣農業發展的歷史，一向是以水稻爲中心。由於品種之改良、病蟲害之防治、用水管理之改善、施肥之認識，使單位面積之產量增加。但是旱作之進展却比水田稻作落伍甚多。其主要原因除市價不穩定外，又受水源之限制。例如看天田及第二期水稻收穫後種植之冬季裡作，隨着天然水源之豐枯，產量增減之差異甚大。近來工業之發展及社會習俗之變遷，旱作物之價值日日提高，在水資源經濟利用之觀點，對於用水量比水田稻作甚少之旱作物，施予灌溉是值得注意的。又，興建中之曾文水庫及已竣工之渠道權工皆能增加可支配的水量。若是旱作物能得合

理的灌溉，不僅能確保旱作物之產量，而且可增加土地單位面積之收益。因此旱作灌溉漸受重視，並已積極從事於試驗研究工作。

臺灣旱作栽培環境特殊，在旱作灌溉方法上以地表灌溉佔絕大部份。影響地表灌溉之因子甚多，流量、田區長度、斷面積、田區坡度、地表狀態、時間、土壤質地、土壤水分、入滲率、作物生育狀況、耕作技術等等。灌溉方法之研究，在於調和這些因子，欲期灌溉水分能平均分佈，同時適合農作物之需要，以達適時、適量及最大效益之節水目的。因此灌溉方法實為一非常複雜之問題。涉及土壤物理學、流體力學及作物學。

入滲為灌溉水由田面下滲進入土層。入滲率過大時，常採用噴灑灌溉；過小時，常由流量，施灌時間，田區長度來控制。灌溉水由田面進入土層後，其進行方向影響水分之分佈與灌溉效率^{1,2,3}。因此在灌溉方法試驗時，入滲率為首先必需測定之項目，同時在分析上也佔極重要之地位。

臺灣輪作田主要旱作物有甘蔗、甘藷、花生、玉米、黃麻及蔬菜等。由於作物之習性、耕作之技術及農民之農作習俗之不同，致使各作物之灌溉方式有所差異。在旱作物之地表灌溉方法上，以龍溝灌溉及埂間灌溉佔絕大部份。但兩者之灌溉水理截然不同，主要之差別除斷面積外，入滲之方式亦不同。埂間灌溉為單向度之入滲，而龍溝灌溉却為二向度之入滲。關於臺灣輪作田埂間灌溉方法之研究，已有許多完善之研究分析報告^{4,5}。由於二向度之入滲，龍溝灌溉之分析亦較為繁雜。目前尚無完善之龍溝灌溉分析報告，其原因亦在此。

關於二向度入滲之運動性，常以偏微分方程式來表明其物理現象。目前除了以數值分析法(Numerical Analysis)可得精確度較高之解外，並無通解存在。但在應用上不如代數式之易於表達及接受。因此運用 Zhukovsky 函數，研究二向度之入滲率之代數式及濕潤範圍，同時以實驗驗證，以供龍溝灌溉分析之運用，此為本文擬討論之重點。

貳、文獻探討

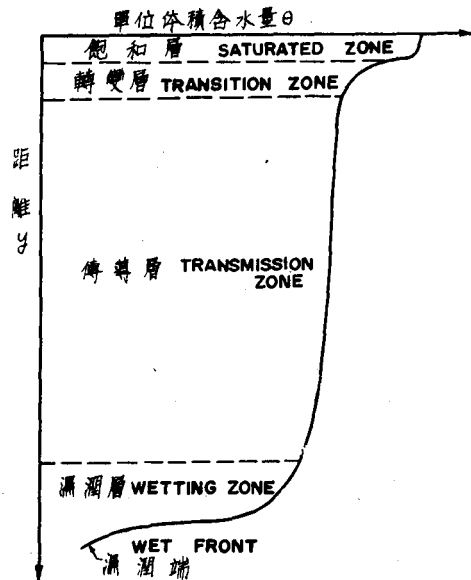
水在土壤中之運動性，很早就有人注意。Darcy 氏 (1856) 由實驗之結果發現在飽和狀態下，水頭梯度與流速成正比。即為人所知之 Darcy's Law

*圈內號碼為參考文獻目錄

$$\left. \begin{aligned} u &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ v &= -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \\ w &= -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \right\} (1a, b, c)$$

式中 h 為測壓水頭 (piezometric head)， k_x 為 x 軸方向之導水係數， u 為擬流體之流速 \bar{v} (apparent fluid velocity) 在 x 軸之分量；即 x 軸方向之質通量 (mass flux) 除以垂直 x 軸之孔隙介質控制體積 (control volume) 之面積 (gross surface)， \bar{v} 為 $ui + vj + wk$ 諸向量之合。Richards 氏 (1931) 討論不飽和土壤水分之運動性時，提出類似 Darcy's law 之公式，其形式亦如 (1) 式，但 k_x, k_y, k_z 不為定值，而是土壤含水量之函數。近代由於流體力學之進展，促使流體在孔隙介質中之運動性獲得更多之知識。許多學者已由 Navier-Stokes 方程式討論黏性流 (Viscous flow) 推演 Darcy's law，奠定其理論之基礎^{6,7}。

由土壤之縱剖面而言，Bodman 和 Colman 二氏 (1943)⁸：指出在入滲的過程中，如以土壤含水量來區分土層，可分為五層 (圖一)



圖一、Bodman 及 Colman 入滲土柱之物理層次

a. 飽和層 (Saturated Zone)：空隙幾乎充滿着水。即 θ 為最大。在無水頭之狀況下，其厚度約 1 公分。

b. 轉變層 (Transition Zone)：土壤水分含量

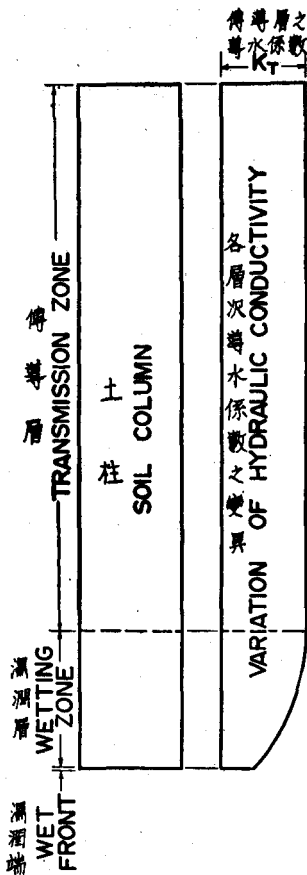
由飽和急速減至略比水分當量 (moisture equivalent) 及飽和持水量之中間值為高，即 $\frac{\partial \theta}{\partial y} < 0$ 。

c. 傳導層 (Transmission Zone)：土壤水分含量於此層中變化甚少。隨着入滲時間而延伸，即 $\frac{\partial \theta}{\partial y} \approx 0$ 。

d. 濕潤層 (Wetting Zone)：土壤水分含量變動很大，其位置亦隨着入滲時間而下移，即 $\partial \theta / \partial y < 0$ 。

e. 濕潤端 (Wet Front)：土壤水分接近於入滲前之含量。

Hansen 等氏 (1955)⁹ 指出於傳導層中之導水係數 k_T ，可假定為常數，但在濕潤層則不然，其土壤含水量及導水係數均向濕潤端遞減 (圖二)。



圖二 Hansen 氏入滲之土柱各層次導水係數之變異

關於濕潤端之位置，Toksoz 等氏 (1965)¹⁰ 觀測田間矩形溝在無水頭之狀況下之濕潤剖面。認為在均勻土壤中，濕潤端之位置 (圖三) 與時間有下列之關係：

$$y_0 = \omega_1 t^{0.5} + \omega_2 t \quad (2)$$

式中 y_0 為濕潤端下滲前進之位置， ω_1, ω_2 皆為實驗常數。

由流體力學之理論觀點而言，彈性孔隙介質 (elastic porous medium) 之顆粒本身不變形，圖三 Toksoz 氏濕潤端位置其顆粒之排列僅受垂直之壓縮，且為均勻含水量。若流體為可壓縮的，其運動不受氣相之影響，且為等溫 (isothermal) 之層流 (Laminar flow)，質量不減原理 (principle of mass conservation) 之形式⁶ 為

$$n \frac{\partial s}{\partial t} + ns\beta_c \frac{\partial p}{\partial t} - s\alpha_c \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial h}{\partial z}) - \gamma_w \beta_c k_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3)$$

式中

$$v = v_v + v_s$$

v_s = 顆粒體積

v_v = 空隙體積

v_w = 水之體積

$$n = \text{空隙度 (porosity)} = \frac{v_v}{v}$$

α_c = 垂直壓縮係數 (vertical compressibility)

$$= \frac{-\Delta v/v}{\sigma_z}$$

β_c = 流體之體積壓縮係數 (Fluid compressibility)

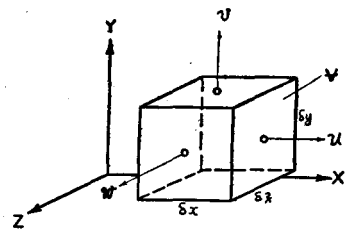
$$= \frac{\Delta \rho/\rho}{\Delta p}$$

σ_y = xz 面上之 normal intergranular stress

p = 壓力 (Fluid pressure intensity)

ρ = 水之密度

γ_w = 水之比重



圖四 流體於彈性孔隙介質運動之情形

參、理論分析

壟溝可視為具有定形 (prismatic) 之斷面，以二向度來探討其物理性；即 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ 。設

1. 水在土壤中之流動為層流。
2. 土壤及水在入滲過程中不發生溫度之變化 (Isothermal)
3. 土壤為均質 (Homogeneous) 且具有同向性 (Isotropic), 即 $k_x = k_y = k_z = k$ 。
4. 土壤氣相之影響可忽略。
5. 土壤顆粒之排列為剛體 (Rigid), 即 $\alpha_c = 0$ 。
6. 土壤水為不可壓縮的 (Incompressible), 即 $\beta_c = 0$ 。

基於以上之假設, 簡化質量不滅原理之方程式(3)式。即

$$n \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial h}{\partial y}) \quad (4)$$

在壟溝入滲之濕潤區, 可分為二部分, 一為重力水活動區, 毛管之作用不顯着, 完全由於水壓及重力之影響。一為毛管水活動區, 毛管力呈重要之因子¹¹。

3.1 重力水活動區

毛管水活動區在整個濕潤剖面所佔之比例小, 在分析上暫不考慮, 全部入滲之水分視為完全在重力水活動區內。同時依 Hansen, Bodman, Colman 等氏之結論, 傳導層之含水量及傳導係數 k_T 可假定為常數, 依土壤之質地及構造而異, 其厚度隨着入滲時間而延伸, 如上述。其他層次對於入滲過程影響並不大; 即 $k = k_T, \partial s / \partial t = 0$ 。敘述此區水的活動, 可由(4)式根據以上的假設而得。即

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

其邊界條件由如下分析而得。由勢能流 (potential flow) 之理論¹² 及 Darcy's Law 知

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -k_T \frac{\partial h}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -k_T \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \right\} (6a, b)$$

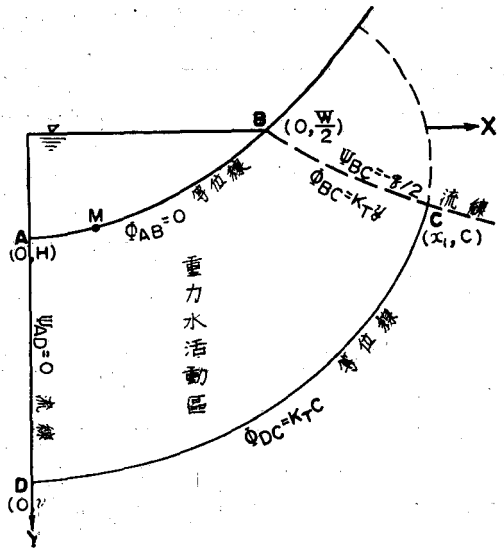
上式 Φ 中為勢能函數 (potential function), h 為測壓水頭 (piezometric head), 即為 $p/\gamma_w - y$ 或 $\varphi - y$, φ 為 p/γ_w (moisture potential), y 為位能 (gravitational potential)。積分 (6a, b) 式得

$$\Phi = -k_T \left(\frac{p}{\gamma_w} - y \right) + \zeta \quad (7)$$

式中 ζ 為未知常數。但在流線 BC 的端點 B 上 (圖五), 壓力 p 為大氣壓 p_a , 即 $p = p_a$ 。所以(7)式簡化為

$$\Phi_{BC} = k_T y - k_T \frac{p}{\gamma_w} + \zeta \quad (8)$$

式中 Φ 的右下註腳代表 Φ 沿曲線 BC 的值。沿溝形



圖五 重力水活動區之邊界條件

AB 線上 (等位線) 的任一點, 壓力為大氣壓與靜體水壓的和, 即 $p = p_a + \gamma_w y$ 。因此在等位線 AB 上,

$$\Phi_{AB} = -k_T \frac{p_a}{\gamma_w} + \zeta = \xi \quad (9)$$

式中等號的右邊者為一常數。實際上, 等位線之值的大小與(5)式無關。真正為吾人所要考慮的是等位線之梯度。因此令 $\xi = 0$, 利用此關係簡化(8)式為

$$\Phi_{BC} = k_T y \quad (10)$$

但, 沿等位線 CD, Φ 必為常數。在 BC 線上的端點 C, 其縱座標 $y = c$, 故

$$\Phi_{CD} = k_T c \quad (11)$$

又: 由於壟溝是對稱的, 其對稱軸為 AD, 故 AD 為一流線。如通過任一等位線的全部流量為 q ; 同時在流線上 AD 的 Ψ 為 0, 則沿 BC 流線, Ψ 即為 $-q/2$ 。綜合以上之分析, 沿邊界 ABCD 的條件為

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{AB} &= 0 \\ \Phi_{CD} &= k_T c \\ \Phi_{BC} &= k_T y \\ \Psi_{AD} &= 0 \\ \Psi_{BC} &= -q/2 \end{aligned} \right\} (12a, b, c, d, e)$$

解偏微分方程(5)式, 同時滿足邊界條件 (12a, b, c, d, e) 的方法甚多。其中之一, 即採用一複變函數方程式, 其等位線與流線的形式與上式邊界的形狀 ABCD 類似。方程式留下幾個未知常數, 利用上述的邊界條件(12a, b, c, d, e) 來決定這些未知數之值。今以 Zhukovsky's 函數¹³, 即

$$iZ + \frac{W}{k_T} = \eta \exp(W/\epsilon) \quad (13)$$

式中 w 為 $\Phi + i\Psi$, Z 為 $x + iy$, η, ϵ 分別為未知的常數, 可利用 Φ 與 Ψ 在邊界上的條件來決定。首先將函數 (方程式) (13) 式分別寫成實數與虛數部份

$$\left. \begin{aligned} -y + \Phi/k_T &= \eta \exp(\Phi/\epsilon) \cos(\Psi/\epsilon) \\ x + \Psi/k_T &= \eta \exp(\Phi/\epsilon) \sin(\Psi/\epsilon) \end{aligned} \right\} (14a, b)$$

沿等位線 AB , $\Phi_{AB} = 0$, 同時沿流線 AD , $\Psi_{AD} = 0$, 故在 A 點上 ($x=0, y=H$), 由方程式 (14a) 得

$$\eta = -H \quad (15)$$

式中 H 為水深。而 ϵ 值可由沿邊界 BC 上的條件求得。沿流線 BC , $\Phi_{BC} = k_T y$, $\Psi_{BC} = -q/2$, 由方程式 (14a) 得

$$\cos(\Psi_{BC}/\epsilon) = 0 \quad (16)$$

$$\text{或 } -q/2\epsilon = (n + \frac{1}{2})\pi \quad (17)$$

令 $n = -1$ 得

$$\epsilon = q/\pi \quad (18)$$

又沿等位線 AB , $\Phi_{AB} = 0$, 消去 (14a, b) 式之 Ψ_{AB} , 由端點 B 之位置 ($x = \frac{W}{2}, y = 0$) 得

$$q = k_T(W - 2H) \quad (19)$$

式中 W 為水面寬, 將以上之 η, ϵ, q 之值代入 (14a, b) 式得

$$\left. \begin{aligned} -y + \Phi/k_T &= -H \exp\left(\frac{\Phi\pi}{k_T(W-2H)}\right) \\ \cos(\Psi\pi/k_T(W-2H)) \\ X + \Psi/k_T &= -H \exp\left(\frac{\Phi\pi}{k_T(W-2H)}\right) \\ \sin(\Psi\pi/k_T(W-2H)) \end{aligned} \right\} (20a, b)$$

利用以上所求的條件, 可求溝形 AD , 界線 BC , 濕潤邊 CD 以及重力水活動區之濕潤面積 $ABCD$ 。各別分析如下:

3. 1. 1 溝形方程式

溝形 AB 亦為等位線, $\Phi_{AB} = 0$, 消去 (20a, b) 式之 Ψ_{AB} , 得溝形方程式為

$$\pm x = \sqrt{H^2 - y^2} + \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1} \frac{y}{H} \quad (21)$$

3. 1. 2 界線方程式

界線 BC 為流線, 且 $\Psi_{BC} = k_T y$, $\Psi_{BC} = -q/2$, 由方程式 (20b) 得

$$x = \frac{W-2H}{2} + H \exp\left(\frac{\pi y}{W-2H}\right) \quad (22)$$

3. 1. 3 重力水濕潤方程式

於 D 點 ($x=0, y=y_0$), 且 $\Phi_{DC} = k_T c$, $\Psi_{AD} = 0$, 代入 (20a) 式得

$$y_0 - c = H\lambda \quad (23)$$

[註: A_1 之溝形為拋物線, 其理由請參閱 5.1 「壩溝溝形斷面之討論」第 12 頁]

式中 $\lambda = \exp\left(\frac{c\pi}{W-2H}\right)$, y_0 為 y 軸濕潤端之距離。又濕潤邊 DC 為一等位線, $\Phi_{DC} = k_T c$, 由方程式 (20a, b) 消去 Ψ_{DC} , 得重力水濕潤方程式為

$$\pm x = \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1} \frac{y-c}{H\lambda} + \sqrt{H^2\lambda^2 - (y-c)^2} \quad (24)$$

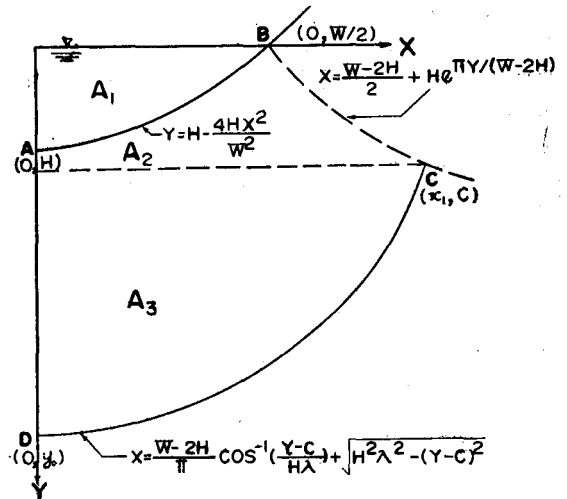
3. 1. 4 重力水活動區之濕潤面積

壩溝為拋物線形 (註), 重力水活動區之濕潤面積 A_0 (圖六) 為

$$\begin{aligned} A_0 &= 2(A_1 + A_2 + A_3 - A_1) \\ &= 2\left(\int_0^c x_1 dy + \int_c^{y_0} x_2 dy - \frac{1}{2}WH\right) \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $x_1 = \frac{W-2H}{2} + H \exp\left(\frac{y\pi}{W-2H}\right)$

$$x_2 = \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1} \frac{y-c}{H\lambda} + \sqrt{H^2\lambda^2 - (y-c)^2}$$



圖六 重力水活動區濕潤面積之劃分

積分化簡得重力水濕潤面積為

$$\begin{aligned} A_0 &= c(W-2H) + \frac{2H(W-2H)}{\pi}(\lambda-1) \\ &+ \frac{2}{\pi}(W-2H)(y_0-c) + \frac{\pi}{2}(y_0-c)^2 \\ &- \frac{1}{2}WH \end{aligned} \quad (26)$$

3. 2 毛管水活動區

在毛管水活動區域裡, 其土壤含水量不為定值。又如前所述導水係數為含水量之函數, 故亦不為定值。令 $ns = \theta$ 為單位體積之含水量, $h = \phi - y$ 。 $D(\theta) = k\partial\phi/\partial\theta$; Diffusivity。可簡化質量不減原理方程式(4), 且微分平方項不予考慮, 得二階非線性偏微分方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D(\theta) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (27)$$

許多學者曾以數值分析法解之^{14, 15}。但無通解存在。數值分析法雖有較高之精確值，但無代數式在運用上之方便。設毛管水活動區之濕潤方程式為

$$y^2 + \alpha y^2 + \beta x^2 + \gamma y + \delta = 0 \quad (28)$$

(因對稱於 y 軸，無 x 之奇次項)

式中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為係數，有待於其他條件來決定。由實驗得知毛管水濕潤方程式(28)與界線方程式(22)相垂直於 $C(x_1, c)$ (圖七)，即重力水濕潤方程式(24)與界線方程式(22)之交點。故

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_1, c)} = -\frac{H\pi\lambda}{W-2H} \quad (29)$$

又毛管水濕潤方程式(28)與拋物線壟溝 $y = H - \frac{4H}{W^2} x^2$ 相互垂直於 $E(x_2, y_2)$ ，即

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_2, y_2)} = -\frac{W^2}{8Hx_2} \quad (30)$$

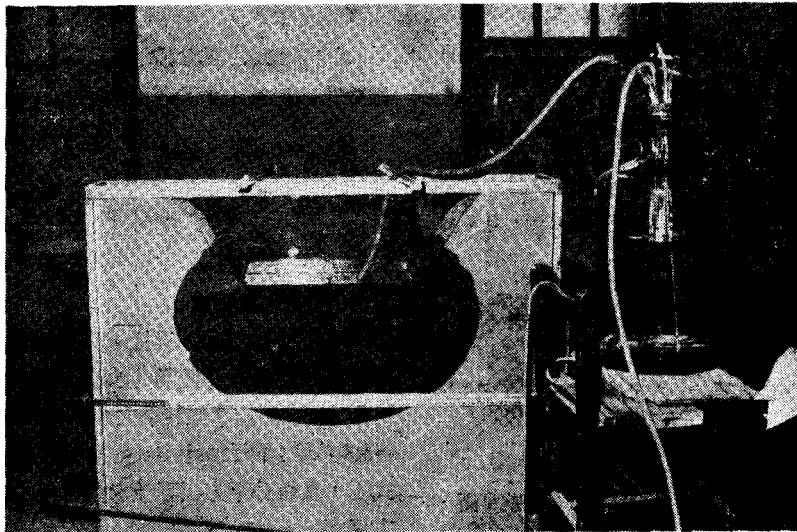
E點之位置，可觀測而得。

而且毛管濕潤方程式經 C, E 兩點。綜合以上四個條件，即

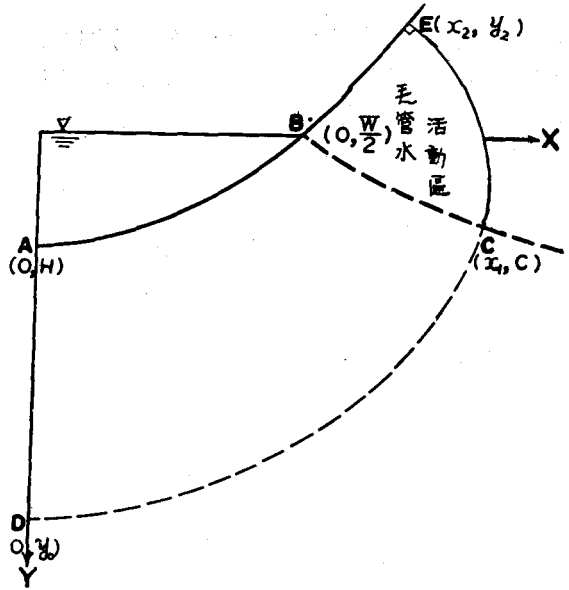
$$\left. \begin{aligned} c^3 + \alpha c^2 + \beta x^2 + \gamma c + \delta &= 0 \\ y_2^2 + \alpha y_2^2 + \beta x_2^2 + \gamma y_2 + \delta &= 0 \\ -(3c^2 + 2\alpha c + \gamma) \frac{H\pi\lambda}{W-2H} + 2\beta x_1 &= 0 \\ (3y_2^2 + 2\alpha y_2 + \gamma) \frac{W^2}{8Hx_2} + 2\beta x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (31a, b, c, d)$$

聯立(31)式，毛管水濕潤方程式(28)之係數 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 可決定。

肆、實驗之程序、步驟及結果



照片 1. 試驗之裝置及佈置



圖七 毛管水濕潤線之限制條件

4.1 材料及器材

實驗所用之材料為臺南縣佳里鎮北門農校後之砂壤土。其物理經實驗室分析結果如表一

表一 實驗土壤之物理性質

樣品數	機械分析			土壤質地	15氣壓	水分當量
	砂粒百分比	坭粒百分比	粘粒百分比			
1	52.5%	33.0%	14.5%	砂壤土	4.11%	11.43%
2	57.5%	31.0%	9.5%	砂壤土	4.09%	10.86%
3	60.3%	26.2%	13.5%	砂壤土	3.97%	11.48%
4	57.3%	30.0%	12.5%	砂壤土	4.12%	11.97%
平均					11.43%	

實驗之器材有試驗箱及定水頭給水箱各一。實驗箱為一特製之木箱，長 145.42 公分，高 143.83 公分，兩邊各裝 5mm 之玻璃板，其設計如圖八。且四周抹塗桐油灰，謹防漏水。定水頭給水箱為 20 公升之大玻璃瓶（圖九）。試驗之裝置及佈置見照片 1。

4.2 龍溝断面之決定

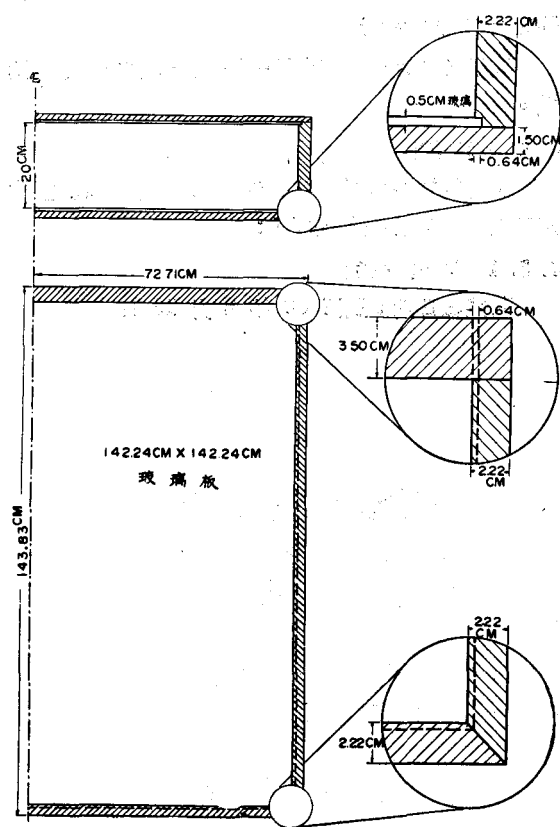
甘藷、甘蔗、蘆筍等之龍溝断面是具有類似正弦、餘弦週期函數之幾何圖形。在水頭不高時，浸水面積幾為拋物線。

于民國 59 年 2 月，測量臺南縣佳里鎮北門農校後砂壤土之甘藷龍溝灌溉試驗，連續 9 溝断面之資料。測量之法，先於畦頂樁定木樁，以水平尺使樁頂皆在同

同，但耕犁時，相鄰龍溝之深度不一定相同。

在初步描繪時，約距木樁 29 公分以下之圖形，幾近於拋物。因此將此部份之資料先以最小二乘法求其拋物線式，其頂點即為龍溝之最底部。兩相鄰龍溝頂點位置之差即為龍溝的寬度；而且重疊此頂點位置，可將 9 溝断面資料，合成一典型断面。將以上之計算程序，以 FORTRAN IV 之程序語言，應用臺大 CDC 3150 之電子計算機計算。其程式、流程圖及計算結果列於附錄一及附錄二。

甘藷溝灌試驗之實際資料，水頭約為 10 公分左右。將 10 公分以下之合成資料以最小二乘法統計，

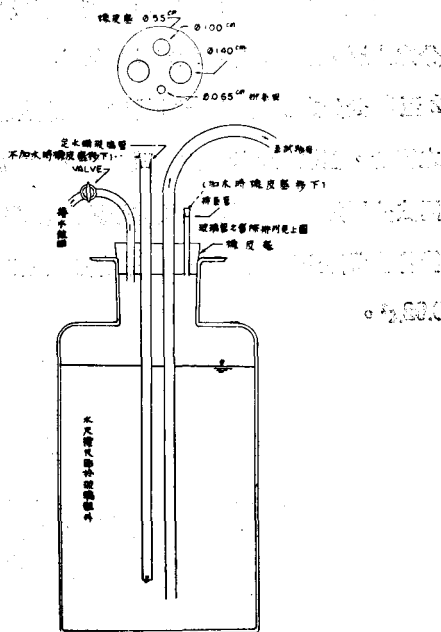


圖八 試驗玻璃箱之尺寸

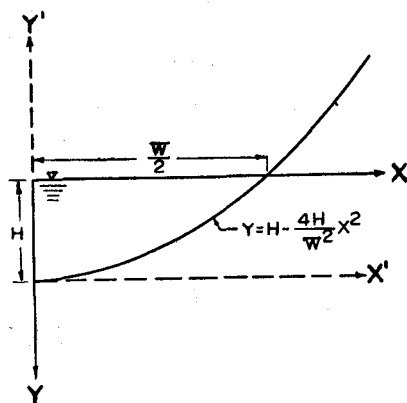
一水平面且與流向垂直，測量時在木樁間每隔 10 公分記錄水平尺至溝底之距離。

欲合成此連續 9 溝之断面資料，使成爲一典型之甘藷龍溝断面，以下幾點須加以注意：

1. 資料中之最大深度並不一定為龍溝之最底部，因此龍溝之確實寬度，不能得知。
2. 同一田區雖屬同一耕作者，所用農具及技術相



圖九 定水頭給水玻璃瓶之裝置



圖十 龍溝拋物線断面

其拋物線迴歸式爲 $y' = 0.0236x'^2$ 。本試驗以 $y' = 0.02x'^2$ 作爲典型之壟溝斷面。其通式 (圖十) 爲

$$y = H - \frac{4H}{W^2} x^2$$

式中 H 爲水深, W 爲水面寬。

4. 3 試驗前之準備

先將試驗土壤風乾至可篩離之程度, 而後以 No 10 篩網 (篩孔 2^{mm}) 將試驗土壤全部過篩。平鋪地面成 10 公分之土層, 風乾五、六日至土壤之顏色與濕土有明顯之差別。

將風乾之試驗土壤裝入試驗箱, 形成 5 至 10 公分之土層, 以玻璃棒將此層鋪平加以搗實。再將上層 2 至 3 公分之土壤以玻璃棒攪鬆, 使新加鋪土壤能與之密合, 經以上步驟之處理後才加鋪土壤於其上。以同法分層加鋪, 至試驗土壤完全裝滿玻璃箱爲止, 而後將壟溝內土壤取出, 使成拋物線之壟溝 $y = 10 - 0.02x^2$ 。

4. 4 試驗之步驟

試驗之步驟與水池法測定入滲率相同¹⁶。其程序如下:

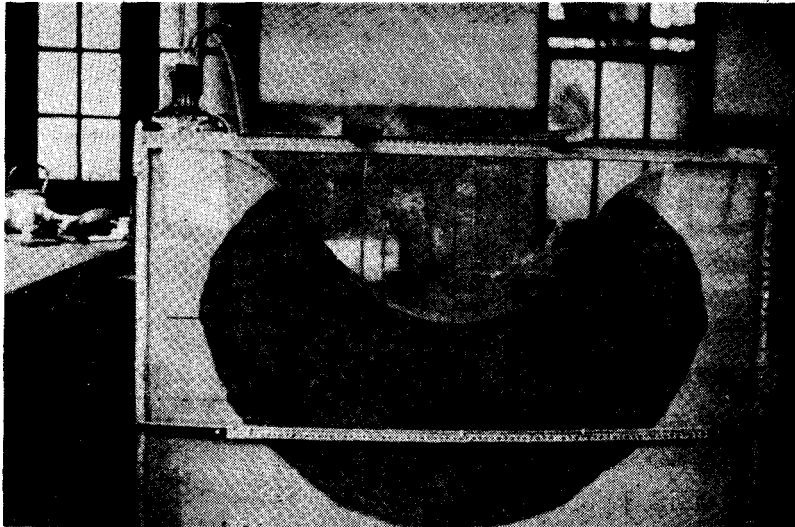
1. 測定試驗前之土壤水分。
2. 將塑膠布鋪於壟溝上。
3. 調整給水箱之定水頭玻璃管使壟溝藉虹吸作用具有 10 公分之水頭。
4. 記錄試驗前給水箱水尺標尺之讀數。
5. 抽出塑膠布, 開始計時。
6. 每隔適當之時間, 記錄給水箱之水尺, 並繪描濕潤線於玻璃板上。(所謂適當之時間爲使各濕潤線間有適當之間隔。)
7. 試驗結束後, 測定試驗後之土壤水分及假比重。

4. 5 試驗結果

拋物線壟溝斷面之濕潤剖面及入滲率於實驗室測定二次, 其結果各分述如下:

4. 5. 1 第一次試驗

1. 試驗日期: 民國 60 年 2 月 19 日



照片 2 第一次試驗之濕潤剖面

2. 時間及水尺記錄：表二

表二 第一次試驗時間及水尺記錄

累積時間 (分鐘)	給水箱 水尺讀數 (公分)	試驗箱 水面減水深 (公分)	y ₀ (y軸濕潤端位置) (公分)	備註
0	10.8		10	
1	11.5	0.7	12.9	
2	12.3	0.6	13.8	
5	14.1	0.5	15.7	
10	15.9	0.0	17.7	水頭穩定
15	17.2		19.2	
25	19.4		21.5	
35	20.1		23.3	
50	23.5		25.6	
70	26.4		28.4	
90	29.0		30.6	給水箱加水
120	32.6(25.4)		33.3	
180	31.8		38.5	給水箱加水
240	38.0(13.8)		43.0	
300	18.4		46.7	

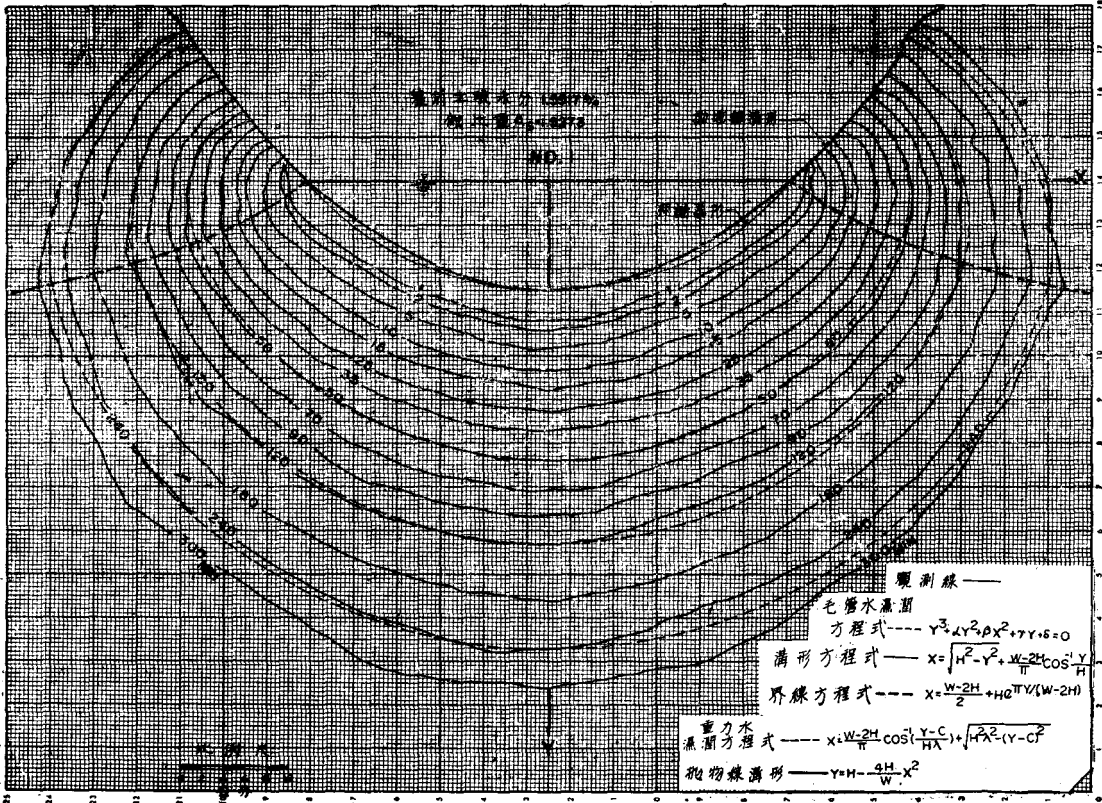
給水箱水尺 1 公分深之體積為 567.87c.c.

3. 土壤水分測定記錄：表三

表三 第一次試驗土壤水分測定記錄

罐號	濕加 土罐重 (克)	乾加 土罐重 (克)	罐重 (克)	水分重 (克)	乾土重 (克)	土壤水分 (%)	假比重
p35	277.50	252.00	98.55		153.45		1.5345
44	273.50	245.70	95.65		150.05		1.5005
3	284.50	251.90	97.20		154.70		1.5470
平均							1.5273
29	67.1880	66.7700	38.5667	0.4180	28.2033	1.4821	(試驗前測定)
101	48.3900	48.0970	30.0244	0.2980	18.0726	1.6212	
平均						1.5517	
616	69.4500	64.6280	41.5553	4.8220	23.0727	20.8992	(試驗後測定)
668	62.8095	58.3410	37.4616	4.4685	20.8794	21.4015	
43	57.4585	54.1740	37.9920	3.2845	16.1820	20.2972	
613	60.8020	57.4790	41.7367	3.3230	15.7423	21.1087	
19	57.7260	54.4180	38.0000	3.3080	16.4180	20.1486	
平均						20.7710	

4. 濕潤線記錄：圖十一（照片 2）



圖十一 拋物線壩溝濕潤剖面及理論線 (NO. 1)

4.5.2 第二次試驗

1. 試驗日期：民國 60 年 3 月 2 日
2. 時間及水尺記錄：表四

表四 第二次試驗時間及水尺記錄

累積時間 (分鐘)	給水箱 水尺讀數 (公分)	試驗箱 水面減水深 (公分)	y_0 (y軸濕潤端位置) (公分)	備註
0	12.6		10.0	
1	13.5	0.7	13.4	
2	14.5	0.6	14.6	
5	16.7	0.2	16.6	
10	19.2	0.1	19.1	
15	21.1	0.0	21.1	水頭穩定
20	22.9		22.7	
30	25.7		25.6	
40	28.4		27.8	
50	30.8		29.7	
60	32.2(12.2)		—	給水箱加水
80	16.0		35.1	
100	19.95		37.7	
120	23.5		40.4	
150	28.5		43.6	

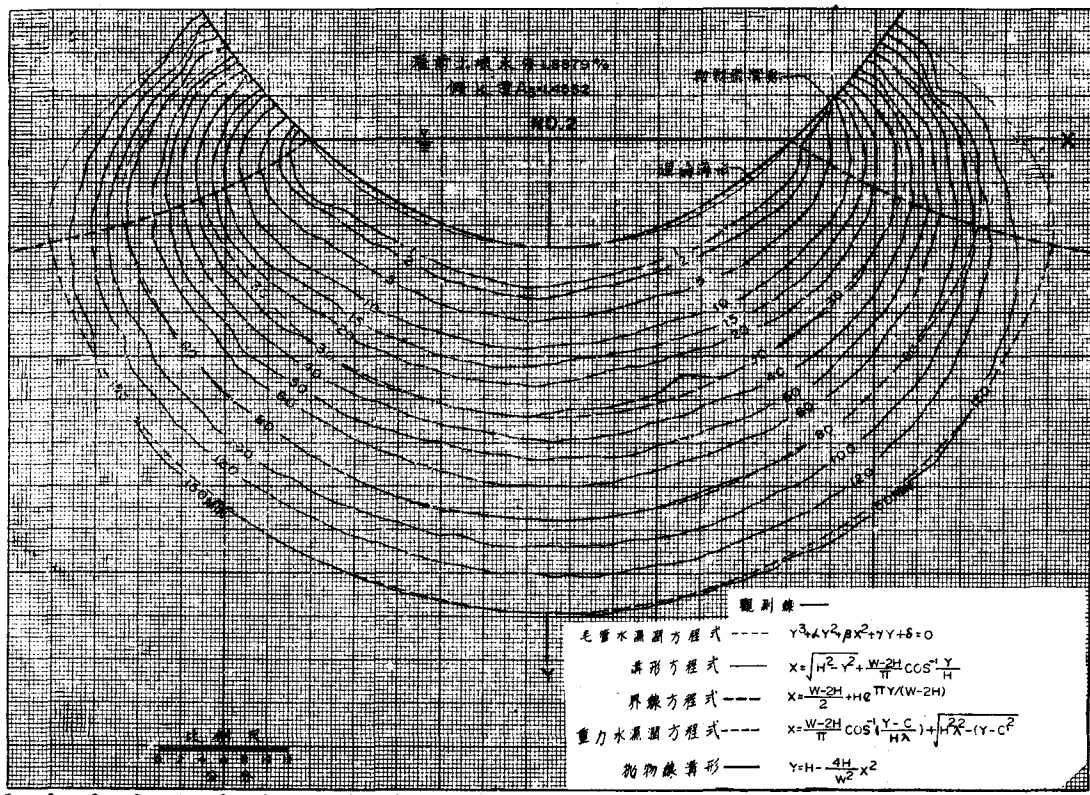
給水箱水尺 1 公分深之體積為 567.87c.c.

3. 土壤水分測定記錄：表五

表五 第二次試驗土壤水分測定記錄

罐號	濕土重 (克)	乾土重 (克)	罐重 (克)	水分重 (克)	乾土重 (克)	土壤水分 (%)	假比重
5	275.70	242.90	97.10		145.80		1.4580
8	273.70	242.25	96.69		145.56		1.4556
11	275.90	244.70	99.20		145.50		1.4550
平均							1.4562
616	67.6965	67.2005	41.5553	0.4960	25.6452	1.9341	(試驗前測定)
667	69.4500	68.9845	43.2393	0.4655	25.7452	1.8081	
57	78.8855	78.1825	41.5982	0.7030	36.5843	1.9216	
平均						1.8879	
619	66.6991	61.5895	40.5625	5.1096	21.0270	24.3002	(試驗後測定)
664	85.0590	76.5465	42.4981	8.5125	34.0484	25.0012	
643	73.3865	66.9275	39.6087	6.4590	27.3188	23.6431	
平均						24.3148	

4. 濕潤線記錄：圖十二



圖十二 拋物線壟溝濕潤剖面及理論線 (NO. 2)

伍、討 論

5.1 壟溝溝形斷面與理論 (21) 之比較

由理論所得壟溝溝形方程式 $\pm x = \sqrt{H^2 - y^2} + \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1} \frac{y}{H}$ 不為一拋物線形；但由實際田區中所調查之溝形，在施灌水深 10 公分以下，其溝形幾為拋物線 $y = H - \frac{4H}{W^2} x^2$ 。將以上二式比較 x 值之差異 (表六)。理論公式所得之 x 值均較實際值為大，最大值在 $y=6, 7$ 公分時相差 1.15 公分，(見圖十一、十二) 但面積之誤差不超過 5.74% 似可忽略不計，且拋物線方程式之確定條件，在田間甚易取得。在實用上拋物線式尚不失為有應用之價值。

表六 溝形斷面理論值與拋物線形之比較

y (公分)	$x = \sqrt{H^2 - y^2} + \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1} \frac{y}{H}$	$x = \sqrt{\frac{W^2(H-y)}{4H}}$	相 差 Δx (公分)
	(公分)	(公分)	
0	22.3607	22.3607	0
1	21.5223	21.2132	0.3091
2	20.5741	20.0000	0.5741
3	19.5024	18.7083	0.7941
4	18.2876	17.3206	0.9690
5	16.9007	15.8114	1.0893
6	15.2969	14.1421	1.1548
7	13.4005	12.2474	1.1531
8	11.0638	10.0000	1.0638
9	7.9081	7.0711	0.8370
10	0	0	0

5.2 重力水濕潤方程式之討論

重力水濕潤方程式

$$\pm x = \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{y-c}{H\lambda} \right) + \sqrt{H^2 \lambda^2 - (y-c)^2} \quad (24)$$

其 c 及 λ 值由下列二式

$$y_0 - c = H \exp \left(\frac{c\pi}{W-2H} \right)$$

$$\lambda = \exp \left(\frac{c\pi}{W-2H} \right)$$

得之。

將第一次試驗 50 分鐘、120 分鐘、240 分鐘及第二次試驗 30 分鐘、60 分鐘、120 分鐘於之理論值各繪於圖十一及圖十二之點線。比較觀測值 (實線) 及理論值 (點線) 之最大誤差及面積相對誤差於表七。

表七 重力水濕潤線觀測值及理論值之比較

NO.	時 間 (分鐘)	最大誤差 (公分)	面積相對誤差 (%)
1	50	1.0	3.64
1	120	1.2	0.70
1	240	1.8	4.24
2	30	1.2	1.01
2	60	2.0	0.60
2	120	3.6	0.90

誤差之來源一部份係土壤均勻度之偏差，一部分係受毛管水活動區之影響。

在第一次之 50 分鐘及第二次之 30 分鐘皆具有相同之 y_0 值 (25.6 公分)，可知 y_0 受時間及土壤物理性之影響頗大。

5.3 毛管水活動區濕潤方程式之討論

毛管水濕潤方程式 $y^2 + \alpha y^2 + \beta x^2 + \gamma y + \delta = 0$ 之係數，可由 (31) 式之聯立方程式解得。今以第一次試驗 50 分鐘、120 分鐘、240 分鐘，及第二次試驗 30 分鐘、60 分鐘及 150 分鐘之計算結果列於表八，方程式亦繪於圖十一及圖十二之點線

表八 毛管水活動區濕潤方程式及比較

NO.	時 間 t (分 鐘)	C		E		α	β	γ	δ	最大誤差 (公分)	面 積 相對誤差 (%)
		x_1 (公分)	c (公分)	x_2 (公分)	y_2 (公分)						
1	50	32.48	5.50	29.07	6.9	- 66.94	- 18.40	177.50	20291.15	1.0	7.81
1	120	38.20	7.47	31.62	10.0	196.56	71.02	- 1450.33	-104179.51	0.9	4.33
1	240	45.85	9.51	34.28	13.5	169.39	65.08	- 2091.06	-133111.95	2.1	6.24
2	30	32.47	5.50	27.84	5.5	33.94	8.54	- 246.70	- 8833.87	1.2	3.52
2	80	39.58	7.88	30.08	8.1	23.20	7.67	- 376.33	- 10979.80	2.4	7.14
2	150	46.34	9.62	46.34	10.6	22.39	8.05	- 525.68	- 15186.73	3.8	16.85

由表八及圖十一，圖十二知時間越長，理論線及觀測線之差異性越大，其原因在於討論重力水活動區時，毛管水活動區暫不考慮，全部入滲之水分視為全在重力水活動區內，因此越接近重力水與毛管水活動區之界面，其差異越大。C 點之位置發生偏差，致使毛管水濕潤方程式與實測值產生差離。

具有相同位置之 C 點（第一次 50 分鐘，與第二次 30 分鐘），其毛管水活動區濕潤線却不相同。其原因係受灌前土壤水分及土壤物理性之影響。

5.4 滲入水量之探討

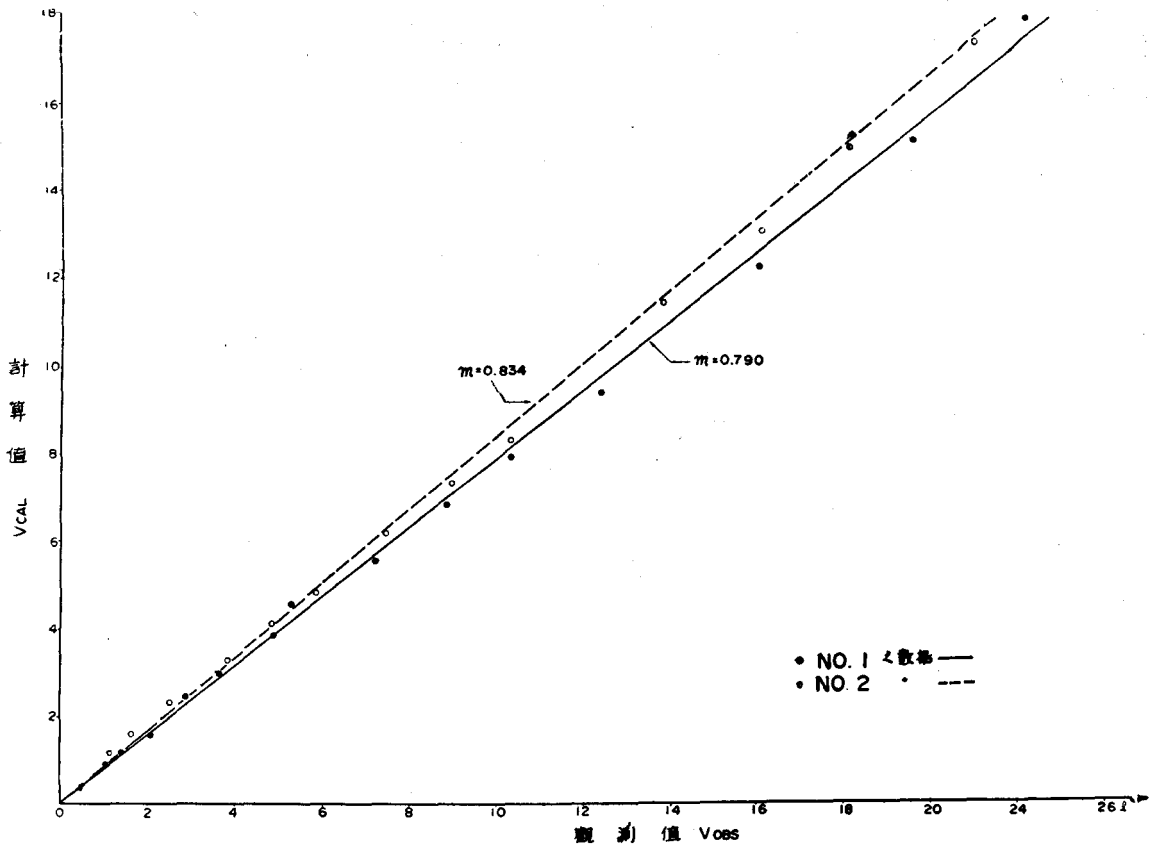
重力水活動區之濕潤區域 A_0 (2) 之水分增加淨量依下式之計算

$$V_{cal} = A_0 D \omega A_s \quad (3)$$

式中 V_{cal} 為重力水活動區土壤水分增加淨量， D 為兩玻璃板間之距離， $\omega = \omega_a - \omega_b$ ， ω_a 為灌後土壤水分含量， ω_b 為灌前土壤水分含量， A_s 為假比重即單位體積（包含孔隙）之乾土重。將計算之結果及由補給水箱觀測之累積入滲水量（ V_{obs} ）皆列於表九，且點繪於圖十三。兩者成線性相關即

表九 觀測值與計算值之比較

第一次試驗			備註	第二次試驗		
時間 t (min)	觀測值* V _{obs} (c.c.)	計算值** V _{cal} (c.c.)		時間 t (min)	觀測值 V _{obs} (c.c.)	計算值 V _{cal} (c.c.)
1	1,012.55	918.88	*觀測值由試驗補給水箱觀測之 **計算值為重力水濕潤區域水分增加淨量之計算值(3)式	1	1,126.13	1,189.18
2	1,380.35	1,190.61		2	1,607.50	1,600.90
5	2,051.96	1,577.33		5	2,506.26	2,333.39
10	2,896.14	2,463.86		10	3,837.17	3,294.06
15	3,634.37	2,997.11		15	4,826.90	4,126.59
25	4,883.69	3,862.95		20	5,849.07	4,829.94
35	5,281.20	4,585.06		30	7,439.11	6,192.30
50	7,211.56	5,565.78		40	8,972.36	7,303.52
70	8,856.79	6,847.65		50	10,335.25	8,318.79
90	10,335.27	7,925.82		60	11,698.14	—
120	12,379.59	9,422.15		80	12,856.05	11,495.13
180	16,013.96	12,334.63		100	16,099.14	13,182.67
240	19,534.76	15,236.92		120	18,115.08	15,047.06
300	22,146.97	17,990.09		150	20,954.44	17,407.19



圖十三 重力水活動區土壤水分增加淨量與觀測累積入滲量之比較

$$V_{cal} = m V_{obs} \quad (34)$$

m = 比例常數

m 值不為一是由於毛管水活動區未計入之緣故，隨灌前土壤水分而異。毛管水活動區不同於地下水毛管上升之形態。因在轉變層其土壤濕度值約為水分當量及飽和度之半。在傳導層其值又較低。最小持水量被定義為土壤中所能夠保持吸着水的最大量，相當於毛細

管吸着水的毛管持水量。於實驗室常以水分當量(M. E.)表示。當土壤含水量超過水分當量時，毛管水活動區必不存在。 m 值為 1。因此 m 值與土壤水分之關係如圖十四。

5.5 y_0 之前進曲線

Toksoz 等認為在均勻土壤中，無水頭之狀況下，濕潤端前進位置與時間有下列之關係：

$$y_0 = \omega_1 t^{0.5} + \omega_2 t \quad (2)$$

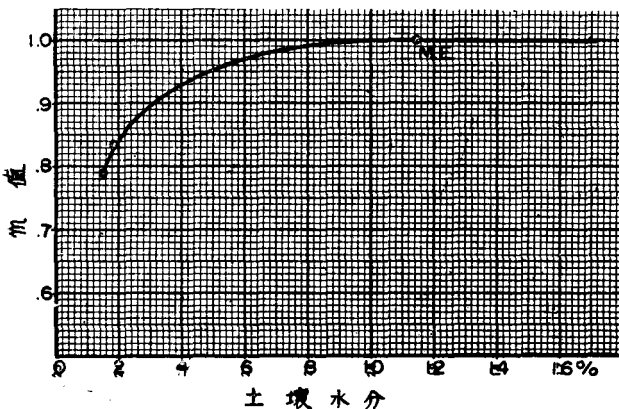
將兩次試驗之資料及(2)式之迴歸式繪於圖十五，兩者之相關指數(Correlation index)皆為 0.99。可知於有水頭之狀況(2)式可茲應用，但其 y_0 值應為 $(y_0 - H)$ 。即

$$y_0 - H = \omega_1 t^{0.5} + \omega_2 t \quad (35)$$

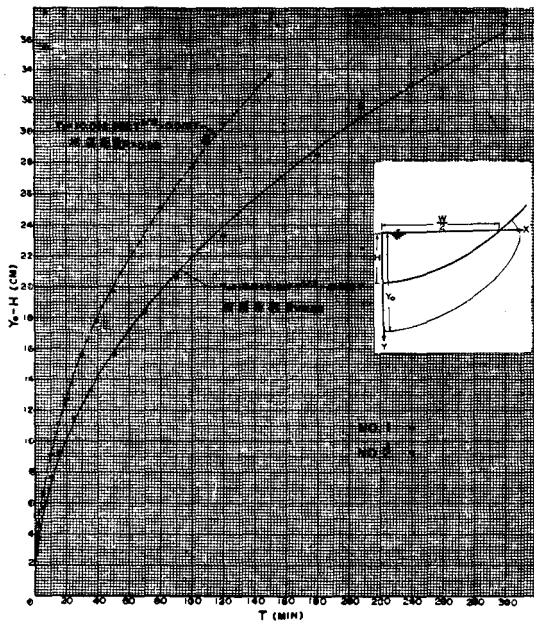
式中 H 為水頭。

陸、結 論

(1) 重力水濕潤方程式僅為水頭 (H)，水面寬 (W) 及下滲濕潤端位置 (y_0) 之顯函數。即



圖十四 m 值與土壤水分之關係



圖十五 y_0 與時間之關係

$$\pm x = \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{y-c}{H\lambda} \right) + \sqrt{H^2\lambda^2 - (y-c)^2} \quad (24)$$

$$y_0 - c = H\lambda = H \exp \left(\frac{c\pi}{W-2H} \right) \quad (23)$$

(2) y_0 為時間、水頭、灌前土壤水分及土壤物理性之函數。

(3) 二向度入滲之重力水活動區及毛管水活動區之界線，於均勻土質中為

$$x = \frac{W-2H}{2} + \text{Hexp} \left(\frac{\pi y}{W-2H} \right) \quad (22)$$

(4) 毛管活動區在

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_{(x_1, c)} &= -\frac{H\pi\lambda}{W-2H} \\ \frac{dy}{dx} \Big|_{(x_2, y_2)} &= \frac{W}{8HX_2} \end{aligned} \right\} (31a, b, c, d)$$

$$\left. \begin{aligned} c^3 + \alpha c^2 + \beta x_1^2 + \gamma c + \delta &= 0 \\ y_2^3 + \alpha y_2^2 + \beta x_2^2 + \gamma y_2 + \delta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

之四已知條件下，濕潤方程式為

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta x^2 + \gamma y + \delta = 0 \quad (28)$$

(5) 毛管水活動區之濕潤線，受灌前土壤水分及土壤物理性之變異，影響很大。

(6) 重力水濕潤區之增加淨水量 V_{CAL} 與累積入滲

水量 V_{OBS} 成正比。其比值 m 隨灌前土壤水分而異。

(7) 在水頭之狀況下，下滲濕潤端之位置與時間之關係為

$$y_0 - H = \omega_1 t^{0.5} + \omega_2 t \quad (35)$$

柒 應用與建議

7.1 應用

(1) 於均勻土質中，由灌前土壤水分及圖十四查得 m 值。由實測累積入滲量 (V_{OBS})，得重力水濕潤區域增加淨水量 (V_{CAL})。

(2) 由 $V_{CAL} = A_0 D \omega A_s$ 求濕潤面積 A_0 。又 A_0 僅為水頭 (H)，水面 (W) 寬及下滲濕潤端位置 (y_0) 之函數， y_0 可計算求得。

(3) 依 $y_0 - c = H \exp \left(\frac{\pi y}{W-2H} \right) = H\lambda$ 可得 c 值。

(4) 將 c 、 λ 值代入

$$\pm x = \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{y-c}{H\lambda} \right) + \sqrt{H^2\lambda^2 - (y-c)^2} \quad (24)$$

得重力水濕潤線

(5) 重力水及毛管水之界線由下式得之。

$$x = \frac{W-2H}{2} + \text{Hexp} \left(\frac{\pi y}{W-2H} \right) \quad (22)$$

(6) 於(31)式四已知條件下，得毛管水濕潤方程式為

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta x^2 + \gamma y + \delta = 0 \quad (28)$$

7.2 建議

(1) 壟溝作物與埂間作物之主要不同，在於根系發展位置之差異。通常灌溉之濕潤範圍，皆謂浸濕根系，由於壟溝作物栽種於畦頂上，其濕潤範圍之決定，不在於垂直方向之濕潤位置，而是橫側方向。此橫側方向濕潤位置之適當點，影響灌溉水量及效率之大小。根系補充由兩側灌溉壟溝灌溉水橫向滲入，此兩方向濕潤線重疊程度之大小，方可說適當補充根系水分。此問題應加以研究。

(2) 實際田間之土壤狀態，非為均勻土質，關於有層次性之土壤之二向度入滲，宜再加以探討比較。

(3) 實際田間之大孔隙如蟲孔、根孔甚多，灌溉水之入滲，首先沿着大孔隙滲入母質。致使實驗室之情況與田間狀況有很大之差異，此差異性之大小宜再加研討。

(4) 其他土質之 m 值，宜再加以研訂。

Abstract

In the irrigation experiment, intake rate is the first factor to be tested. There is difference between the intake rate of border and that of furrow. The former is one-dimensional, while the latter two-dimensional. The furrow intake problem can be solved by numerical analysis, but no general closed form solution exists. Zhukovsky's function can be used to obtain the wet front equation of gravitational zone,

$$\pm x = \frac{W-2H}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{y-c}{H\lambda} \right) + \sqrt{H^2\lambda^2 - (y-c)^2}$$

For capillary zone, wet front is described by the equation,

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta x^2 + \gamma y + \delta = 0$$

It is found that for the accumulated intake volume (Vobs) and net volume of soil moisture increment (Vcal) in gravitational zone, there exist a linear relationship,

$$Vcal = mVobs$$

The wet front moves along the Y axis according to the following equation,

$$y_0 - H = \omega_1 t^{0.5} + \omega_2 t$$

The preceding equations have been verified by a soil box experiment: parabolic section $Y = 10 - 0.02x^2$, the Cha-Li-Hsing's (佳里興) sandy loam, and 10 cm. of water head.

主要參考文獻

- (1) SHIH, CHARLES C. C.
"The Influence of Intake Function on The Mathematic Model of The Water Advance Function for Surface Irrigation"
M.S. DISSERTATION, UTAH STATE UNIVERSITY, 1966.
- (2) 施嘉昌 「由滲入因素導演地表灌溉之流長公式」
臺灣水利16卷1期 p14~p24 57年3月
- (3) 施嘉昌 「由滲入與浸水因素分析地面灌溉效率」
臺灣水利16卷3期 p12~p26 57年9月
- (4) 施嘉昌 「烏山頭舊水庫灌溉系統間灌溉方法試驗資料之研究分析報告」 農復會、農工系、嘉南水利會 58年3月
- (5) 吳純宏 「臺灣輪作田埂間灌溉斷水點之研究」臺灣大學農業工程研究所碩士論文 58年6月
- (6) EAGLESON, P. E.,
"Dynamic Hydrology" Chap 14 1970
- (7) ROGER J. M. De WIEST
"Geohydrology" Chap 4.
- (8) BODMAN, G. B. and COLMAN, E. A.
"Moisture and Energy Conditions During Downward Entry of Water into Soils"
p116~p122 Soil Science Society of America Proceeding vol 8 1943
- (9) FOK, Y. S. and HANSEN, V. E.
"One-dimensional Infiltration into Homogeneous soil" p34~p47 Proc. Amer. Soc. Civil Engr. Irrigation and Drainage Division IR3, 1965
- (10) Toksoz, S. et. al.
"Two-dimensional Infiltration and Wetting Fronts" p65~p79 Proc. Amer. Soc. Civil Engr. Irrigation and Drainage Division vol 91, IR3, 1965
- (11) 徐玉標 「灌溉土壤」 農工系
- (12) DAILY, J.W., and D. R. F. HARLEMAN
"Fluid Dynamics" Chap 6. 1966, Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- (13) HARR, M. E.
"GROUND WATER and SEEPAGE" Chap 1 and 9 1962, Mc Graw-Hill Book Company
- (14) VERMA, R. D., and BRUTSAERT, W.
"Unconfined Aquifer Seepage by Capillary Flow Theory" p1331~p1344 Proc. Amer. Soc. Civil Engr. Hydraulics Division Vol 96, Hy 6, 1970.
- (15) RUBIN, J.
"Theoretical Analysis of Two-dimensional Transient Flow of Water in Unsaturated and Partly Unsaturated Soils" p607~p615 Soil Science Society of America Proceeding Vol 32, 1968
- (16) 徐玉標、吳銘塘 「土壤滲入率之測定」 p57~p62 科學農業 16期12期 57年1月
- (17) CHURCHILL, RUEL V. "Complex Variables and Applications" 1960
- (18) CHOW, V. T. et al
"Advances in Hydrosience" Vol. 5 1969, Academic Press
- (19) PENNISI, L. E.
"Elements of Complex Variables" 1969
- (20) ORGANICK, E. I.
"A Fortran Primer 1963 Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- (21) HUNG, Y. T.
"Analysis of Seepage Flow in Irrigation Furrows" Thesis of the Degree of Ph. D. Michigan State University 1969
- (22) PAO, H. F.
"Fluid Dynamics" Chap. 2 1967
- (23) HILDERAND, F. B.
"Advanced Calculus for Applications Chap. 6 1962