渠流基本方程式與若干公式

Basic Equations and Some Formulas of Open-channel Flow

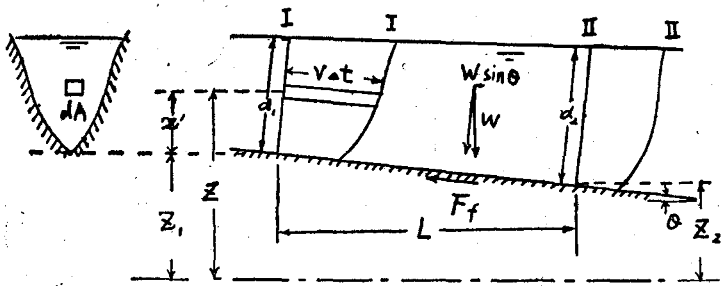
臺大農工系講師

劉　佳　明

本文推導若干渠流公式，以供水理分析之參考。

(一)能量方程式與緩變流方程式

如圖，渠道中原在 I 與 II 兩斷面間之流體，於 Δt 時間後，運動至 I′ 與 II′ 之間。若水流爲定流，則 I II＝I I′＋I′II，I′II′＋II II′，故 I′II′－I II＝II II′－I I。由此式知，所考慮流體系統之動能，運動後與運動前其値之差，等於 Δt 時間中通過斷面II與通過斷面I流體動能之差。不僅動能如此，動量、質量亦然。（圖一）



圖一　能量方程式之推演

通過面積元素 dA 之流體質量爲 $\rho(v\Delta t)\,dA$，ρ 爲流體密度，由質量不滅原理知，所考慮系統在運動前後質量應相同，故

$$\int_{II}\rho v\Delta t dA-\int_{I}\rho v\Delta t dA=0$$

即
$$\int_{II}v dA=\int_{I}v dA=Q=\text{渠道流量}$$

設
$$\int_{I}v dA=A_1=\text{斷面 I 之面積}$$

$$V_1=\frac{\int_{I}v dA}{A_1}=\text{斷面 I 之平均流速}$$

同理設 A_2，V_2，則得連續方程式

$$A_1V_1=A_2V_2=Q$$

通過面積元素dA流體之動能爲 $\frac{1}{2}(\rho v\Delta t dA)\,v^2=\frac{1}{2}\rho\Delta t v^3 dA$，位能爲 $(\rho v\Delta t dA)\,gz$，故運動前後，所考慮流體系統動能之差與位能之差爲：

$$\frac{1}{2}\rho\Delta t\left\{\int_{II}v^3 dA-\int_{I}v^3 dA\right\}$$

$$\text{與}\quad \rho g\Delta t\left\{\int_{II}zv dA-\int_{I}zv dA\right\}$$

作用於面積元素 dA 之壓力 p，所作之功爲 $(p dA)\,(v\Delta t)$，故作用於兩斷面之淨功爲

$$\Delta t\left\{\int_{I}pv dA-\int_{II}pv dA\right\}$$

若單位流量，單位時間磨擦損失水頭爲 h_f，則總損失能量爲

$$\rho g h_f Q\Delta t$$

設
$$\alpha_1=\frac{\int_{I}v^3 dA}{V_1^3A}=\text{斷面 I 之能量係數}$$

$$\alpha_1'=\frac{\int(p+\rho g z')v dA}{\rho g d_1V_1A_1}=\text{斷面 I 之壓能係數}$$

同理，定斷面II之各對應量。則由能量不滅原理：對系統所作之功，等於系統所增加之動能與位能及所產生熱能之和，並由以上所得諸式，則得能量方程式。

$$\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}+\alpha_1'd_1+z_1=\alpha_2\frac{V_2^2}{2g}+\alpha_2'd_2+z_2+h_f$$

若渠底爲傾斜角等於 θ 之平面，則易證 $\alpha_1'=\alpha_2'=\cos\theta$，於傾斜角甚小時 $\alpha_1'=\alpha_2'\doteqdot 1$。

設 H 爲對一基準面之總水頭，以渠底爲 x 軸，則，當渠道坡度甚小時

$$H=z+d\cos\theta+\alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\frac{dH}{dx}=\frac{dz}{dx}+\cos\theta\frac{dd}{dx}+\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{V^2}{2g}\right)$$

因能量坡度 $S_f=-\frac{dH}{dx}$（因$\frac{dH}{dx}$恒爲負）

渠道縱坡 $S_o=\tan\theta\doteqdot\sin\theta=-\frac{dz}{dx}$（因渠底順流向下降時$\frac{dz}{dx}$爲負）

故 $$-S_f=-S_o+\frac{dd}{dx}+\alpha\left(\frac{d}{dd'}\frac{V^2}{2g}\right)\frac{dd}{dx}$$

即 $$\frac{dd}{dx}=\frac{S_o-S_f}{1+\alpha d(V^2/2g)/dd}$$

上式即爲緩變流方程式。

㈡動量方程式與水躍公式

於 Δt 時間中，通過面積元素 dA，流體之動能爲 $(\rho v\Delta t\ dA)v$，故原在I與II兩斷面間流體，水平動量之改變值爲

$$\rho\Delta t\ \cos\theta_2\int_{II}v^2dA-\rho\Delta t\ \cos\theta_1\int v^2dA$$
$$=\rho\Delta tQ(\beta_2V_2\cos\theta_2-\beta_1V_1\cos\theta_1)$$

上式中　$\theta_1\theta_2$＝斷面I、II處水流與水平方向之夾角若渠底爲傾斜平面則 $\theta_1=\theta_2=\theta$。

$$\beta_1=\frac{\int_I v^2dA}{V_1^2A_1}=\frac{\int_I v^2dA}{QV_1}$$ ＝斷面 I 之動量係數，通常設爲一。

β_2 同上，但爲斷面之II値。

作用於I、II兩斷面之水平壓力爲

$$\cos\theta_1\int_I pdA-\cos\theta_2\int_{II}pdA=\rho g(\beta_1'\bar{d}_1A_1\cos\theta_1-\beta_2'\bar{d}_2A_2\cos\theta_2)$$

上式中　$\bar{d}_1$，$\bar{d}_2$＝斷面 I、II 重心之深度（垂直水流方向）

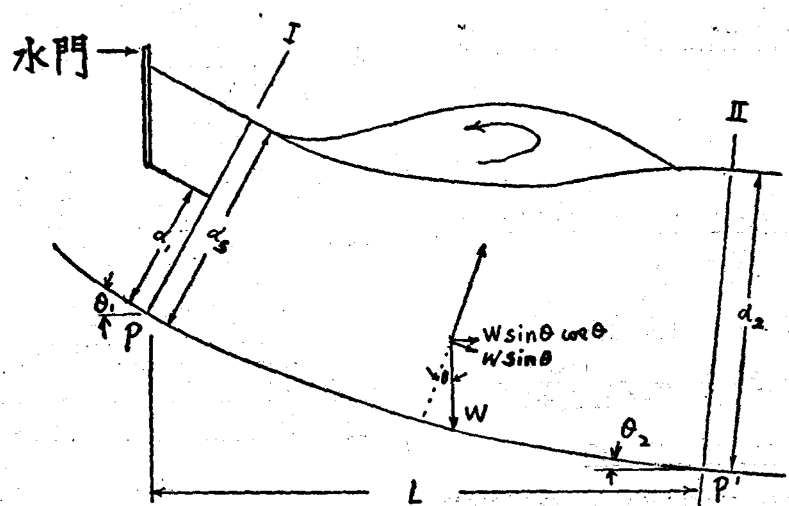
$$\beta_1'=\frac{\int_I pdA}{\rho g\bar{d}_1A_1}$$＝斷面I之壓力分佈系數。

設作用於I、II兩斷面間之流體除壓力外之其他外力的水平分力爲 x，牛頓運動第二定律：一物體單位時間動量之變化值，等於作用於該物體諸外力之合力。若不考慮摩擦力，則得動量方程式，（水平方向）：

$$\rho Q\ (\beta_2V_2\cos\theta_2-\beta_1V_1\cos\theta_1)$$
$$=\rho g\ (\beta_1\bar{d}_1'A_1co\theta_1-\beta_2'\bar{d}_1A_1\cos\theta_2)+X$$

即 $$\left(\beta_2\frac{Q^2}{gA_2}+\beta_2'\bar{d}_2A_2\right)\cos\theta_2$$
$$=\left(\beta_1\frac{Q_2}{gA_1}+\beta_1'\bar{d}_1A_1\right)\cos\theta_1+\frac{X}{\rho g}$$

附圖爲一單位寬之矩形渠道，符號如圖，又設 r_1，r_2＝斷面I、II處渠底之曲率半徑。



圖二　水躍

則可設

$$\beta_1'=\cos\theta_1\left(1+\frac{V_1^2}{r_1g}\right)$$

$$\beta_2'=\cos\theta_2\left(1+\frac{V_2^2}{r_2g}\right)$$

因傾斜面上壓力係數爲 $\cos\theta$，水平曲面之壓力係數爲向心力與重力之和，與重力之比，即 $(g+V^2/r)/g=1+V^2/rg$ 。又可設重力與渠底反力，兩者合力之水平分量爲：

$$X=\frac{1}{2}\rho gKL\ (d_s+d_2)\ \cos\theta\ \sin\theta$$

故不考慮渠底摩擦力，應用動量方程式，則得

$$(2Q/g)\ (V_2\cos\theta_2 - V_1\cos\theta_1)$$
$$= d_s^2\ \cos^2\theta_1\ (1+V_s^2/gr) - d_2^2\ \cos^2\theta_2\ (1V_2/gr_2) + KL\ (d_s d_2)\ \sin\theta\ \cos\theta$$

設 $d_c = \sqrt[3]{Q^2/g\cos\theta}$（見下節），$x_1 = d_1/d_c$，$x_2 = d_2/d_c$，$x_s = d_s/d_c$

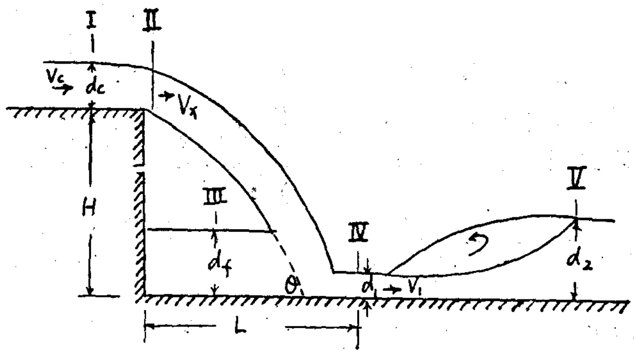
$x_1' = r_1/d_c$，$x_2' = r_2/d_c$，$x_h = L\sin\theta/d_c$

則動量方程式可化為

$$2\cos\theta\ \left(\frac{\cos\theta_2}{x_2} - \frac{\cos\theta_1}{x_1}\right) = \left(x_s^2 - \frac{\cos\theta}{x_1'}\right) \cos^2\theta_1 - \left(x_2^2 + \frac{\cos\theta}{x_2'}\right) \cos\theta_2 + K\ x_h\ (x_s + x_2)\ \cos\theta$$

上式可應用於分析各種形狀渠底之水躍，如水平、傾斜，弧形等渠道。

茲另分析垂直跌水，如圖，取Ⅰ、Ⅱ兩斷面，因斷面Ⅱ無壓力，故其動量方程式為：



圖三　垂直跌水

$$\rho Q\ (V_x - V_c) = \tfrac{1}{2}\ \rho g d_c^2$$

因 $Q = V_c d_c$，且 $V_c^2/2g = d_c/2$，故可求得

$$V_x = 1.5V_c = 1.5\sqrt{g d_c}$$

取Ⅰ，Ⅲ，Ⅳ所成自由體，則其動量方程式為

$$\rho Q\ (V_1 - V_c) = \tfrac{1}{2}\rho g\ (d_c^2 + d_f^2 - d_1^2)$$

化簡得

$$\frac{d_f}{d_c} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{d_c}\right)^2 + 2\left(\frac{d_c}{d_1}\right) - 3}$$

設水流接觸靜水池之速度為 V，則由能量原理

$$H + y_c + \frac{V_c^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}$$

得 $$V = \sqrt{g(2H+3d_c)}$$

故 $$\cos\theta = \frac{V_x}{V} = \frac{1.06}{\sqrt{H/d_c + 1.5}}$$

(三)臨界斷面與流量

臨界斷面有多種互相符合之定義，此處僅擇其一：流量一定而比能最小者。

設一傾斜角為 θ 之渠道，其流量為 Q，斷面積為 A，斷面水深為 d，水面寬為 T，能量係數為 α，則比能為

$$E = d\ \cos\theta + \alpha Q^2/2gA^2$$

於臨界斷面 $d = d_c$，比能最小，故

$$\frac{dE}{dd} = \cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{gA^3}\ \frac{dA}{dd} = \cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{gA^3}T = O$$

上式適用於任何形狀之斷面。今考慮梯形斷面，底寬為 b，側坡水平與垂直比為 z，則 $A = bd_c + zd_c^2$，$T = b + 2zd$，故得

$$\frac{\alpha Q^2}{g\cos\theta b^5} = \left(\frac{d_c}{b}\right)^3\ \left(1 + z\frac{d_c}{b}\right)^3 / \left(1 + 2z\frac{d_c}{b}\right)$$

於矩形斷面時，$z = O$，故

$$Q = \sqrt{g\cos\theta/\alpha b d_c^3}$$

若知渠道之某一斷面產生臨界流，則量得其水深，即能算出其流量，而不必知糙率等其他因素，一般量水堰，巴歇爾水槽等量水設備即利用此原理，但上式 $\cos\theta$ 應以壓能係數 α' 代之。

(四)最佳水力斷面與流速

最佳水力斷面為面積一定而流速（流量）最大之斷面。由曼寧公式，流速隨水力半徑之增加而增加，亦即隨潤周之減小而增加，故最佳水力斷面即面積一定而潤周最小之斷面。故此斷面為材料挖方最省者，但因渠道須有出水高，故常採用較窄之斷面。

設梯形渠道之底寬為 x，水深為 y，側坡橫豎比

(下轉42頁)