

# 略論土壤滲入率之指數函數式

## Discussion of Expressing Infiltration by Exponential Functions

美國伊利諾州水道測量局工程師

霍 雨 時

### 緒 言

以指數函數式表示土壤滲入率與滲入時間之關係已普遍為灌溉研究人士所應用，蓋取其形式簡單有利於數據之整理及數學上之運算也。在測定土壤滲入率或累積滲入水深與時間之關係之實驗中，往往可得一直線或近似直線之關係於對數紙上，因此滲入率之指數函數式得獲為家所公認之實驗公式焉。

以理論推求滲入率與土壤物理之關係該有與實驗結果相符之公式在焉。本文引用筆者前此在本刊十二卷第四期之研究作基礎，循圖解方法以求進一步瞭解滲入率之指數式真義所在，俾土壤滲入率之指數式有土壤物理學上之依據，亦使從事研究諸君了解滲入率實驗式中各常數項之值為何種土壤物理性所左右，從而啓發改進實驗儀器及實測方法之要結所在，實所厚望也。

### 文 獻 撮 要

筆者於本刊十二卷四期「土壤物理性與滲入率關係」一文中引用 Hansen 氏之土壤水移動公式

$$\frac{Y}{h} - \log_e \left( 1 + \frac{Y}{h} \right) = \frac{Kt}{nsh} \dots \dots \dots (1)$$

式中 Y = 滲濕長度自地表面量至濕潤端，

h = 水頭損失自傳導層延伸其直線關係至濕潤端， $(h = h_o + h_c - h_w)$ ，

$h_o$  = 土壤表面之水深，

$h_c$  = 濕潤端之毛細管引力水頭，

$h_w$  = 壓力水頭損失於濕潤端（超過傳導層直線關係之損失量）。

K = 傳導層之導水係數，

t = 滲入時間

n = 土壤孔隙率

S = 土壤水飽和度增加淨量， $S = S_2 - S_1$

（土壤水飽和度為土樣中土壤水體積與全部空隙體積之比），

$S_2$  = 滲濕後土壤水飽和度，

$S_1$  = 滲濕前土壤水飽和度。

及等積原理 (Principle of Continuity) 導得滲入率與時間之關係式

$$\frac{K}{I-K} - \log_e \left( 1 + \frac{K}{I-K} \right) = \frac{Kt}{nsh} \dots \dots \dots (2)$$

及累積滲入水深與時間之關係式

$$\frac{d}{nsh} - \log_e \left( 1 + \frac{d}{nsh} \right) = \frac{Kt}{nsh} \dots \dots \dots (3)$$

並提出公式(2)及(3)之圖解。

式中 I = 滲入率，d = 累積滲入水深。

同時亦列出滲濕長度 Y，滲入率 I 及累積滲入水深之關係如下兩式：

$$d = nsY \dots \dots \dots (4)$$

$$I = K \frac{h}{Y} + K \dots \dots \dots (5)$$

根據上列五公式，可以作進一步之分析如后。

### 圖 解 分 析

公式(2)及(3)所表示之滲入率或累積滲入水深均為滲入時間之隱函數 (Implicit Function)，而吾人在應用上則需要滲入率或累積滲入水深為時間之顯函數 (Explicit Function)；而公式(2)及公式(3)均有一項為二項式之對數項，理論上此對數項可用無限項級數展開，然後觀察需用之項數作近似式求解得一顯函數。惟此法有其缺點；其缺點在高次方程式之通解中祇及四次，如此，則祇可用級數之首四項而已，故近似式之精度可慮。故必須另謀別法以求滲入率或累積滲入水深之顯函數。

滲濕長度 Y 與滲入時間 t 之關係已見諸公式(1)，倘吾人能獲致 Y 為 t 之顯函數，且利用此顯函數代入公式(4)及公式(5)；則滲入率或累積滲入水深可為時間之顯函數明矣。

參閱筆者于本刊十二卷四期之討論，可見圖二及圖三之第三象限均為一單獨曲線，而此曲線之軌跡實係由該文之表一 Y/h 與 Kt/nsh 之對應數值根據本

文公式(1)之關係而繪成。基於此，利用公式(1)中  $Y/h$  與  $Kt/nsh$  之關係在對數紙上可繪得一曲線如圖一。

而此曲線可為四相連接之直線所代表得一近似折線如圖示。理論上，曲線實為無數之短直線所構成。(本

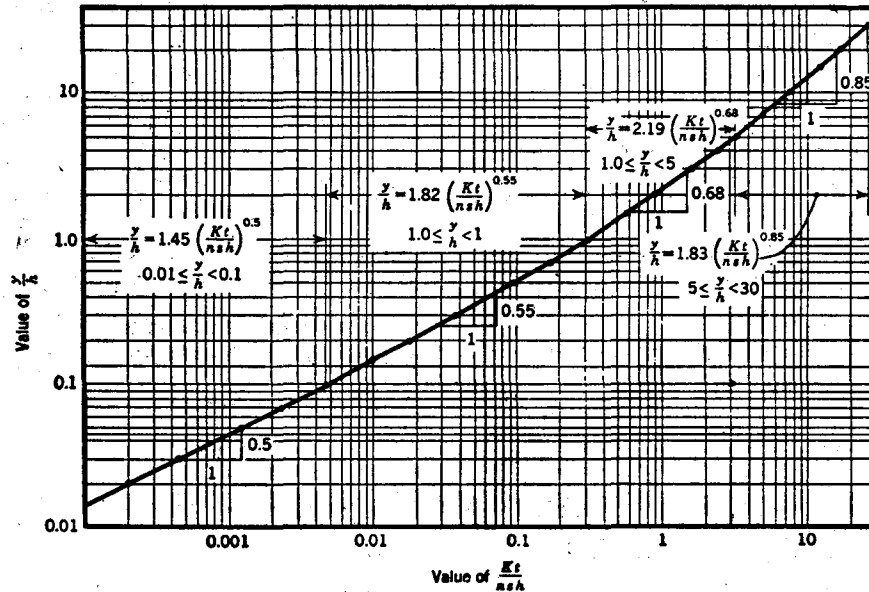


Fig. 1: The Exponential Relationship Between  $y/h$  and  $Kt/nsh$  (approximations by four straight lines)

文應用此觀念用四直線以代表圖一之曲線，取其簡便及精密度已足應用，讀者如有必要可增加直線之數目以求提高精密度。又此四相連直線所及之範圍亦限止于  $Y/h=0.01$  及  $Y/h=30$  之間，蓋此範圍亦足以括及滲入現象之變化也。

### 滲入時間之區分——時區

利用公式(6)至(9)之關係，滲入時間可區分為  $t_1$ ， $t_2$ ， $t_3$  及  $t_4$  四時區，如是嗣後之滲入公式可以根據此不同之時區導演得之。並以此四時區劃定其適用範圍。

### $Y/h$ 與 $Kt/nsh$ 之冪函數關係 (Power Function Relationship)

如圖一所示：

在  $0.01 \leq Y/h < 0.1$  之間，

$$\frac{Y}{h} = 1.45 \left( \frac{Kt}{nsh} \right)^{0.5} \dots \dots \dots (6)$$

在  $0.1 \leq Y/h < 1$  之間，

$$\frac{Y}{h} = 1.82 \left( \frac{Kt}{nsh} \right)^{0.55} \dots \dots \dots (7)$$

在  $1.0 \leq Y/h < 5$  之間，

$$\frac{Y}{h} = 2.19 \left( \frac{Kt}{nsh} \right)^{0.68} \dots \dots \dots (8)$$

及在  $5 \leq Y/h < 30$  之間，

$$\frac{Y}{h} = 1.83 \left( \frac{Kt}{nsh} \right)^{0.85} \dots \dots \dots (9)$$

在  $Y/h = 0.1$ ，由公式(6)可得

$$t_1 = 0.00476 \frac{nsh}{K} \dots \dots \dots (10)$$

在  $Y/h = 1$ ，由公式(7)可得

$$t_2 = 0.316 \frac{nsh}{K} \dots \dots \dots (11)$$

在  $Y/h = 5$ ，由公式(8)可得

$$t_3 = 3.26 \frac{nsh}{K} \dots \dots \dots (12)$$

在  $Y/h = 30$ ，由公式(9)可得

$$t_4 = 26.86 \frac{nsh}{K} \dots \dots \dots (13)$$

由公式(10)至(13)可知土壤孔隙率愈小時， $t_1$ ， $t_2$ ， $t_3$  及  $t_4$  之間隔亦愈小；同時當土壤未滲濕前之土壤含水量高時，土壤水之淨飽和度  $S$  亦較小而知時區之間隔亦必較小；同理  $h$  之值小時，可望各時區間隔亦小也。砂土之  $K$  值大，故各時區之值亦小。

### 滲濕長度與滲入時間之冪函數關係

由公式(10)至公式(13)之時區極限可決定公式(6)至公式(9)之適用範圍如下之冪函數關係：

在  $t < t_1$ ，由公式(6)可得

$$Y = 1.45 \left( \frac{Kht}{ns} \right)^{0.5} \dots\dots\dots (14)$$

在  $t_1 \leq t < t_2$ ，由公式(7)可得

$$Y = 1.82 \left( \frac{Kh^{0.818}t}{ns} \right)^{0.55} \dots\dots\dots (15)$$

在  $t_2 \leq t < t_3$ ，由公式(8)可得

$$Y = 2.19 \left( \frac{Kh^{0.47}t}{ns} \right)^{0.68} \dots\dots\dots (16)$$

在  $t_3 \leq t < t_4$ ，由公式(9)可得

$$Y = 1.83 \left( \frac{Kh^{0.177}t}{ns} \right)^{0.85} \dots\dots\dots (17)$$

### 累積滲入水深與滲入時間之冪函數關係

將公式(14)至公式(17)之冪函數關係代入公式(5)可得累積滲入水深與時間之冪函數關係如下：

在  $t < t_1$ ，由式(14)導得

$$d = 1.45 (nsh)^{0.5} (Kt)^{0.5} \dots\dots\dots (18)$$

在  $t_1 \leq t < t_2$ ，由公式(15)導得

$$d = 1.82 (nsh)^{0.45} (Kt)^{0.55} \dots\dots\dots (19)$$

在  $t_2 \leq t < t_3$ ，由公式(16)導得

$$d = 2.19 (nsh)^{0.32} (Kt)^{0.68} \dots\dots\dots (20)$$

在  $t_3 \leq t < t_4$ ，由公式(17)導得

$$d = 1.83 (nsh)^{0.15} (Kt)^{0.85} \dots\dots\dots (21)$$

公式(18)至公式(21)顯示各土壤物理性對累積滲入水深  $d$  之影響，當  $n, s, h$  之值小及  $K$  值大時，累積滲入水深與時間之變化迅速。反之當  $n, s, h$  之值大及  $K$  值小時，累積滲入水深與滲入時間之變化遲緩。易言之砂土之特性趨近于  $n, s, h$  值小及  $K$  值大。故時區之間隔短，其累積滲入水深與時間之關係甚易於由公式(18)向公式(21)趨近。反之黏壤土之特性有  $n, s, h$  值較大及  $K$  值較小之趨勢，故時區間隔長，因而累積滲入水深與時間之變化緩。

### 滲入率與滲入時間之冪函數關係

將公式(14)至公式(17)之冪函數關係代入公式(5)可得滲入率與時間之冪函數關係如下：

在  $t < t_1$ ，由公式(14)引得

$$I = 0.69 \left[ \frac{nsh}{t} \right]^{0.5} K^{0.5} + K \dots\dots\dots (22)$$

在  $t_1 \leq t < t_2$ ，由公式(15)引得

$$I = 0.55 \left[ \frac{nsh}{t} \right]^{0.55} K^{0.45} + K \dots\dots\dots (23)$$

在  $t_2 \leq t < t_3$ ，由公式(16)引得

$$I = 0.457 \left[ \frac{nsh}{t} \right]^{0.68} K^{0.32} + K \dots\dots\dots (24)$$

在  $t_3 \leq t < t_4$ ，由公式(17)引得

$$I = 0.546 \left[ \frac{nsh}{t} \right]^{0.85} K^{0.15} + K \dots\dots\dots (25)$$

由公式(22)至公式(25)可觀察土壤物理特性對滲入率之影響。在砂土而言，其  $K$  值（導水係數）大，故滲入率亦大。反之黏土導水係數小，故滲入率亦小。又公式(22)至公式(25)均受時區間隔之限制因此砂土之  $n, s, h$  之值小時，亦顯示滲入率之變化迅速，反之黏壤土之滲入率之變化遲緩。

### 驗 算

公式(18)至公式(21)係筆者于本刊第十二卷四期之討論中

$$\frac{d}{nsh} - \log_e \left( 1 + \frac{d}{nsh} \right) = \frac{Kt}{nsh} \dots\dots\dots (26)$$

一式之近似值，其間差異有驗明之必要。因此必須將一組實際數字代入，例如在  $n=0.4, S=0.5, h=35$  吋及  $K=0.007$  吋 / 分鐘時，由公式(18)至公式(21)可得  $t_1=4.8$  分， $t_2=316$  分， $t_3=3,260$  分及  $t_4=26,850$  分。由此亦可自公式(18)至公式(21)求得在  $t < t_1$  時， $d=0.322 t^{0.5}$ ，在  $t_1 \leq t < 2$  時， $d=0.285 t^{0.55}$ ，在  $t_2 \leq t < t_3$  時， $d=0.14 t^{0.68}$ ，又在  $t_3 \leq t < t_4$  時， $d=0.036 t^{0.85}$ 。

倘將公式(18)至公式(21)微分，求得相對應之滲入率公式則在  $t < t_1$  時， $I = 0.161 t^{-0.5}$ ，在  $t_1 \leq t < t_2$  時， $I = 0.156 t^{-0.45}$ ，在  $t_2 \leq t < t_3$  時， $I = 0.095 t^{-0.32}$ ，又在  $t_3 \leq t < t_4$  時， $I = 0.031 t^{-0.15}$ 。上述一組滲入率之方程式係下式

$$\frac{K}{I-K} - \log_e \left( 1 + \frac{K}{I-K} \right) = \frac{Kt}{nsh} \dots\dots\dots (27)$$

之二次近似值。所謂二次近似值，乃因此組滲入率方程式係由微分累積滲入水深之近似式而來。而滲入率之第一次近似式該自公式(22)至公式(25)求得，用同一之  $n, s, h$  及  $K$  之數據，在  $t < t_1$  時， $I = 0.153 t^{-0.5} + 0.007$ ，在  $t_1 \leq t < t_2$  時， $I = 0.172 t^{-0.55} + 0.007$ ，在  $t_2 \leq t < t_3$  時， $I = 0.043 t^{-0.68} + 0.007$ ，又在  $t_3 \leq t < t_4$  時， $I = 1.353 t^{-0.85} + 0.007$ 。倘將公式(22)至公式(25)積分可得相對應之累積滲入水深之公式，則在  $t <$

$t_1$ 時,  $d = 0.905 t^{0.5} + 0.007 t$ , 在  $t_1 \leq t < t_2$  時,  $d = 0.383 t^{0.45} + 0.007 t$ , 在  $t_2 \leq t < t_3$  時,  $d = 1.335 t^{0.33} + 0.007 t$ , 又在  $t_3 \leq t < t_4$  時,  $d = 9.05 t^{0.15} + 0.007 t$ 。此組累積滲入水深方程式係公式(20)之二次近似值, 因此組方程式係由積分滲入率之近似式而來也。

上述之演算有二目的, 第一點在求證累積滲入水深及滲入率與時間之顯函數近似值由四平直線代表曲線之法係屬可行; 第二點在證明微分或積分本文所示之近似滲入幕函數方程式會引入較大之誤差。引用上述之各組滲入方程式與公式(20)及(21)所得之數值可得表一及表二之結果:

表一 —— 計算所得之  $d$  及  $I$  與公式 26 之  $d$  真值及公式 27 之  $I$  真值

t 分鐘	d (真 值)	d (計算值)	誤差百分率 %	I (真 值)	I (計算值)	誤差百分率 %
	吋	吋		吋/分	吋/分	
1	0.318	0.322	1.3	0.1612	0.1608	0.2
10	1.037	1.008	2.8	0.0542	0.0555	2.4
40	2.171	2.165	0.3	0.0296	0.0288	2.7
100	3.614	3.593	0.6	0.0206	0.0917	4.4
400	8.249	8.210	0.5	0.0129	0.0140	8.5
1000	15.031	15.400	2.5	0.0103	0.0104	1.0
4000	41.525	41.650	0.3	0.0082	0.0088	7.3

表二 —— 計算所得之  $I$  及  $d$  與公式 27 之  $I$  真值及公式 26 之  $d$  真值

t 分鐘	I (真 值)	I (計算值)	誤差百分率 %	d (真 值)	d (計算值)	誤差百分率 %
	吋/分	吋/分		吋	吋	
1	0.1612	0.1596	1.0	0.318	0.312	1.9
10	0.0542	0.0555	2.0	1.037	1.150	10.9
40	0.0296	0.0296	0	2.171	2.293	5.6
100	0.0206	0.0206	0	3.614	3.740	3.5
400	0.0129	0.0142	10	8.249	11.875	44.0
1000	0.0103	0.0109	5.8	15.031	19.16	27.5
4000	0.0082	0.0082	0	41.525	59.40	43.0

由表一可知用公式(19至21)作公式(20)之近似方程式可得十分接近之計算值其誤差在百分之三以內。倘將公式(19至21)微分求得滲入率之二次近似值, 則誤差之最大值在百分之九以內。

由表二可知用公式(22至24)作公式(21)之近似方程式其誤差在百分之十以內。倘將公式(22至24)積分, 則求得之累積滲入水深之誤差最大值在百分之四十五以內。

綜合表一及表二之結果, 吾人可得如下二結論:

(壹) —— 利用四連續直線以代表滲濕長度與時間在對數紙上之曲線係屬可行。近似值與真值之誤差在累積滲入水深之方程式中在百分之三以內; 在滲入

率之方程式中則在百分之十以內。

(貳) —— 微分或積分滲入幕函數可引入較大之差誤, 在累積滲入方程式而言, 其誤差在百分之九以下; 在滲入率方程式而言, 其誤差在百分之四十五以內。因此, 在田間或實驗式量度滲入物理現象時, 紀錄累積滲入水深與滲入時間之舉係屬合理, 蓋所得之實驗式在必要時可微分而求得滲入率之近似式, 而其引入之誤差可望不致超出容許範圍也。土壤為非均勻性之實驗材料, 故實驗誤差在百分之十左右時仍可視為正常現象也。

**積分公式(22)後與Philip氏滲入公式之比較**

將公式(22)積分，可得如下之累積滲入水深公式：  
(在  $t < t_1$  時)

$$d = [1.91 K n s h]^{0.5} t^{0.5} + K t \dots\dots\dots (28)$$

Philip 氏於 1957 年在 Soil Science 發表之論文中依據理論用近似方法導得累積滲入水深公式如下

$$d = [2K_o(\theta_o - \theta_n)(P_c + h_o)]^{0.5} t^{0.5} + A_o t \dots\dots\dots (29)$$

公式(29)中  $K_o$  = 飽和土壤之導水係數，

$\theta_o$  = 滲濕後之土壤水份含量 (體積比)，

$\theta_n$  = 滲入前之土壤水份含量 (體積比)，

$P_c$  = 濕潤端之毛細管位能水頭 (Potential head)，

$h_o$  = 土壤表面水深。

$$A_o = k_n + \int_x,$$

$k_n$  = 未滲入前之土壤導水係數 (不飽和)，

$\int_x$  = 土壤水份函數與導水係數互為變化，

由是可知公式(28)與公式(29)極為近似，其不同之處在適用範圍。公式(28)限止於  $t < t_1$ ，易言之，公式(28)適用於土壤剖面含水量較低之時，或在滲入現象進行之初期。而公式(29)則未定有時區之限制，照 Philip 氏之實驗，在 (Yolo Light-Clay Soil) 輕黏土之試料時，其公式之適用範圍可達 16,000 分鐘。惜其數據未能直接用于公式(10)至公式(13)，否則當可驗算其時區之適用性也。(公式(29)中各土壤物理特性之定義與本文所根據者有出入，希讀者注意及之)。但亦可推想 Philip 氏之公式訂定指數為  $\frac{1}{2}$  似有未全之處。

**滲入率之指數實驗式與理論式**

滲入率之指數實驗式用于灌溉者有如下兩式：

$$I = at^b \dots\dots\dots (30)$$

$$I = at^b + c \dots\dots\dots (31)$$

公式(30)之形式與微分公式(18)至(21)所得之結果相同，又公式(31)之形式與公式(22)至(24)相同。因此公式(30)及(31)中之實驗常數  $a$ ， $b$ ，與  $c$  當可與本文所導出之公式作比較而確定各個常數與何種物理特性有關也。比較之結果可分論如下：

$$a = f(n, s, h, K) \dots\dots\dots (32)$$

$$b = g(t) \dots\dots\dots (33)$$

$$c = K \dots\dots\dots (34)$$

式(32)申明  $a$  為土壤物理特性  $n$ ， $s$ ， $h$  及  $K$  之函數，其變化至為複雜，此可見于公式(22)至(24)之中。式(33)說明  $b$  之值與時間相關，理論上在  $-1 \leq b \leq -0.5$  之間。式(34)說明  $c$  之值與導水層之導水係數  $K$  相等。根據本節之討論，吾人當可在實測滲入率時主意實驗儀器之設計及實測方法之更新也。

**結 語**

土壤滲入率為土壤物理性質之一，灌溉研究上往往利用簡單之指數式或冪數式以表示滲入率與滲入時間之實驗關係，本文利用圖解法導出滲入率之理論指數式並用四段不同之理論時區劃分各滲入公式之適用範圍。驗算之結果，顯示所提出之滲入公式為可靠，並指出積分或微分滲入率之冪指數實驗式時可引致百分之九至百分之四十五之誤差。又本文所提出之公式(28)與 Philip 氏所提之公式形式上極為近似。雖然公式(28)有時區限制，而 Philip 氏之公式則未有時區限制，惟比較後續各式時可知 Philip 氏之公式有可疑疑問之點，惜其實驗數據未能為本文各式所利用，否則定可驗算並作比較矣。

滲入率之實驗式與本文之理論式作比較所得各實驗常數與土壤物理特性之關係。可為改良實驗儀器之指南及實驗方法更新之借鏡也。

**ABSTRACT**

Infiltration equations in exponential forms have been shown with good agreement with the equation proposed by Fok and Hansen. A discussion of these equations are presented in this paper. The Significance of the soil physical properties as related to the empirical infiltration constants were determined. Study reveals that the infiltration equation with the exponent equals 1/2 proposed by Philip (1957) is similar to Eq. 28. And Eq. 28 was found to be applicable only in the initial period of infiltration where  $t < t_1$ .

(下轉28頁)