

河床砂波特性之研究

經濟部水資會副工程師兼水工實驗室副主任

李 德 熙

一、緒 言

天然河道或人工河渠之河床因受水流拖引力 (Tractive force) 之作用而產生起伏不平狀如波浪之砂波。這種砂波產生之原因及其結構特性之研究，由來已久，並已有許多學說發表，但這些學說多少都存在着一些疑問，截至目前尚未有肯定性之理論確立，不過對於砂波將增加河床之糙率，減低水流對推移質及懸移質之輸送能力之現象已獲得證實。從前推移質輸砂量之公式大都具有河床不產生砂波之假設，因此這些輸砂公式如應用到產生砂波之河床，自然產生極大的誤差。最近之輸砂公式漸有考慮砂波因子之趨勢，例如彼得莫爾 (Peter-Müller) 及弗雷林克 (Frijlink) 在他們的輸砂公式中引入沙波係數 (Ripple factor)；愛因斯坦 (Einstein) 用沙波或形狀糙率係數 (Ripple or Shape Roughness) 來表示沙波對推移質輸砂量之影響，但終究因砂波之起因及其運行特性之複雜，尚不能有一理想之輸砂公式為吾人安心應用，因此為要建立一理想可靠之有砂波河床之輸砂量公式，砂波特性之研究乃為基本而必須之過程。本文分砂波之運行特性，砂波移動速度公式，砂波運移速度與推移質輸砂量及砂波高度與福氏數及河床特性之關係等節說明砂波之特性及其與推移質輸砂量之關係，以供有興於砂波特性及推移質輸砂量研究者之參考。

二、砂波之運行特性

水流在無凝聚力床質所組成之平坦河床上流動，若其水流拖引力 (Tractive force) 超過床質之臨界拖引力 (Critical Tractive force) 時，床質便離開床面以跳躍 (Jumping) 或滾動 (Rolling) 等方式往下游移動，並在下游相當距離處重新着落於床面上。這種砂粒滾動或跳躍之距離依愛因斯坦之統計研究，平均約為砂粒直徑之 100 倍，由於這種砂粒之運移促使平坦之床面產生小砂堆，漸漸地由小砂堆而組成很多略具規則性之砂波。砂波之形狀略成三角形，其頂點稱為波峯，低窪點稱為波谷，其上游面因流速較快產生冲刷，而這些冲刷之砂量淤積於流速較為緩慢而

紊亂之下游面。由於水流集中於砂波之波峯；因此砂波之波峯向下游移動之速度較之波谷為快，由此砂波下游面之坡度逐漸變陡形成不對稱三角形之狀況，這叫砂丘 (Dune)，這些三軸向之砂丘成長到某一限度就變成砂堤 (Bars) 或二軸向較有規則之砂丘，這時期河床形態與水流成平衡之狀態。當砂丘上游面之砂粒全被冲刷而移到砂丘之下游面時，其下游面之坡度約為床質之靜止角，(Angle of Repose)。沉積在下游面之砂粒部份被往下游前進之砂波所埋沒，有些則被水流帶往下游。如此周而復始形成砂波之運移，在此我們須要瞭解個別砂粒之移動速度較之砂波者甚大。如流速繼續增加而福氏數達到 1 時，砂丘有變平之趨勢，這種現象叫層流 (Sheet flow) 在產生層流之前後，河床及水面都呈波動現象，流速再續增大，當福氏數甚大於 1 時則有反砂丘 (Anti dune) 發生，此時砂波之冲淤部位剛好與砂丘時者相反，即在下游面產生冲刷而上游面產生淤積，因此砂波往上游移動。有關河床變動之原則，波嘉第 (Bogardi)，西蒙氏 (Simons)，阿爾伯特遜 (Albertson)，理查遜 (Richardson) 及支拿邊斯克 (Znamenskaya) 等人曾有詳細之說明，不在此重述。

三、砂波移動速度之公式

砂波運移特性雖然極為複雜，但與水流及床質之特性有關是無疑義的。所以研究砂波移動速度之學者們，都不外乎從此二大因子着手研究。初期之公式皆為經驗公式，並限定床質之材料，為砂質材料且認為砂波運移之速度只為平均流速之函數；而後期之公式皆為半經驗理論之無尺度公式，其應用範圍較為廣泛。茲將有關砂波移動速度之公式介紹如下：
公元 1871 年賽恩 ((Sainjon) 首先研究砂波移動式速度，其公為

$$U_r = 0.00013(V^2 - 0.11) \quad \text{當 } V < 1.106 \text{ m/sec}$$

上式中 U_r 為砂波移動速度單位 m/s

V 為平均流速單位 m/s

公元 1894 年利根 (Deacon) 認為砂波進行速度僅為水流速度之函數 即 $U_r = f(V)$

公元 1913 年 歐文 (Owen) 的公式

$$U_r = \frac{V^6}{5} \quad (d=0.5\text{mm})$$

式中 V 為平均流速單位 ft/sec
 U_r 為砂波運行速度，單位為 ft/sec

公元 1956 年林炳南建議

$$U_r = 0.0008V^5 \quad (d=0.68\text{mm})$$

$$U_r = 0.000367V^5 \quad (d=0.10\text{mm})$$

$$U_r = 0.0006V^5 \quad (d=0.16\text{mm})$$

上式中 U_r 為砂波運移速度單位 m/s
 V 為平均速度單位 m/s

以上所述之早期公式在尺度上都不平衡，即係數皆含有尺度在內。

到 1959 年 篠原 (Shinohara) 及椿開如 (Tsnbaki) 導引一無尺度 (Dimensionless) 之砂波速度半經驗公式如下：

$$\frac{U_r R_b}{\sqrt{g\Delta d^3}} = a\psi_c^m \dots\dots\dots(1)$$

式中 U_r = 砂波速度
 R_b = 河床底面之水力半徑 (Hydraulic radius with respect to bed)。

$$R_b = h(1 - \frac{2R_w}{b}); \quad R_w = (\frac{n_w V}{1e})^{3/2}$$

R_w = 岸邊水力半徑 (Hydraulic radius with respect to the wall)

Δ = 砂在水中之相對密度 (Relative density of Sand in water) = $\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}$ ρ_s 表示砂之密度
 ρ_w 表示水之密度。

d = 代表粒徑

ψ_c = 有效無尺度拖引力 (Effective dimensionless tractive force) = $\frac{U_t^2}{\Delta g d} = \frac{R_{b1}}{\Delta d}$

當粗砂的 d_u > 0.06 時 a = 48.6 = 1.5
 當粗砂的 d_n = 0.01 0.02 時 a = 76.1 = 2.5

$$d_n = \left\{ \frac{\Delta \cdot g}{1.66 \cdot 980} \right\}^{1/3} d$$

公元 1963 年 哈利 (Khalil) 表示沙波之運行速度為推移質輸砂量及砂波高度之函數。

$$q_s = 0.565 U_r H \dots\dots\dots(2)$$

式中 q_s = 推移質輸砂量 單位 lbs/ft/hr
 U_r = 砂波運移速度 單位 ft/hr
 H = 砂波高度 單位 ft.

在同一年支拿邊斯克 (Znameuskaya) 建議一經驗公式

$$U_r = 9.5 \frac{h}{H} (V - V_0) \dots\dots\dots(3)$$

式中 U_r = 砂波運行速度 單位 m/day
 h = 平均水深 單位 m
 H = 平均砂波高度 單位 m
 V = 平均速度 單位 m
 V₀ = 臨界流速 單位 m/s

在公元 1965 年第伯里 ((De Vries) 曾利用數學模型 (Mathematical model) 以水流及床質材料為函數導引出沙波運移速度公式。茲將其導引過程略述於后：

假設：

- (一) 推移質輸砂量僅為水流速度之函數，即床質材料對推移質輸砂量之影響及因水與床質相互作用而起之糙率變化可以忽略。
- (二) 推移質變為懸移質之量可以忽略。
- (三) 水流為定量流。
- (四) 福氏數 (Froude Number) 不等於 1

在上述之假定下，他建議砂波之速度為

$$C_r = \frac{V g f_v}{gh - V^2} \dots\dots\dots(4)$$

式中 V = 平均流速

$$f_v = \frac{dT}{dV}$$

h = 平均水深

g = 重力加速度

T = 單位時間單位寬度之推移輸砂量。

設 T 為 V 之函數 即 T = f(V) = aV^b (5)

式中 a 及 b 為常數則 f_v = $\frac{dT}{dV} = b \frac{T}{V}$ 代入 (4) 式得

$$C_r = \frac{bgT}{gh - V^2} \dots\dots\dots(6)$$

若以福氏數表示則 (6) 式變為

$$C_r = \frac{bT}{h(1 - F^2)} \dots\dots\dots(6)$$

在推移質輸砂量之計算中有兩個很重要之無度尺參數——為輸砂參數 (Transport paramater)

$$X = \frac{T}{d^{3/2} \sqrt{g\Delta}} \dots\dots\dots(8)$$

$$\text{另一為水流參數 } Y = \frac{\Delta d}{\mu h l} \dots\dots\dots(9)$$

式中 d —代表平均粒徑， $\mu = \left(\frac{C}{Lq_0}\right)^{0.44}$ —砂
波係數

$$\Delta = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} = \text{砂在水中之相對密度。}$$

I —能坡 (Energy gradient)

而 X ，與 Y 成函數關係。佛萊林克比較愛因斯坦，梅耶彼得 (Meyer-peter) 英爾 (Mveller) 及科林斯基 (Kalinske) 等人之推移質輸砂量公式得 X 與 Y 之關係如下：

$$X = 5Y^{-1/2} e^{-2.7Y} \dots\dots\dots(10)$$

取 $X = \alpha Y^b$ 型式如(5)式並配用(10)式第伯里 (De Vries) 導引出(7)式得常數

$$b = 1 + 0.54Y \dots\dots\dots(11)$$

常數 b 亦可以 X 之函數表示之，當 $0.005 < X < 0.3$

$$\text{則 } b = 2.5 - 4 \log X \dots\dots\dots(12)$$

將(12)式代入(7)式得

$$C_r = \frac{(2.5 - 4 \log X) T}{h(1 - F^2)} \dots\dots\dots(13)$$

由(13)式可知沙波運移速度為床質性質 (X, T) 及水流特性 (h, F) 之函數。假如將(10)式代以莫爾 (Mueller) 之公式

$$X = 8 \left(\frac{1}{Y} - 0.047 \right)^{3/2} \dots\dots\dots(14)$$

$$\text{則函數 } b = f(Y) \text{ 變為 } b = \frac{3}{1 - 0.047Y} \dots\dots\dots(15)$$

我們要曉得(7)式是由沙波在運行時其形狀不變即沙波每一質點之運行速度皆與沙波峯之運行速度相等之假定下誘導出來的，但事實上沙波質點之運行速度以波峯點為最高，波谷點為最低，所以(7)式僅能代表波峯點運行之速度而不能代表沙波運行之平均速度，其平均速度應為

$$C'_r = \frac{(2.5 - 4 \log 1.8X) 1.8T}{\left(h - \frac{H}{2}\right) \left\{ 1 - \frac{F^2}{\left(1 - \frac{H}{2h}\right)^3} \right\}} \dots\dots\dots(16)$$

$$\text{或 } C'_r = \frac{(2.7 - 7.2 \log X) T}{\left(h - \frac{H}{2}\right) \left\{ 1 - \frac{F^2}{\left(1 - \frac{H}{2h}\right)^3} \right\}} \dots\dots\dots(17)$$

假如實際量測之沙波速度 U_r 與理論推算之沙波速度 C_r 及 C'_r 有如下之關係存在即

$$U_r = r C_r \dots\dots\dots(18)$$

$$U_r = r C'_r$$

則第伯里根據其 45 個試驗資料點求出

$$r = 1.60 \pm 0.40 \dots\dots\dots(19)$$

$$r' = 1.05 \pm 0.40 \dots\dots\dots(19a)$$

如此則量測沙波速度與理論推算之砂波速度有如下之關係

$$U_r = 1.60 C_r$$

$$\text{或 } U_r = 1.05 C'_r$$

綜合(13)，(17)兩式及上式得

$$U_r = \frac{(4 - 6.4 \log X) T}{h(1 - F^2)}$$

$$\text{或 } U_r = \frac{(2.8 - 7.6 \log X) T}{\left(h - \frac{H}{2}\right) \left\{ 1 - \frac{F^2}{\left(1 - \frac{H}{2h}\right)^3} \right\}} \dots\dots\dots(20)$$

理論與實際量測之沙波速度比較示於圖 1, 2

由圖 1 及 2 可知 (20) 式較之 (20a) 式為穩定，但 (20a) 式呈現與觀測值較為接近因 $r' \approx 1$ 。

四、沙波運移速度與推移質輸砂量

根據推移質輸砂量之連續方程式，假定床質移動之下限為沙波之波谷，則平均推移質輸砂量可簡示如下式

$$T = \alpha H U_r + T_0 \dots\dots\dots(21)$$

式中 T —單位時間單位寬度內之平均推移質輸砂量。

H —平均砂波高度。

U_r —平均砂波速度。

T_0 —非因沙波移動之輸砂量 (跳躍輸砂 Saltation load)

α —沙波形狀係數 Shape factor

當沙波為二軸的三角形時 $\alpha = 0.5$

假如水流速度不太大時 $T_0 = 0$ 則(21)式可簡化為

$$T = \alpha H U_r \dots\dots\dots(22)$$

這種以沙波運移之速度及形狀來表示推移質輸砂量的觀念始於十九世紀，公元 1962 年宜捧 (Zwanborn) 在德福斯德 (De Voorst) 水工試驗室以照像記錄之方式研究沙波之移動，他由 20 個沙波觀測出 $\alpha = 0.6$ 。1965 年西蒙斯 (Simons) 等人應用上式取 $\alpha = 0.5$ 計算輸砂量與 101 個試驗資料，砂粒徑自 0.19 mm ~ 0.93 mm 者相比較結果當 $\alpha > 0.5$ 時試驗值與計算值甚為接近，尤以高輸砂量時為然。作者在荷蘭時曾用椿 (Tsubaki)，川隅 (Kawasnmi) 及安富 (Yasutomi) 等人在 5 公里長，0.8 公尺至 2.00 公尺寬之直線矩形混凝土渠道，砂粒粒徑 $d_{50} = 1.26 \text{ mm}$ ~ 1.46 mm 及 Shino hara 篠原 及 Tsnbak；在

日河 (Hii River) 其砂粒粒徑為 $d_{50} = 1.10\text{mm}$, 1.33mm 及 1.44mm 所得之 25 個試驗值代入(2)式結果得 $\alpha = 0.76 \pm 0.23$, α 值甚大, 追其原因可能某些試驗值係在輸砂尚未達到穩定時進行觀測紀錄者, Tsubaki 等人也曾表明其中有某些試驗值係在放水後二小時即觀測的, 但試驗值之大部份係在放水後 12 小時才進行量測的, 在 1959 年第伯里 (De Vrier) 曾指出在不穩定下觀測推移輸砂量時, 可使計算值與觀測值產生 30 % 之偏差。

作者曾經又將篠原 (Shinohara) 及椿 (Tsubaki) 及支拿邊斯克 (Znamcuskaya) 等三人之 47 個試驗值代入(2)式得 $\alpha = 0.60 \pm 0.21$, 因此(2)式可變為 $T = 0.6HU_r$ (23) 試驗值與計算值之比較示如圖 3。

(23)式亦可用來估算現場之推移質輸砂量, 不過必需得有活動測深儀之類之設備來量測沙波之移動方可。

實際上沙波之形狀及速度從未有均勻者, 多少呈現著不規則之現象, 篠原 (Shinohara) 及椿 (Tsubaki) 及支拿邊斯克等人之試驗值係為多次試驗所得之平均值:

設相對偏差 (Relative error) 為

$$r_x = \frac{S_x}{\bar{X}} \dots\dots\dots(24)$$

式中 S_x = 標準偏差 (Standard deviation)
 \bar{X} = 平均值

則從參考書[5]及[7]得 $r_H = 0.32$ $r_{U_r} = 0.21$ 從本文得 $r_\alpha = 0.35$ 推移質輸砂量之相對偏差應為 r_T

$$r_T = \sqrt{r_\alpha^2 + r_H^2 + r_{U_r}^2} = 0.52$$

假如水流非二軸向流 (Two dimensional flow) 而推移質輸砂量非穩定則可應用荷伯爾 (Hubbel) 之輸砂公式計算輸砂量。

$$T_B = \sum_0^B \alpha HU_r \cdot \Delta B \dots\dots\dots(25)$$

式中

T_B = 單位時間推移質輸砂量總體積。

B = 河道寬

ΔB = 增寬 (Increment of Width)

α = 每一增寬內之平均形狀係數

H = 每一增寬內之平均砂波高度

U_r = 每一增寬內之砂波平均運移速度。

五、砂波高度與福氏數及河床特性之關係

有許多學者研究砂波之尺寸與水流及床質等特性之關係。漢森 (Hansen) 研究得如下之關係式

$$\left(\frac{H}{h}\right)^2 = \frac{I''}{10^{12}} f(F) \dots\dots\dots(26)$$

式中 H = 砂波高度,

h = 平均水深

I = 總能波

I'' = 由於砂波糙率所形成之部份能坡

F = 福氏數

$$\theta = \frac{hI}{\Delta d}$$

Δ = 砂在水中之相對密度

d = 砂粒粒徑 (平均)

他將上述之關係以直線表示於對數紙上則(26)式可改寫為如下之形式。

$$\frac{H}{h} f(Y \cdot F) \dots\dots\dots(27)$$

$$Y = \frac{\Delta d}{\mu h I}$$

篠原 (Shinohara) 及椿 (Tsubaki) 表示在均勻床質下

$$\frac{H}{h} = f(\psi_e, I, d_n) \dots\dots\dots(28)$$

但因無法將 I 及 d_n 之影響分析出來, 所以將上述函數簡化為

$$\frac{H}{h} = f(\psi_e) \dots\dots\dots(29)$$

式中 $\psi_e = \frac{R_b I}{\Delta d} = \frac{U_t^2}{\Delta g d}$ 稱為有效無尺度拖引力 (Effective dimensionless tractive force)。

將(29)式之函數式繪於雙對數紙上得如下之結論(1)

在粗砂時 $\frac{H}{h}$ 與 ψ_e 成直線關係即 $\frac{H}{h}$ 隨 ψ_e 之增加

而增加, 且當福氏數相同時, 相對沙波高 $\frac{H}{h}$ 之值以試

驗值較實際河川者為高。(2)細砂時其現象與粗砂時相反, 即相對沙波高隨 ψ_e 值之增加而減少。上述結論之理由安在尚不得而知。

因為(29)式可改寫為 $\frac{H}{h} = f(r)$ 所以實際上與(2)式之型式相似, 只是缺少福氏數之因子而已。將(7)式代入(8)式並配合(29)式可得一直線關係函數式

$$\frac{H}{h} = f\left(\frac{1-F^2}{b}\right) \dots\dots\dots(31)$$

再參照(1)及(2)式可將(3)式改寫

$$\frac{H}{h} = f(F, X) \text{ 或 } \frac{H}{h} = \phi(F, Y) \dots (32)$$

利用篠原 (Shinohara) 及支拿邊斯克 (Znamenskaya) 之試驗資料及統計分析之方法，試尋 (13) 式中各參數間之關係如下：其線性相關係數 (Correlation coefficient) 為

$$r_{j,k} = \frac{\sum_{i=1}^n (j_i - \bar{j})(k_i - \bar{k})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (j_i - \bar{j})^2 \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2}} \dots (33)$$

式中 $j = \frac{1-F^2}{b}$ ， $k = \frac{H}{h}$ ， n = 觀測數目
 \bar{j} = j 之平均值， \bar{k} = k 之平均值，

根據 Hald，在假定 $\rho = 0$ 之條件下可試驗相關係數之有無意義。假如

$$Z = 1.15 \log \frac{1+r_1}{1-r_1} \dots (34)$$

$$\text{及 } 2\sigma = 2 \left(1.15 \log \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \right) \dots (35)$$

則其試驗結果如下：

篠原之試驗資料 $Z = 1.35$ 及 $2\sigma = 0.43 Z > 2\sigma$ 因此篠原之試驗資料顯示 90% 之可靠性，但支拿邊斯克之試驗資料顯示 $Z = 0.24$ 及 $2\sigma = 0.44 Z < 2\sigma$ 此即

表示支拿邊斯克之試驗資料與 (31) 式之相關關係不佳，所以在此僅用篠原之試驗資料來找 (31) 式各參數間之關係如下：

$$\frac{H}{h} = 0.88 \left(\frac{1-F^2}{b} \right) - 0.024 \dots (36)$$

$$\text{及 } \frac{1-F^2}{b} = 0.87 \left(\frac{H}{h} \right) + 0.025 \dots (37)$$

試驗值及 (36) 及 (37) 式示如圖 4。

六、結 論

- (1) 沙波將增加河床糙率而降低水流輸砂能力，因此理想之輸砂公式必須將沙波影響之因子考慮在內。
- (2) 當福氏數小於 0.8 而輸砂量為已知時，沙波運移速度可用 (20) 式及 (20a) 式來估算。
- (3) 假如沙波之運移速度及波高可用活動迴聲測深儀測得或由本文所示各種公式推得，則其河道之輸砂量可用 (20) 式估算。
- (4) 沙波相對高度與河床質及福氏數有下式之明顯關係存在，即 $\frac{H}{h} = f\left(\frac{1-F^2}{b}\right)$
- (5) 由沙波之特性來推估推移質輸砂量是為最近學者們努力研究途徑之一。

Abstract

A brief review is given on some previously proposed formulae for dune velocities most of them are empirical. The latest theoretical formula of De Vries is tested on the data published by Shinohara & Tsubaki and Znamenskaya and a practical correction factor is proposed. It has been shown that a dune shape coefficient of 0.6 is reasonable. At last, an attempt has been made to relate the relative dune height to the bed characteristics and Froude number.

參 考 書 籍

1. Hamamori, A "A theoretical investigation on the fluctuation of bed load transport." Delft Hydr. Lab., Rep. R.4. May 1962.
2. Hansen, E, "A power formula for the mean velocity in alluvial streams. prediction of the length and height of the dune." Coastal Eng. Lab. Hydr. Lab. T. U. Denmark. Basic Res. Prog. Rep. no. 9, Aug. 1965 pp2-5.
3. Shinohara, K, and Tsubaki, T. "On the characteristics of sand waves formed upon the beds of open channel and rivers." Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu. Univ. Vol. VII. no. 25, 1959.
4. Simons D. B. Richardson E. V. and Nordin, C. F. "Unsteady movement of ripples and dunes related to bed load transport." IAHR. 11th Congress, Leningrad, 1965.
5. Vries, de M. "Considerations about non steady bed load transport in open channels." Delft Hydr. Lab. Pub. no. 36 Sept. 1965 8 p.

6. Vries de M. "Application of luminophores in sand transport studies." Delft Hydr. Lab. Pub. no. 39 June 1966, 86 pp.
7. Zwamborn J. A. "Discussion on bed load formulas with special reference to characteristic diameter and sorting." Waterl. Lab. Delft. De Voorst, Sepf. 1962, 22p.
8. 本間仁、石原藤次郎 "應用水理學" 中昭和32年12月 p.56~66.
9. Rep. of Task Force on Bed Florms in Alluvial Channels of the Committee on Sedimentation Nomenclature for Bed Forms in Alluvial "Channels" Journal of Hydr. Div. ASCE, May 1966.

FIG. 1 COMPARISON OF MEASURED DUNE VELOCITY U_r AND COMPUTED DUNE VELOCITY USING EQ. (20)

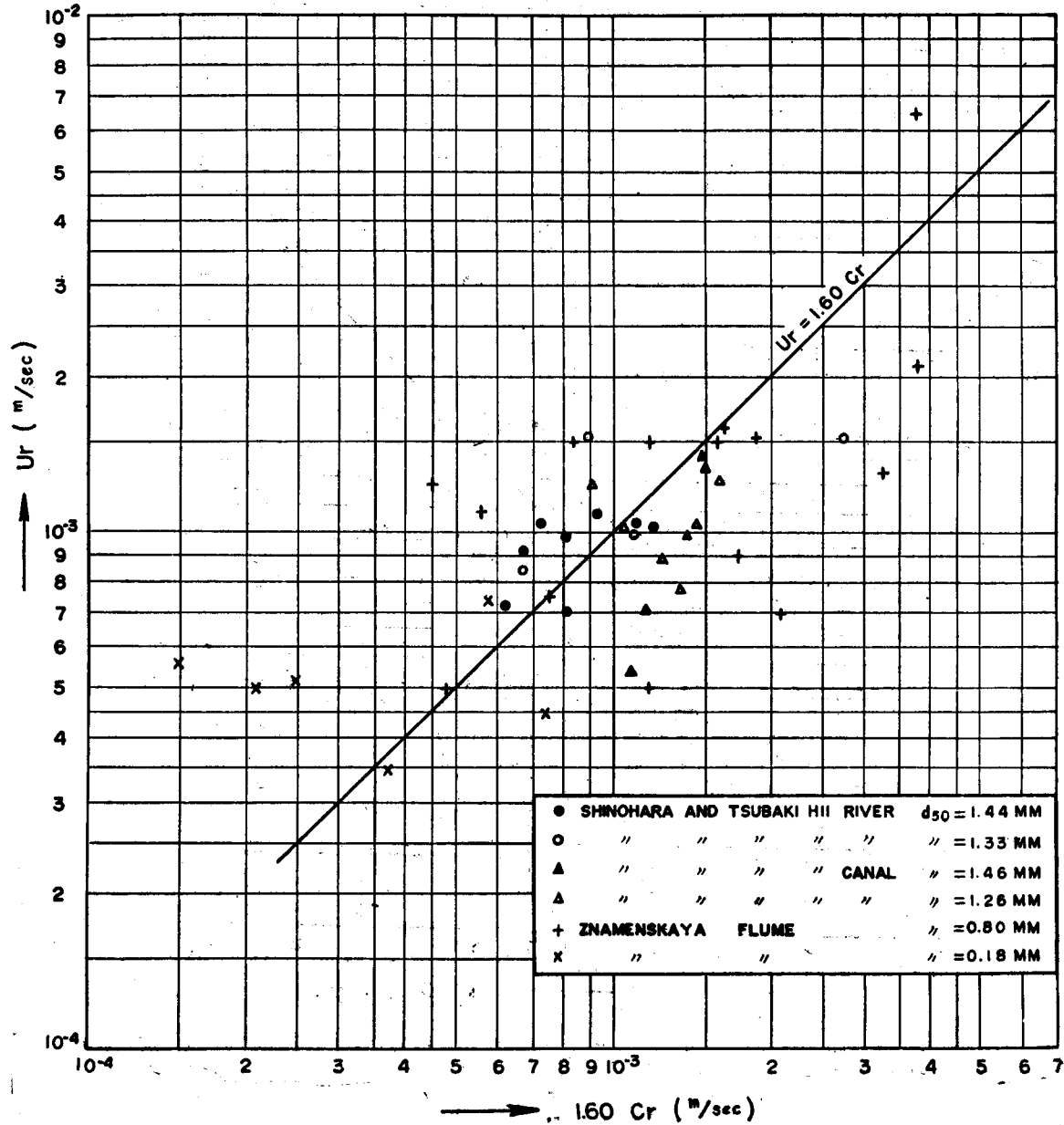


FIG. 2 COMPARISON OF MEASURED DUNE VELOCITY U_r
AND COMPUTED DUNE VELOCITY USING EQ. (20^a)

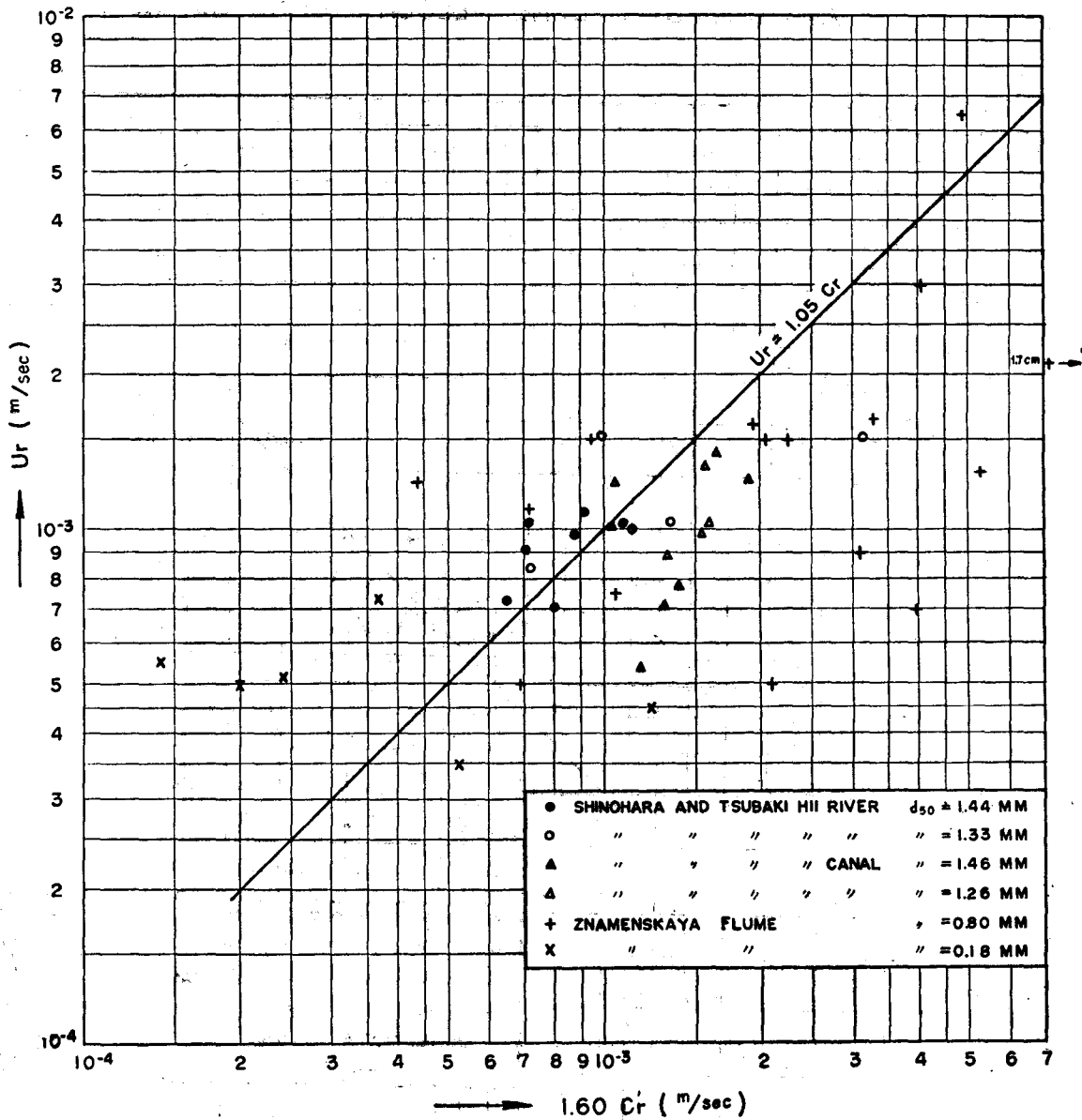


FIG. 3 COMPARISON OF MEASURED BEDLOAD TRANSPORT (T) AND COMPUTED BEDLOAD TRANSPORT USING EQ. (23).

