

土壤物理性與滲入率關係之研究

A Study of the Relation of Infiltration Rate to Soil Physical Properties

美國猶它州立大學研究院博士
現任美國伊利諾州水道測量局工程師

霍 雨 時

Yu-Si Fok

緒 言

土壤滲入率 (Infiltration Rate) 之研究雖屬土壤物理學之範疇惟其應用上牽涉至廣；故近五十年來，對此問題之研究論著至多，蓋滲入率係地球水之循環中不可或缺之一環。雖然影響土壤滲入率之因素甚多，但循水與土壤間所呈示之物理及化學現象作觀察分析及推理；亦不難枚舉主要之影響因素以為研究之基本。土壤滲入率之應用舉例言之在水文學 (Hydrology) 而言，在一集水區域如有降雨，則地面逕流 (Surface Runoff) 之產生即在降雨強度 (Rainfall Intensity) 超過土壤滲入率及表面滯留 (Surface Retention) 所致。由此可知，倘能預知土壤滲入率之特性及其與集水區域之關係，則因豪雨而產生之洪水，其量及洪峯之過程均可以推算矣。在農業灌溉方面而言，對某一田區之土壤滲入率倘能預知，則需用之灌溉流量及時間可以有效配合，以增加效率也。

文 獻 研 覽

Green 與 Ampt 兩氏於 1911 年發表一篇對土壤水之流動論文 (見 *Journal of Agricultural Science*)，提出土壤水向上、向下及橫向之流動三公式；其結果與實驗室之實測甚近，但彼等亦指出土壤水向上及橫向之實測數值與理論數值有差異之處，其關鍵在透水性 (Soil Permeability) 及土壤水份飽和度 (Degree of Saturation) 與供水來源有距離上之變化。Taylor 氏亦有同樣之報告 (見 *Fundamental of Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc, 1948 p. 150) 但指明當土壤水流動之範圍少於土壤毛細管水可能昇達高度百分之二十時，其所提之公式仍屬有效。利用土壤水份含量變化作函數及擴散原理 (Diffusion Theory) 導出之土壤水流動之微分方程式始見於 Richards 氏之論文中

(Physics; 1:318-333, 1931) 其後有甚多之論著繼續發表如 Kirkham 及 Feng 兩氏 (1949), Klute (1952), Philip (1955, 1957 及 1958) 等均見美國土壤學會文獻中，因 Richard 氏所導出之微分方程係非平直偏微分方程 (Nonlinear Partial Differential Equation)；故其解之獲得多利用漸近式或另行假設條件以求解。故所得結果仍是十分粗略之近似式，此可見於 Philip 氏連續發表之七篇論文中 (Soil Science 1957-1958)。擴散原理應用於土壤水流動之研究於近年有 Rawlins 及 Gardner 兩氏 (Soil Science Society of American Proceeding 1963) 指出其不完全適用之處，可見凡利用擴散、傳導或輻射對流三大熱學原理以處理土壤水流動問題似不宜以某一原理為主而忽略其他；而其間相互影響之關鍵仍待設法探求；故學者研究此土壤水流動問題僅循某一熱學原理以求其結果往往僅能得其一端而未能窺其全豹也。達西定律 (Darcy Law) 於飽和土壤水份情況時，其結果之正確已為衆所公認；應用此律於不飽和土壤水份情形下，有 Hansen 氏 (見 *Infiltration and Soil Water Movement During Irrigation*, Soil Science, 1955) 渠指出，當水份滲入土壤時，土壤剖面中對水之滲移有三顯著之物理變化層次 (見圖壹)，即傳導層 (Transmission Zone)、濕潤層 (Wetting Zone) 及濕潤端 (Wetting Front) 是也。於傳導層中土壤水份量 (Soil Moisture Content) 及導水係數 (Hydraulic Conductivity) 可假定為常數 (Constant)。但在濕潤層則不然，其土壤水份量及導水係數均向濕潤端遞減。但此項遞減之變化量在整個滲入過程中變化不大，故亦可假設此量為常數即此量不因時間之延長而變。濕潤端為毛細管引力範圍在此端土壤水份量與土壤未被滲入時之水份量同。

根據上述之假設，Hansen 氏利用 Darcy 公式 (見公式 1)

$$Q = k_r A \frac{h_r + y}{y} \dots\dots\dots(1)$$

及等積量原理(Principle of Continuity)(見公式 2)

$$Q = ns A \frac{dy}{dt} \dots\dots\dots(2)$$

平衡公式 1 及 2 後積分得公式 3 如下

$$\frac{y}{h_r} - \text{Log}_e \left(1 + \frac{y}{h_r} \right) = \frac{k_r t}{nsh_r} \dots\dots(3)$$

式中 Q = 流量，

A = 面積，暴露於滲入水下之土壤面積。

k_r = 傳導層之導水係數，

h_r = 水頭損失自傳導層延伸其直線關係直至濕潤端，($h_r = h_0 + h_e - h_w$)

h_0 = 土壤表面之水深，

h_e = 濕潤端之毛細管引力水頭，

h_w = 壓力水頭損失於濕潤端 (超過傳導層直線關係之損失量)

t = 時間，

y = 滲濕長度自地表面至濕潤端，

n = 土壤孔隙率，

s = 土壤水飽和度增加淨量， $s = S_2 - S_1$
(土壤水飽和度定義為土樣中土壤水體積與全部空隙體積之比)

S_2 = 滲濕後土壤水飽和度，

S_1 = 滲濕前土壤水飽和度。

根據公式 3 可進一步分析滲入率與土壤物理因素間之關係；至於化學方面如水質、土壤之含鹼量等對滲入率之影響均不列入本文討論範圍。

理論分析

假設：土壤係均勻性，其結構及體積不因水份之滲入而改變。公式 3 之假設適用於本分析，

依據等積量原理 (Principle of Continuity)

可得公式 4：

$$Q = IA \dots\dots\dots(4)$$

式中 I = 滲入率 (Infiltration Rate)。

聯立公式 4 與公式 1 解出 I 可得

$$I = k_r \frac{h_r}{y} + k_r \dots\dots\dots(5)$$

將公式 5 化簡可得滲入率與滲濕長度之關係如下

$$\frac{y}{h_r} = \frac{k_r}{I - k_r} \dots\dots\dots(6)$$

將公式 6 之關係代入公式 3，可得滲入率與時間之關係如下：

$$\frac{k_r}{I - k_r} - \text{Log}_e \left(1 + \frac{k_r}{I - k_r} \right) = \frac{k_r t}{nsh_r} \dots\dots\dots(7)$$

可知公式 7 為滲入率與土壤物理因素之相關式。檢驗其極限可得當 $t \rightarrow 0$ 時， $I \rightarrow \infty$ ；又當 $t \rightarrow \infty$ 時， $I \rightarrow k_r$ ；此關係與實驗觀察所得結果符合。

聯立公式 4 與公式 2，解出滲入率 I ，積分之後可得累積滲入水深 d_a 與滲濕長度之關係

$$d_a = nsy \dots\dots\dots(8)$$

將公式 8 所表示之關係代入公式 3，可得累積滲入水深與土壤物理因素之關係如公式 9

$$\frac{d_a}{nsh_r} - \text{Log}_e \left(1 + \frac{d_a}{nsh_r} \right) = \frac{k_r t}{nsh_r} \dots\dots\dots(9)$$

表示土壤水份含量之方法有容積比及重量比兩法，其相互之土壤物理量可以由公式 10 表示如下：

$$ns = A_s w \dots\dots\dots(10)$$

式中 A_s = 土壤假比重 = $\frac{\text{土樣之乾重 (未擾動土樣)}}{\text{與該土樣同體積之水之重量}}$

w = 土壤水份含量之淨增加量 (重量比)，

又 $w = w_2 - w_1$

w_2 = 滲濕後土壤水份含量，

w_1 = 滲濕前土壤水份含量。

滲入率公式之圖解法

滲入率之公式其形式係對數方程式 (見公式 7) 故滲入率與時間之關係不易表達為 $I = f(t)$ ；公式 7 所表示者僅為 $t = g(I)$ 而已。在實用上，則要求

$I = f(t)$ 之形式，直接將已知之土壤物理因素如 n, s, k_r 及 h_r 與時間， t ，代入公式 7 求解滲入率， I ，係屬費時之舉。故得另思他法以代。由公式 3，倘吾人已認定土壤物理諸因素為常數值，則僅餘下滲濕長度， y ，與時間， t ，為變數，因此可知凡有 t 一值必僅有相對應一 y 值。且當 $y \rightarrow 0$ 時， $t \rightarrow 0$ ；又當 $y \rightarrow \infty$ 時， $t \rightarrow \infty$ 。又公式 3，公式 7 及公式 9

之右邊，俱為 $\frac{k_r t}{nsh_r}$ 。故此三公式之左邊必須相等。

因此可藉 $\frac{y}{h_r}$ 與 $\frac{k_r t}{nsh_r}$ 之關係求解公式 7 或公式 9。

當選定一 $\frac{y}{h_r}$ 之比值時，必可得一對應之 $\frac{k_r t}{nsh_r}$ 比值。

Variation of Hydraulic Head with Time
 Note: Hydraulic Head = $y + h_r$

$$(h_T = h_o + h_c - h_w)$$

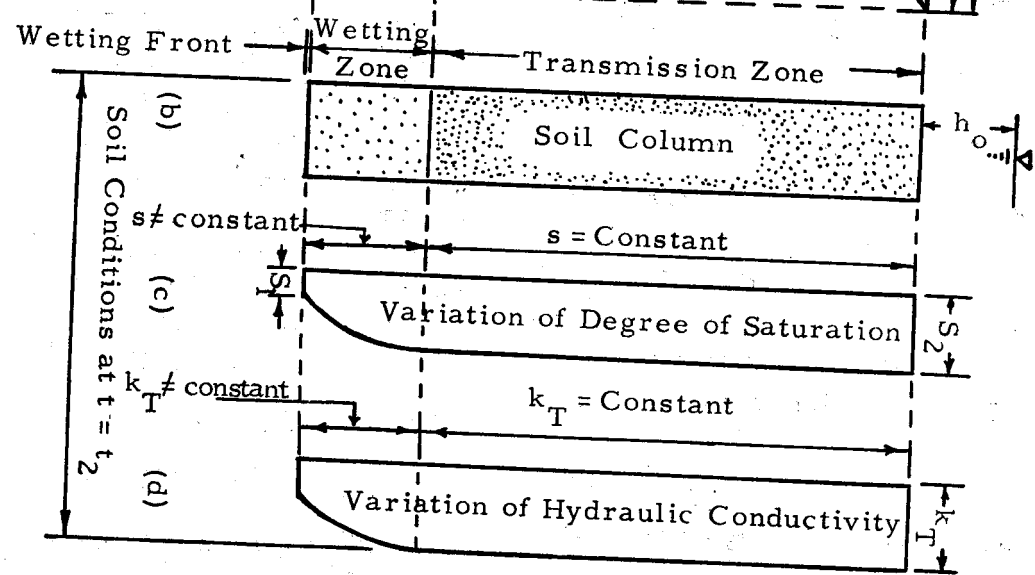
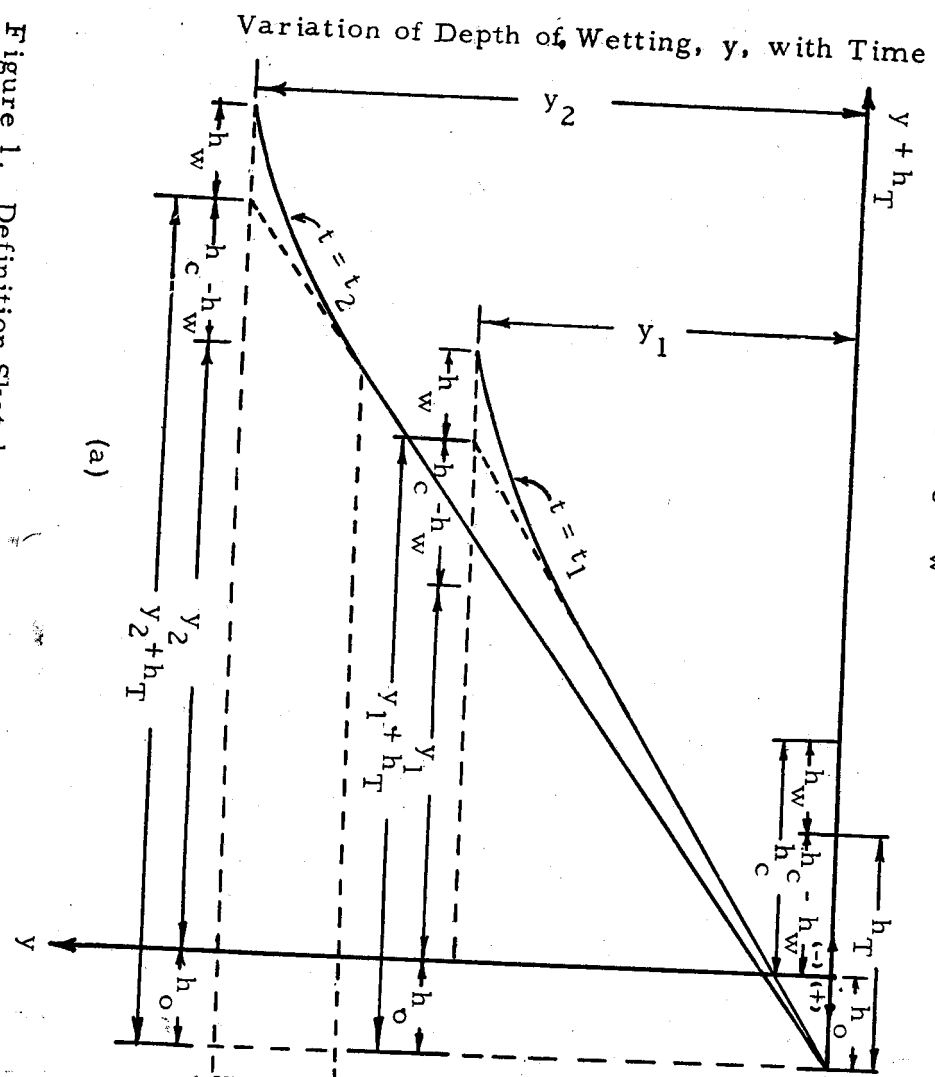


Figure 1. Definition Sketches:

- (a) Relationship of Hydraulic Head, Depth of Wetting and Time during Infiltration.
- (b) Soil Column with Three Distinct Zones at $t = t_2$
- (c) Variation of Degree of Saturation at $t = t_2$
- (d) Variation of Hydraulic Conductivity at $t = t_2$

因此可選取甚多之比值計算之列如表壹

表壹： $\frac{y}{h_T}$ 與 $\frac{k_T t}{nsh_T}$ 對應數值表列

y/h_T	$k_T t/nsh_T$	y/h_T	$k_T t/nsh_T$
0.01	0.000005	1.00	0.3068
0.02	0.00020	2.00	0.9014
0.03	0.00044	5.00	3.208
0.05	0.00120	10.0	7.602
0.07	0.00230	20.0	17.000
0.10	0.00470	30.0	26.600
0.3	0.0376	50.0	46.100
0.5	0.0945	70.0	65.750
0.7	0.1700	100.0	95.385

利用公式 6 所表示之關係及表壹所列之對應數值，可以用圖解法解出滲入率與時間之關係；圖貳由四象限所構成，每一象限均用相同大小之對數紙為製圖之用，象限 A（第四象限）以時間 t （分鐘）作橫軸， $k_T t/nsh_T$ 為縱軸， k_T 之單位為英吋 / 分鐘； h_T 之單位為英吋，該象限內之斜直線族係由不同比值之 k_T/nsh_T 所訂定。

象限 B（第三象限）以 $\frac{k_T t}{nsh_T}$ 為縱軸， $k_T/I - k_T$ 為橫軸，以表壹所列之數值繪得一曲線在象限內，如公式 6 所表示之關係，故屬可行。（ I 之單位為英吋 / 分鐘）。

象限 C（第二象限）以 $k_T/I - k_T$ 為橫軸， I 為縱軸；象限內之曲線族乃以不同數值之 k_T 值代入一定之 $k_T/I - k_T$ 比值中解出 I 值所訂定。

象限 D（第一象限）以 I 為縱軸， t 為橫軸所構成。

合此四象限如圖貳後，倘土壤物理因素 k_T , n , s 及 h_T 均已量得，則選定一滲入時間時，可藉圖貳決定得相對應之滲入率；反之如選定某一滲入率亦可由之繪定相對應之時間也。

例如已知 $k_T=0.007$ 吋/分， $n=0.4$, $s=0.5$ 及 $h_T=35$ 吋 倘選定時間 $t=100$ 分鐘時可自第象限 A 之時間橫座標之 100 分鐘處起劃一垂直線向下交於 $k_T/nsh_T=0.007/0.4(0.5)35=0.01$ 之線，然後自該交點向左劃一水平線進入象限 B，交該象限內唯一之曲線後，於該交點劃一垂直線向上，進入象限 C 之後交 $k_T=0.007$ 吋 / 分之曲線上；然自該交點引一水平線向右，交象限壹之縱軸 I ，該點之讀數即為滲入率 $I=0.02$ 吋/分，延長該水平線進入象限 D，與自該象限之橫軸 $t=100$ 分鐘所劃向上之垂直線相交；該交點之座標即為 ($t=100$ 分鐘， $I=0.02$ 吋/分)。依上述方法，可決定多點於象限 D 之中（見圖貳）；由此可見滲入率與時間在對數紙上之關係為曲線關係。此可由公式 7 預見之；蓋公式 7 表明滲入率與時間為部分對數函數也。

土壤空隙率，水分含量，導水係數及傳導層水頭損失均可自田間或實驗室直接測定之；但亦可自測定之滲入率與時間之關係，利用圖貳間接推定上列某一土壤物理因素之數值；例如利用圖貳及已測得之滲入率與時間，可間接推算 nsh_T 之乘積所值，倘 k_T 為已知。則可始自象限 C 由已量得之 I 值劃一水平線交已量得之 k_T 值之曲線於該象限中；自該交點劃一垂直線向下交象限 B 中唯一之曲線後，自該交點劃一水平線進入象限 A；又自象限 A 之時間橫軸選出已知 I 所對應之時間 t 起劃一垂直線向下交自象限 B 延伸而來之水平線於一點，此點所示之 k_T/nsh_T 比值既已決定，因 k_T 為已知，則 nsh_T 自可計算而得也。

利用 Miller 與 Gardner 兩氏之實驗數據（見 Water Infiltration into Stratified Soil, Soil Science Society of American Proceeding p. 115, 1962）為例 可計算出其實驗之 nsh_T 值；列如表貳。此等數值幾為一常數，故可作為例證，說明在均勻之土壤中， n , s 及 h_T 各土壤物理因素之數值為常數值。

表貳、當 t , I 及 k_T 為已知值時 nsh_T 之計算值

t 分鐘	1	2	5	10	20	50	100	167
I 公分/分鐘	0.438	0.310	0.2	0.145	0.108	0.076	0.058	0.049
nsh_T 公分	22.2	21.2	20	20.5	20.4	22.5	23	24.5
平均	$nsh_T = 21.8$ 公分							

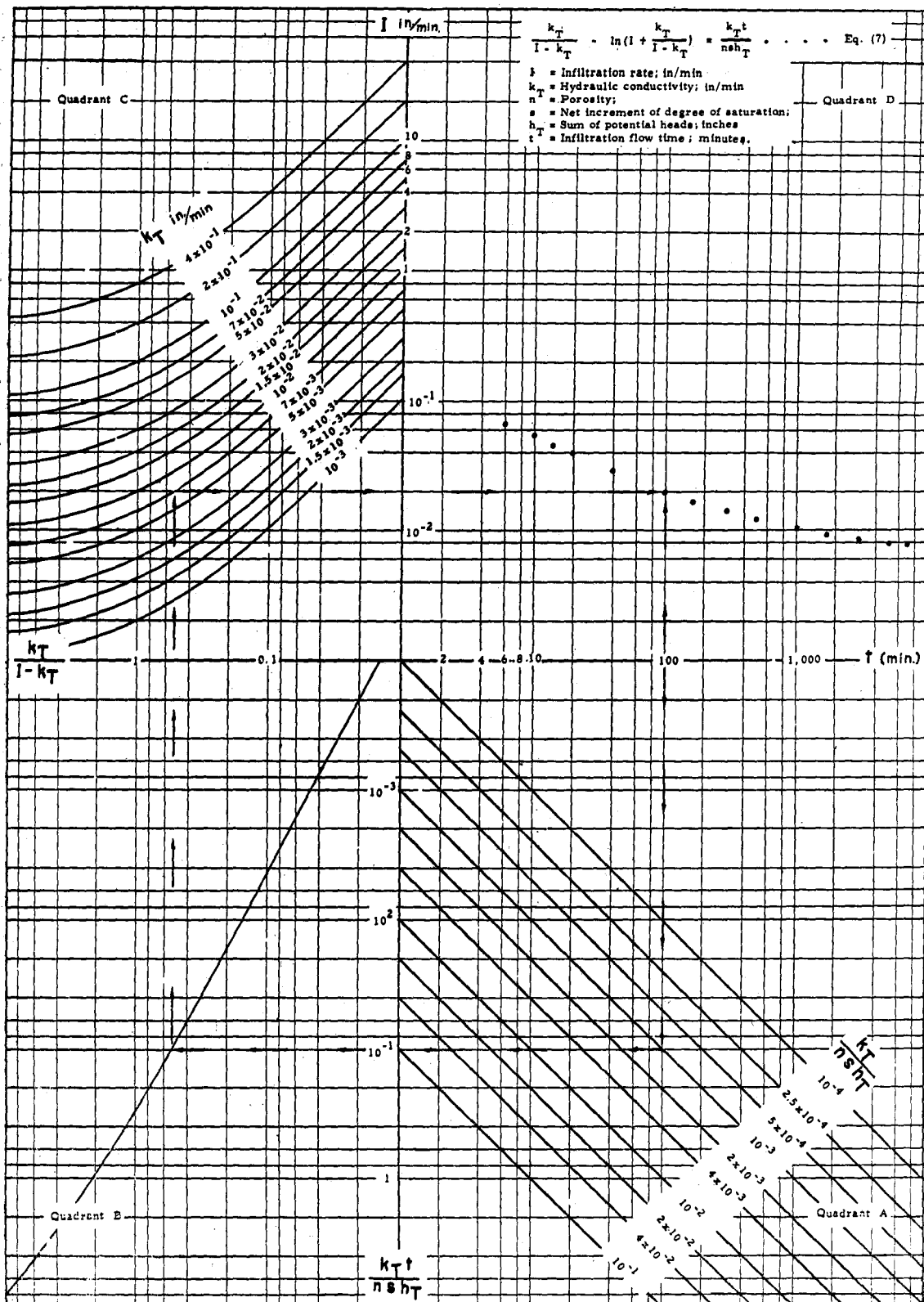


Figure 2. Coaxial Chart for the Graphical Solution of Infiltration Rate to the Flow Time for Homogeneous Soils.

累積滲入水深公式之圖解法

圖參係公式 9 之圖解，其構作方法與圖貳相仿；象限 A 及 B 之構作則與圖貳者完全一致。象限 C 以 d_a/nsh_T 為橫軸， d_a 為縱軸（單位為英寸），象限 C 內之直線係以不同之 nsh_T 值代入 d_a/nsh_T 之比值中決定。象限 D 以累積滲入水深， d_a 為縱軸；時間， t ，為橫軸所構成。倘土壤物理因素 k_T, n, s 及 h_T 均已量得；則利用不同之滲入時間，可藉圖參決定其相對應之累積滲入水深。其方法與用圖貳求滲入率者相同。例如仍用 $k_T=0.007\text{in}/\text{min}$ $n=0.4$ $s=0.5$ 及 $h_T=35\text{in}$ ，可決定多點於圖參象限 D 之中（見圖參）。由此可見累積滲入水深與時間之關係在對數紙上仍為曲線關係。亦與公式 9 所顯示之形式相同。

傳導層導水係數， k_T 固可由直接測定；但亦可利用圖參作間接之推定，倘 d_a, t, n, s 及 h_T 各值為已知；其步驟為自象限 C 之累積滲入水深 d_a 縱軸上選取已知之 d_a 值，向左劃一水平線交已知之 nsh_T 乘積所值之直線後；自該交點向下作垂直線進入象限 B 與該象限內之唯一曲線相交於一點，然後自該交點向右劃一水平線進入象限 A，與自象限 A 之時間橫軸上選定對應 d_a 值之時間 t 所劃向下之垂直線相交於一點，此交點所示為 k_T/nsh_T 之比值，既已決定，則因 nsh_T 為已知，故 k_T 值可計算而得。

根據 Miller 與 Richard 兩氏之實驗數據（見 Hydraulic Gradients During Infiltration in Soils, Soil Science Society American Proceeding 17:33-38, 1952）為例，可計算 k_T 值列於表參。

表參、利用已知之 t, d_a, w, A_s 及 h_T 值計算 k_T 值

土壤: Tanbark; $w=0.25, A_s=1.4$				土壤: Hesperia; $w=0.21, A_s=1.58$			
t 分	d_a 公分	h_T 公分	k_T 公分/分鐘	t 分	d_a 公分	h_T 公分	k_T 公分/分鐘
20	3.5	54	0.11	20	3.5	27	0.027
40	5.0	52	0.15	40	4.6	28	0.022
60	6.3	51	0.16	60	5.7	29	0.020
80	7.5	51	0.16	80	6.5	28	0.020
100	8.2	49	0.15	100	7.3	28	0.019
200	11.8	49	0.14	200	11.0	25	0.020
300	15.1	48	0.13	300	14.4	26	0.020
400	17.9	50	0.14	400	17.7	25	0.021
500	20.3	47	0.14	440	19.2	25	0.021
平均 $k_T=0.014$ 公分/分鐘				平均 $k_T=0.021$ 公分/分鐘			

由表參之計算結果可知當其他土壤因素 w, A_s 及 h_T 趨近於常數值時， k_T 之值亦趨近於一常數。故亦可作為例證，說明當土壤為均勻性時，各土壤物理因素為常數。

再根據 Free, Browning 及 Musgrave 三氏

之實驗數據（見 Relative Infiltration and Relative Physical Characteristics of Soils, Technical Bulletin, USDA, #729, July, 1940, Washington, D. C.）利用已知之 t, d_a, k_T, n 及 s 計算 h_T 值列於表肆。

表肆、利用已知之 t, d_a, k_T, n 及 s 值計算 h_T 值

土壤號碼: 105; $k_T=0.0225$ 吋/分 $w=0.113; A_s=1.38$			土壤號碼: 137; $k_T=0.0275$ 吋/分 $w=0.097; A_s=1.28$		
t 分鐘	d_a 吋	h_T 吋	t 分鐘	d_a 吋	h_T 吋
15	1.87	25.2	15	1.73	20.0
30	2.95	29.0	30	2.69	22.2

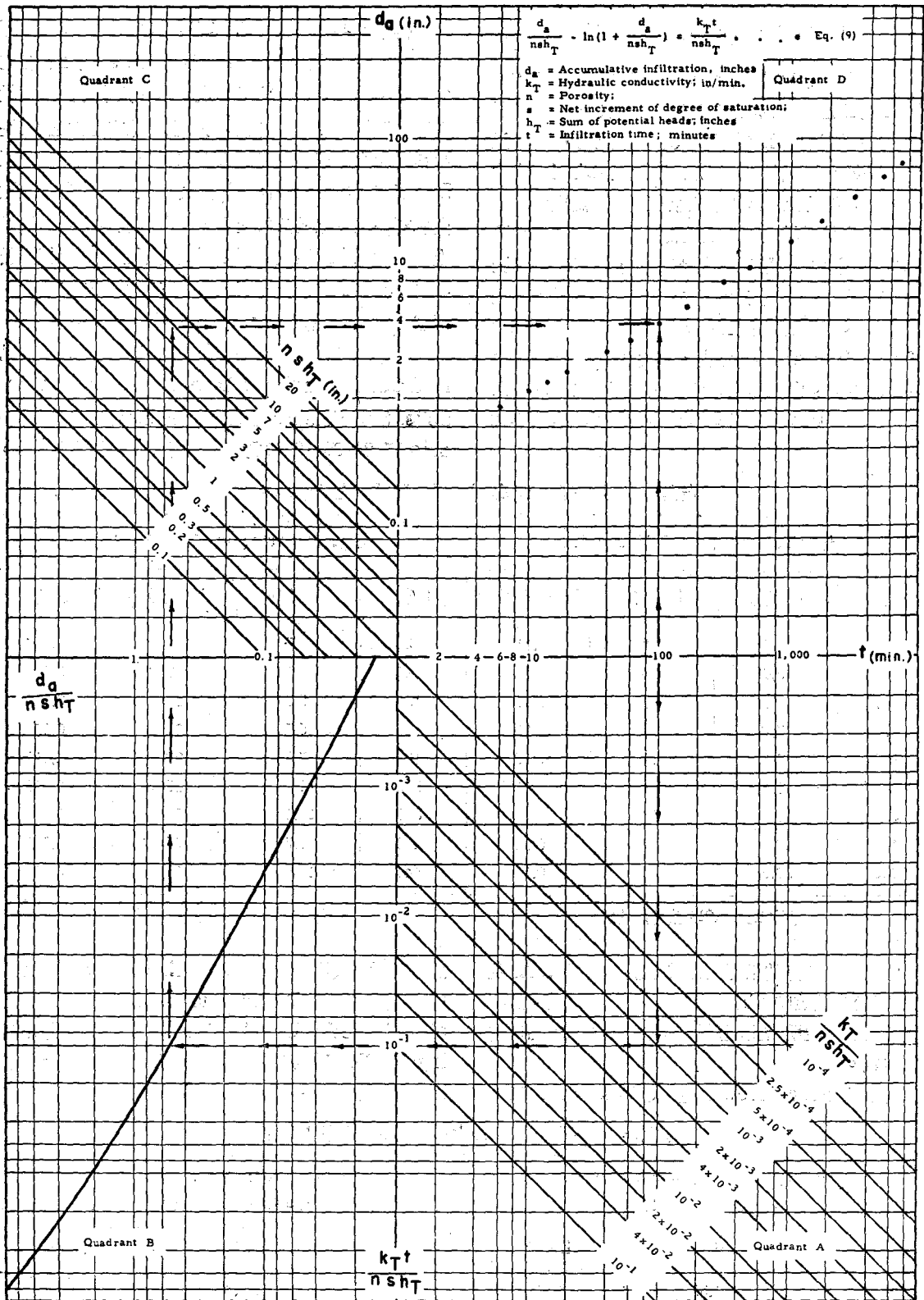


Figure 3. Coaxial Chart for the Graphical Solution of Accumulative Infiltration to the Flow Time for Homogeneous Soils

60	4.42	28.5	60	4.15	21.5
120	6.62	26.0	120	6.93	25.0
180	8.49	24.0	180	9.81	30.7
平均 $h_T=26.5$ 吋			平均 $h_T=23.9$ 吋		

表肆之土壤數據分表土與心土，其物理性或有差異之處，但計算結果顯示首四項數據仍趨於一常數，最末一組數據已顯出差異之處，此或係該時心土之影響已趨顯著所致也。

以指數函數表示滲入率之限制

以指數函數表示滲入率之形式概有兩種如下：

$$I = at^b \dots\dots\dots(11)$$

$$I = at^b + c \dots\dots\dots(12)$$

式中之 a , b 及 c 均為實驗常數。

公式11與公式12在對數紙上之形均為直線式。此顯示利用公式11或12以表示滲入率時，僅適用於較短之時間範圍之內：蓋吾人已在本文所示之公式7或圖貳得知滲入率在對數紙上之形式為曲線也。換言之曲線之一段往往可以直線表示而不致有顯著之誤差；但倘以一直線代表一曲線之全部，則往往有顯著之差異。以圖貳象限 D 所示諸點為例，在 $t=4$ 分鐘至 $t=300$ 分鐘之間，可利用一直線代表之；而得下列之指數實驗公式

$$I = 0.14t^{-0.408} \dots\dots\dots(13)$$

或

$$I = 0.16t^{-0.544} + 0.007 \dots\dots\dots(14)$$

應用公式13或14之限制為注意不超逾 $t=4$ 分鐘至 $t=300$ 分鐘之範圍；此可以驗算證明之。當時間 $t=1,000$ 分鐘時，用公式13計算所得滲入率之結果比實際者少百分之廿六。如用公式14計算，則所得之滲入率比實際者多百分之廿五。

同樣的以指數形式表示累積滲入率亦僅適用於建立該實驗式有效範圍以內。如圖叁象限 D 內所示者，在 $t=4$ 分鐘至 $t=300$ 分鐘內可以用下兩式表示

$$d_a = 0.3t^{0.548} \dots\dots\dots(15)$$

$$\text{及 } d_a = 0.333t^{0.464} + 0.007t \dots\dots\dots(16)$$

但應用上兩式時，時間應限止於 $t=4$ 分鐘及 $t=300$ 分鐘之間。此亦可用驗算證明之。當 $t=1,000$ 分鐘時，應用公式15所得之結果比實際者少2.6吋。用公式16則多0.5吋。總言之，以指數形式表示滲入率之實驗式時得注意其適用範圍，用指數形式表示滲入率有簡單便利演算之效，故一般田間工作者樂用此形式表示此土壤與水間之物理現象——滲入率，蓋在未明瞭公式7或公式9所表示之含義之前，以短時間觀察滲入率之變化，結果往往不期而然以指數關係表示滲入率與時間之實驗關係也。

結 語

滲入率係土壤物理特性之一，其應用上牽涉之範圍至廣；影響土壤滲入率之物理因素亦至多，研究此問題之論著至多，惟迄今仍無一可行善法以推求其真義。本文引用 Darcy 氏定律以為分析之基礎，導出滲入率及累積滲入率之公式見公式7及公式9，並以圖解方法以求其答案；並引用前人已發表之實驗數據，以驗算之。其結果顯示公式7及公式9有相當之可靠性。雖然公式7及公式9所根據之假設侷限其應用之範圍。筆者未敢蔽帚自珍，為本文以供讀者諸君研討，期收拋磚引玉之效。亦盼我同道多示良策，廣思集益，將有助於將來改進也。

Abstract

An equation showing the relationship of water infiltration, time, soil porosity, soil moisture content before and after infiltration, hydraulic conductivity, and the total head loss during the process of infiltration in the soil column was developed. The validity of the equation was established when the equation was applied to some published data from various sources.