實驗公式類型之判定及其作法

臺灣大學農業工程系副教授

易　　任

一、實驗公式(Empirical Formulas)之意義：

實驗或試驗工作對二相關量施行多次之試驗及觀測，而得一組對應之資料，繪入坐標系中，所得之點據，可作一光滑之曲線通過之。此一代表實驗資料之曲線，稱曰實驗曲線。故實驗公式乃代表施測量相關之函數式，亦即實驗曲線之函數式也。如試驗施測所得之點據，其分佈極為錯亂，簡單之光滑曲線，無由通過，則各量間為相互獨立，不相關屬；或是否由於實驗觀測之不精，結果錯誤有以致之，故應審愼。吾人求作實驗公式之目的，約有二種，一為決定各量相關之物理定律，二為探求一簡單實用之公式，以利工程上之解算。依第一目的，公式之形式，應力求精確。至於後者工程上實用之公式，則以簡捷便利為主。當實驗公式求得後，二量任知其一，則另一値即可逕依公式解算得知。

二、實驗公式之作法：

實驗公式之作成，有二主要步驟：第一為設法判定公式之類型，寫出二量相關之函數式，內函待定之常數a、b、c……等。第二為將實驗資料代入，或藉作圖或憑計算，求得待定常數a、b、c等之最或是値 (Most Probable Value)，代入原式，公式乃告確立。一般言之，常數之決定，有確定可靠之方法，類型之判定，則難在確有把握，方法亦較不精密。

三、實驗公式之類型：

實驗公式之類型，有時可藉實驗工作之性質及內容，獲得相當提示，而能預知決定之，惟此法常不可恃。但將實驗資料繪入坐標系中，點據之分佈情形，顯然可大別之成為二大類，第一類為無週期變化之普通曲線；另一類則為週期性曲線。週期性曲線之應用則較少。無週期性之普通曲線，其類別甚為繁多。工程上應用最廣者，計有直線、拋物線、双曲線、指數曲線等四種，另附三變量之實驗公式一併論列如第一表。

第一表　工程上常用之實驗公式之類型

編　號	公　　式	類　　型
(I)	$y=a+bx$	直　　線
(II)	$y=bx$	直　　線
(III)	$y=ax^b$	拋 物 線
(IV)	$y=a+bx+cx^2$	拋 物 線
(V)	$y=a+bx^c$	拋 物 線
(VI)	$(x+a)(y+b)=c$	双 曲 線
(VII)	$y=a/(x+b)$	双 曲 線
(VIII)	$y=a+b\cdot c^x$	指數曲線
(IX)	$y=a+bx+c\cdot d^x$	指數曲線
(X)	$y=a\cdot 10bx^c$	指數曲線
(XI)	$y=a\cdot x^b.z^c$	三變量曲線

四、實驗公式類型之判定：

依據解析幾何之原理，凡二相關量繪於方格紙上而成一直線者，其關係則可以下式表之

$$y=a+bx \quad\cdots\cdots(1)$$

式中b為該直線之斜度，a為x＝o時在y軸上之截距，其值均易求得。如(1)式中y以log y代之，則得指數公式，如第一表中之(VIII)式。是以根據解析幾何之原理，對資料施行特殊之處理，或者採用特製之格紙，如對數格紙，半對數格紙等，可改曲線而成直線。如(1)式，根據直線之斜坡及截距，即能決定常數a及b之値。第二表所示，為改曲線為直線之各種方法。凡實驗資料之因第二表中處理方法，而果能改為直線者，即可將公式之類型，予以判定，是為幾何判定法。

又自代數學中之級數言之，設變量x成等差級，對應値y之n－1級差$\Delta^{n-1}y$亦成等差級數，或n級差$\Delta^n y$成常數，則y與x之相關函數式為：

$$y=a+bx+cx^2+\cdots\cdots+qx^n \quad\cdots\cdots(2)$$

y之n級差$\Delta^n y$，其意義可自下表明之；例如三級差$\Delta^2 y_3=\Delta^2 y_4-\Delta^2 y_3$，餘仿此。

y 値……	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	…
一級差 Δy …	Δy_1	Δy_2	Δy_3	Δy_4	Δy_5	…	
二級差$\Delta^2 y$ …	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^2 y_4$	…		
三級差$\Delta^3 y$ …	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^3 y_3$	…			

第一表中之(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅳ)三式，均可藉此判定之，是曰代數判定法。

又如x成等差級數，y之n級差成等比級數者，則爲(Ⅷ)式$y=a+b、c^x$ ………………………………(3)

代數判定法之證明，詳Running氏所著「實驗公式」一書中，茲不贅述。

茲將上述各種實驗公式類型之判定方法，分幾何判定法及代數判定法兩欄，列如第二表，以便參閱。

第二表　實驗公式類型之判定法

公式類型	幾何判定法	代數判定法
(Ⅰ) $y=a+bx$	y對x：成直線	x等差；y亦等差。
(Ⅱ) $y=bx$	y對x：成直線	y爲x之倍數。
(Ⅲ) $y=ax^b$	$\log y$對$\log x$：成直線	x等比；y亦等比。
(Ⅳ) $y=a+bx+cx^2$	$(y-y_1)/(x-x_1$對$x-x_1$：成直線　　$\log(y-a)$對$\log x$：成直線	x等差；y之二級差成常數。
(Ⅴ) $y=a+bx^c$	$a=\dfrac{y_1y_3-y_2^2}{y_1+y_3-2y_2}$，$x_2=\sqrt{x_1x_3}$	x等比；△y亦等比。
(Ⅵ) $(x+a)(y+a)=c$	$(x-x_1)/y-y_1)$對$(x-x_1)$：成直線	
(Ⅶ) $y=a/(x+b)$	$1/y$對x：成直線	x等差；$1/y$亦等差。
(Ⅷ) $y=a+b\cdot c^x$	$\log\triangle y$對x：成直線	x等差；△y成等比。
(Ⅸ) $y \parallel a+bx+cd^x$	$\log\triangle^2 y$對x：成直線	x等比；$\triangle^2 y$亦等比。
(Ⅹ) $y=a;10^{bx^c}$	$\log(\triangle\log y)$對$\log x$：成直線	x等比；$\triangle^2 y$亦等比。
(Ⅺ) $y=a\cdot x^b\cdot z^c$	x(或z)爲常數；y與z(或x)下相關如(Ⅲ)式者。	

五、實驗公式常數之求法：

依據上述方法，將實驗公式之類型決定以後，乃寫出函有待定常數之公式，次將實測之資料代入，解求待定之常數，計有三種不同之求法，計(一)作圖選點法，(二)分組平均法，(三)最小二乘法，茲分述如下：

(一) 作圖選點法：將試驗資料，繪入方格紙中，以光滑之曲線，平均通過所作之諸點據，待定之常數如爲n個，則選最接近於曲線之n個點據，取其對應之實測資料，寫出n個方程式，聯立解之待定之常數即可求得。吾人常用者，乃爲根據幾何判定法，改曲線爲直線，依斜坡及截距，可決定常數二個；常數超過兩個時，可依解析幾何原理，分批設法求定之。

(二) 分組平均法：令每一點據至最佳代表曲線間之距離，稱曰殘差（Residual）。分組平均法，乃將資料分成多組，而令每組殘差代數和爲零之方法也。關於資料之區分，在使組數等於待定常數之個數n，而每組之點據，在以均等爲原則。寫出每組殘差代數和爲零之條件式共n個。聯立解求待定之常數。

(三) 最小二乘法：實驗公式之類型既經判定之後，將N對實測資料，代入公式，得N個觀測等式，待定之n個常數，則反成爲式中之未知量。N之值恒較n爲大，按諸最小二乘法原理，所求得之常數爲最或是值時，殘差平方之總和，必當爲最小值。以殘差平方總和之式，對n個待定常數分別施行偏微分，均應爲零。因之得待定常數之正等式 (Normal Equation) 亦爲n個，聯立解之，即可求得待定之常數。

六、方法之比較：

作圖選點法之工作，淺顯簡易，最爲衆所樂用，依據幾何判定法，決定公式之類型，必須經過作圖之手續，是以藉助本法可將常數一併求出，一舉兩得。唯作圖法之精度，在上述三法中究屬最低，又同一資料，由不同人員，或同一人員於不同之時間爲之，均難得一致之結果，是其缺點。

分組平均法爲計算之工作，亦屬簡易，精度且較作圖法爲高。公式之類型判定無誤後，常可用本法計算之。但以不同之組合法分組，其結亦稍有不同。

最小二乘法爲最精確之方法，任何人作之，均得相同之結果。惟計算工作，至爲繁冗。如公式必須力求精確，及原資料甚爲精密時，始採用之，而公式之類型，亦應先行妥爲判定。

七、實驗公式之精度 (Precision)

如五節中所述，由實驗資料推求待定之常數，先組正等式，而後據以解求之。將x值代入所得之實驗公式，解求對應之y計算值，與原資料之諸個y實測值對照比較而得殘差，取殘差平方總和之值代入相當之精度公式如中差(Probable error) n式或平方差 (Mean square error) e公式中，可得y之計算值與實測值相差之平方差或中位差，亦即該實驗公式之

精度。

八、舉　　例

玆於某一河流，在其垂直測線上測得各點之流速V與水深D之關係爲：

水深D（呎）：	0.1D	0.2D	0.3D	0.4D	0.5D	0.6D	0.7D	0.8D	0.9D
流速V（呎/秒）：	4.481	4.730	4.882	4.931	4.880	4.729	4.478	4.128	3.679

試求流速V與水深D之關係式。

解：以x代水深，y代流速。

（一）代數判定：

x成等差

y之一級差$\Delta^1 y$：0.249;0.151;0.051;−0.051;−0.151;−0.251;−0.350;−0.449

y之二級差$\Delta^2 y$：−0.098;−0.100;−0.102;−0.100;−0.100;−0.100;0.099

y之三級差爲等差，故方程式判型爲：

$y=a+bx+cx^2$ ……………………………(1)

（二）幾何判定：

$(y-y_1)/(x-x_1)$與$x-x_1$繪於方格紙上成直線，如圖一，故公式如上之判定無誤。

(1) 作圖選點法：令 $y=Y+y_1$、$x=X+x_1$代入 (1) 式：$Y+y_1=ab(X+x_1)+c(X+x_1)^2=(a+bx_1\ cx_1^2)+(bX+2cx_1X)+CX^2$

$\therefore Y=(b+2cx_1)X+CX^2$

即$Y/X=b+2cx_1+CX$

計　算　表　一

X	Y	y/x	$4.289x-4.99x^2$	$a=y-(4.289x-4.99x^2$
0.0	0	…	0.3790	4.1020
0 1	0.249	2.49	0.6582	4.0718
0.2	0.400	2.00	0.8376	4.0434
0.3	0.450	1.50	0.9172	4.0138
0.4	0.401	1.00	0.8970	3.9830
0.5	0.248	0.496	0.7770	3.9520
0.6	−0.003	−0.005	0.1572	4.3208
0.7	−0.353	−0.504	0.2376	3.8904
0.8	−0.802	−1.000	−0.0618	+) 3.7408
				36.1190

如圖一所作直線之坡度，即爲常數 C之值，是以

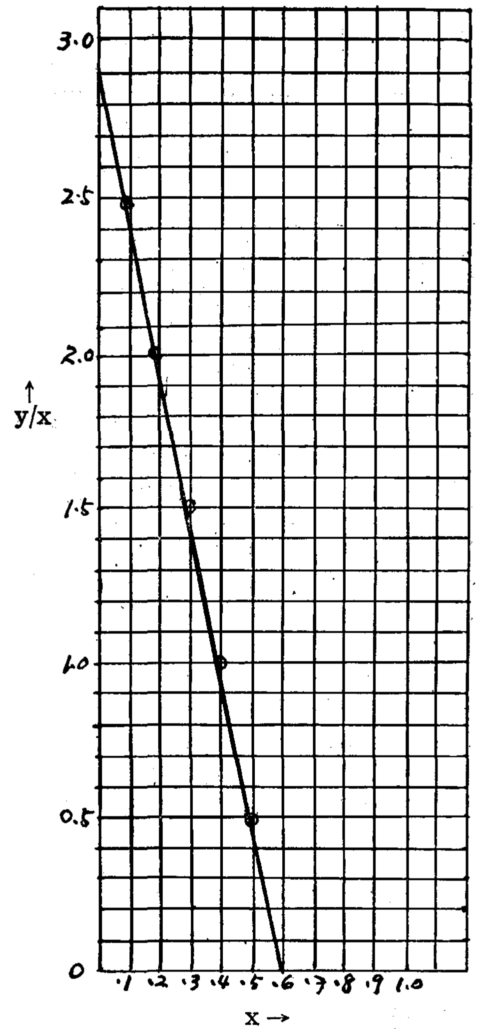
$$C=\tan\alpha=\frac{2.49+0.005}{0.6-0.1}=4.99$$

縱坐標之截距$=b+2cx_1$

本題中已知$c=-4.99$、$x_1=0.1$，即

$3.3=b-2(4.99)(0.1)=b-0.989$

圖　一



$\therefore b=4.289$

將以上求得之值代入原式，則如表一最後一行求得a之平均值爲$a=36.190/9=4.021$，故所求之公式爲

$y=4.0121+4.289x-4.99x^2$

(2) 分組平均法：

以$(y)-(a)-(x)b-(x^2)c=0$

分爲三組求之。計算表二

I			II			III		
x	y	x^2	x	y	x^2	x	y	x^2
0.1	4.481	0.01	0.4	4.931	0.16	0.7	4.478	0.49
0.2	4.730	0.04	0.5	4.880	0.25	0.8	4.128	0.64
0.3	4.881	0.09	0.6	4.729	0.36	0.6	3.679	0.81
$\sum$0.6	14.092	0.14	1.5	14.540	0.77	2.4	12.285	1.94

故得 $\begin{cases}14.092-3a-0.6b-0.14c=0\\14.540-3a-1.5b-0.77c=0\\12.285-3a-2.4b-1.94c=0\end{cases}$

解之 $a=3.9\quad b=4.00\quad c=-5.01$

$\therefore\quad y=3.9+4x-5.01x^2$

(3) 最小二乘法：

$[(y-a-bx-cx^2)]=$最小

將該式分別對a、b及c偏微分，得a、b及c之三正等式，即

$(a)+(x)b+(x^2)c-(y)=0$

$(x^2)b+(x^3)c-(xy)=0$

$(x^4)c-(x^2y)=0$

解求上式之係數得正等式（算表從略）

$$\left.\begin{array}{r}9a+4.5b+2.85c-40.917=0\\2.85b+2.025c-19.8565=0\\1.533c-12.2012=0\end{array}\right\}\text{正等式}$$

解之得 $a=4.131$；$b=3.997$；$c=-5.00$（解法略）

故得 $y=4.131+3.997x-5x^2$。

(4) 精度之比較：

計算表三　精度比較計算表

最小二乘法 $y=4.131+3.997x-5x^2$			分組平均法 $y=3.9+4x-5.01x^2$			作圖選點法 $y=4.0121+4.289x-4.99x^2$		
y_1	V_2	V_1^2	y_2	V_2	V_2^2	y_3	V_3	V_3^2
4.481	0.0	0.00	4.249	−0.232	0.053824	4.391	−0.09	0.008
4.742	0.012	0.00015	4.4996	−0.230	0.052900	4.6702	−0.0598	0.0036
4.881	0.0	0	4.649	−0.232	0.053824	4.849	−0.032	0.001024
4.931	0.0	0	4.699	−0.232	0.053824	4.928	−0.003	0.000009
4.881	0.001	0	4.648	−0.232	0.053824	4.9066	0.0266	0.000724
4.731	0.002	0	4.497	−0.232	0.053824	4.7855	0.0565	0.003249
4.481	0.003	0	4.245	−0.232	0.053824	4.5644	0.0864	0.007560
4.131	0.003	0	3.894	−0.234	0.054756	4.2333	0.105	0.011025
3.681	0.002	0	3.442	−0.237	0.056169	3.8221	0.143	0.020449
$[V_1^2]=0.000171$			$[V_2^2]=0.48683$			$[V_3^2]=0.55754$		

由上表計算之結果分別代入中位差r之方程式

$$r=\pm 6745\sqrt{\frac{[V^2]}{n-m}}$$

得 $r_1=\pm 6745\sqrt{\frac{0.000171}{9-3}}=\pm 0.003574$

$r_2=\pm 0.189422$

$r_3=\pm 0.203718$

比較上述三種精度，最小二乘法之結果最爲精確自無問題，惟計算之工作甚爲繁冗，是其缺點，如在工程上之解算無須甚爲精確之公式時，則常可採用分組平均法及作圖法以節省時間。

參考文獻：

(1)Merriman：Method of Least Squares
(2)Running：Empirical Formulas
(3)唐藝菁：實用最小二乘式
(4)陳椿庭：工程數學

(上接第14頁)

表7：輸日香蕉腐爛率

年度	平均腐爛率（%）
民 46 年	4.47
47	4.14
48	5.37
49	6.42
50	5.98

上運輸機械化、合理化則可儘量減少擦傷率，又因可縮短搬運時間而減小腐爛率，而提高臺蕉品質。

五、結論

臺蕉在日本本來處在自然、歷史、地理等有利條件下獨佔市場，其品質、風味均優於中南美蕉；但近年來由於臺蕉產量、產出季節、外觀、腐爛率及價格等各方面較爲遜色而受到外蕉的威脅，但這些缺點大都屬後天性者，人爲的因素很大。今後臺蕉欲確保在日本市場，進而窺視世界其他各地大市場，與各國產香蕉競銷，其栽培、管理、運銷等均需進一步重新研討預以加強，群策群勵使臺蕉立於不敗之地；國家有幸，蕉農有福焉。

參考文獻

1. 臺灣農業年報
2. 自由中國之工業
3. 臺灣土地銀行：臺灣省作物栽培調查統計