淺水流水理特性之研究

Study on the Shallow Water Flow

劉　金　龍　*Chin-LungLiu*

一、概　說

一般而言，由於降雨所形成之水流在坡度較陡之山地或邊坡上，呈現一條細線之水流，其水深平常僅數公厘，最大也不超過數公分。此種水深甚淺之水流由上而下在極短時間內向平地滙集而流。然在此過程中其水流之狀態多半以二次元的方向呈爲「面上流」(Surface Runoff)。爲正確了解此種面上流起見吾人將此種水流定名爲層流。(Thin Sheet flow)又名淺水流 (Shallow Water flow)。

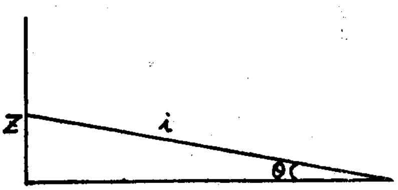
從淺水流漸增成爲水深較深之水流時，由越過(Critical Range)層臨界域變爲域完全亂流(Turbulent flow)，此時其水流之過程必須依照雷諾數(Reyno's Number)規範發展。

爲澈底了解淺水流之特性，凡自由表面流所支配之抵抗法則 (Law of Resistance)，可由通常之雨水流，道路路面排水之基本問題來研討，並以各種斷面形式及摩擦抵抗法則補正其正確性。本文就淺水流之特性來加以研討，求出發展過程與水理情況演算，加以應用。

二、層流之特性

依照理論計算與實驗結果之比較，淺水流之臨界域約爲雷諾數$\frac{VR}{\nu}$，500至1,500之間。玆將層流發展之過程與自由表面所受之抵抗法則分述如後：

(1)層流之抵抗法則 (Law of Resistance for thin sheet flow)：假定在某一平面之底面上取一原點爲X軸，由此底面垂直向上者爲Z軸，則二次元等水流之情形下，依照史脫克律 (Stork's Law)，將水流運動方程式列爲如下；



圖一

如圖所示　i＝底面坡度

θ＝傾斜角

μ＝Z點之流速

ν＝動粘係數

g＝重力加速度

$$\frac{d}{dZ}\left(\nu\frac{du}{dz}\right)=-gi \cdots\cdots(1)\quad 但\ i=\mathrm{Sin}\theta$$

今假定水深爲 h，$Z=0$，$u=0$：$Z=h$，$\frac{bu}{dZ}=0$

條件，將(1)式二次積分得：

$$U=\left(\frac{gi}{\nu}\right)\left(hz-\frac{Z^2}{2^2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從(2)式中，再考慮摩擦速度　$U=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$，與底面剪應力

$\tau_0=\rho ghi$，此兩因素代入(2)式得一新方程式，

$$\frac{u}{U}=\left(U\frac{z}{\nu}\right)\left(1-\frac{Z}{2h}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

再由(3)式求平均流速V得，

$$\frac{v}{U}=\frac{Uh}{3\nu}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4a)$$

或

$$\frac{v}{U}=\sqrt{\frac{\nu h}{3\nu}}=\sqrt{\frac{Re}{3}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4b)$$

$$\tau_0=3\rho\nu\frac{v}{h}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

另外摩擦抵抗係數定爲f′，則由上式，$\tau_0=\rho U^2$

$$\tau_0=f'\rho\frac{v^2}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

得

$$\frac{v}{U}=\sqrt{\frac{2}{f'}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

從(4)，(7)，兩式可得對層流之摩擦抵抗係數之一般式如下；

$f'=\frac{6}{R_e}$式中 R_e 爲雷諾係數

(2)亂流之抵抗法則 (Law of Resistance for Turbulent Flow)；以上所述係層流之流況下，所

產生之摩擦抵抗法則，今如水流形成亂流時所產生之抵抗法則顯然與上述者不同。通常亂流抵抗基於兩種因素，一爲粗糙率所引起之因素，一爲斷面形狀所引起之因素。玆將兩因素叙述如下：

a.斷面所引起之粗率之抵抗法則：(i) 假定斷面平滑粗率低時，如圓管內亂流速度分佈，依照普爾頓，卡爾曼兩氏之研究，此種流速分佈成爲對數法則，可表示如下式：

$$\frac{u}{U}=A_s+\left(\frac{1}{k}\right)\log e\left(\frac{UZ}{\nu}\right) \cdots\cdots (8)$$

將上式應用於各種管路試驗，獲得 $k=0.4$，$A_s=5.5$，此爲一般管路滿流之結果，但若水面呈現自由表面的薄層水流時，A_s 之値並未呈現一定値[1]，尤在射流時比常流有更大之變化。由此在持有自由表面之明渠水路中，(2)，(8)兩式並不能自由應用，須視其水流不安定之程度決定其變化。由普爾頓氏之明渠運動輸送理論，展開硏討。爲達到實際應用起見將二次元流之對數法則在明渠水路之福祿數 (Froud Number) 與斷面所引起之抵抗實驗，結果得下列之關係：

$$F_r \leqq 0.89 \quad A_s=6.3$$
$$F_r \geqq 0.89 \quad A_s=6.0-5.75\log_{10} F_r+1.2\,(\log_{10} F_r)^2 \cdots\cdots (9)$$

此處 F_r 爲福祿數，亦即 $F_r=\frac{V}{\sqrt{gh\cos\theta}}$，其關係見圖一。其次，設K=0.4時求亂流之平均流速V，則得

$$\frac{V}{U}=A_s-2.5+5.75\log_{10}\left(\frac{Vh}{\nu}\right) \cdots\cdots (10)$$

由(7)式

$$\sqrt{\frac{2}{f'}}=A_s-2.5+5.75\log_{10}\left(R_e\sqrt{\frac{f'}{2}}\right) \cdots\cdots (11)$$

依照上項關係計算可求平滑面之水流抵抗法則，如以 R_e 爲斷面濕周，f_r 與 F_r 之關係可表示如下式：

$$F_r \leqq 0.89 \quad \frac{1}{\sqrt{f'}}=2.07+4.07\log_{10} R_e\sqrt{f'}$$

$$F_r \geqq 0.89 \quad \frac{1}{f'}=1.861-4.07\log_{10} F_r+0.849(\log_{10} F_r)^2+4.07\log_{10}(R_e\sqrt{f'}) \cdots\cdots (12)$$

(ii) 假定斷面粗率大時，於圓管內附着砂粒實驗粗率之亂流對數法則[2]式爲

$$\frac{u}{U}=A_r+\left(\frac{1}{k}\right)\log e\left(\frac{z}{K}\right) \cdots\cdots (13)$$

上式中K爲砂粒之直徑，又 A_r 之値通常爲 $\frac{VK}{\nu}$ 之函數，尤在 $\log_{10}\frac{VK}{\nu}\geqq 1.85$ 時 A_r 爲8.5，而 $k=0.4$，爲正確假定値起見將(13)式之 A_r 與 k 改正求得平均流速式爲

$$\frac{V}{U}=A_r-2.5+5.75\log_{10}\left(\frac{h}{K}\right) \cdots\cdots (14)$$

然上述之亂流狀態在水深甚淺之薄層流時，其抵抗法則爲對數法則型式。爲達到解析法上容易獲得結果起見，引出通常所採用之曼寧平均流速公式(Manning's formula) 來比較上述對數法則之關係；一般而言，指數型式之平均流速公式可書爲：

$$\nu=\frac{1}{n}h^{1/2+P}\,I^{1/2+q} \cdots\cdots (15)$$

但此時 $I=i=\sin\theta$

上式又將改爲 $\frac{\nu}{V}=\left(\frac{1}{\sqrt{gn}}\right)h_p\,I_q \cdots\cdots (16)$

如 $P=0$，$q=0$，則(16)式爲蔡氏公式(Chezy Formula)

如 $P=\frac{1}{6}$，$q=0$，則(16)式爲普通曼寧公式 (Manning Formula)。

今提出蔡氏與曼寧氏兩公式中之粗糙係數 C，n 來討論之：

蔡氏公式 $C=\sqrt{g}\,\frac{\nu}{V}=\sqrt{\frac{2g}{f'}} \cdots\cdots (17)$

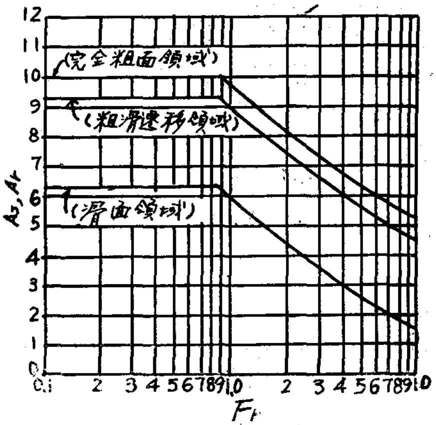
曼寧氏公式 $n=\left(\frac{h^{1/6}}{\sqrt{g}}\right)\Big/\left(\frac{v}{V}\right)=h^{1/6}\sqrt{\frac{f'}{2g}} \cdots\cdots (18)$

將前面(10)，(14)兩式各代入(17)，(18)兩式，可得 C，n 與對數法則式之關係如下：

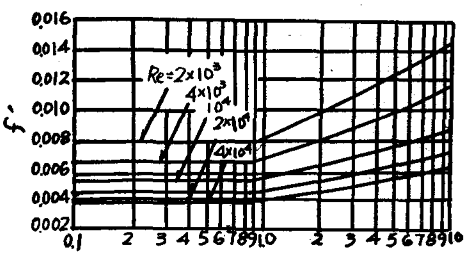
$$\text{平滑面時，}\left\{\begin{aligned} C&=\sqrt{g}\left[A_s-2.5+5.75\log_{10}\left(\sqrt{ghI}\cdot\frac{h}{v}\right)\right]\\ n&=\left(\frac{h^{1/6}}{\sqrt{g}}\right)\Big/\left[A_s-2.5+5.75\log_{10}\left(\sqrt{ghI}\cdot\frac{h}{v}\right)\right]\end{aligned}\right\} \cdots (19)$$

粗糙面時，$\left\{\begin{array}{l} C=\sqrt{g}\left[A_r-2.5+5.75\log_{10}\left(\frac{h}{K}\right)\right] \\ n=\left(\frac{h^{1/6}}{\sqrt{g}}\right)\Big/\left[A_r-2.5+5.75\log_{10}\left(\frac{h}{K}\right)\right] \end{array}\right\}$ …(20)

以上兩式依照福祿係數，雷諾數與水深起變化，次外 n 值在粗糙面或平滑面皆有相當之理論式可演算，惟其演算之步驟繁雜，不易獲得理想之結果，故將n與I，V之關係式繪爲圖2及3以示其應用。



圖二：福祿數 F_r 與 A_s, A_r 之關係



圖三：摩擦係數 f' 與福祿數 F_r 雷諾數 R_e 之關係

爲實際引用方便起見，上式又可將 n 值以相當粗糙度 ks 表示，而 ks 值係表示實際河床質泥沙粒徑。由⒀式與⒅兩式化簡可得如下：

$$n=\left(\frac{h^{1/6}}{\sqrt{g}}\right)\Big/\left\{6.0+5.75\log_{10}\left(\frac{h}{K_s}\right)\right\} \cdots(21)$$

此式如用圖示可得第三圖。

b. 斷面形狀之影響：古利 (Keulegan) 氏將明渠水路之平均流速在粗糙斷面內所引起之關係列爲如下：

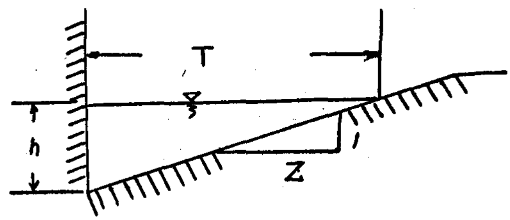
$$\frac{v}{U_R}=A_r-\frac{1}{K}+5.75\log_{10}\left(\frac{R}{k}\right)+\frac{B_K}{K}-\frac{\varepsilon v}{U_R}\cdots\cdots(22)$$

上式爲在管內之對數流速分佈法則所引導出來，另加自由表面之斷面剪應力之不均勻影響 $-\frac{\varepsilon v}{U_R}$。對於斷面之效果加 $\frac{\beta_K}{K}$，據實驗結果，上式在平滑水路時 $\varepsilon=-0.208$。

另外，不屬上述條件之「非平面」上之二次元水流，而僅僅爲道路側溝或帶有一定斷面之淺水水流，例如改良山邊溝，據 Keulegan 氏，岩垣氏等研究及實驗，認爲水深 h以動水半徑 R代替之。因此上述所列諸式如引用於矩形水路或有規則形水路時將h 代 R，U_R 代 $\sqrt{gRI}$ R_e 代 R_{eR}，得 $R_{eR}=\frac{vR}{v}$，F_r 以 F_{rR} 代，得 $F_{rR}=\frac{v}{\sqrt{gR\cos\theta}}$。式中 F_{rR} 稱爲樸斯克數 (Boussineq Number)。玆將斷面形狀不同之計算實例列舉如下：

計算例1. 求下圖所示道路側溝流量公式，假設曼寧公式粗率n，坡度爲I＝sinθ：

解：由圖4所示，



圖四：道路側溝斷面圖

$$A=h\cdot\frac{T}{2}=Z\frac{h^2}{2} \quad \because T=Zh$$

$$P=y+\sqrt{g^2+Z^2y^2}=\sqrt{1+Z^2h}+h$$

$$R=\frac{Zh^2}{h(\sqrt{1+Z^2}+1)}$$

∵Q＝AV，式中 A以上式代入，V以曼寧式代入

$$得\ Q=\frac{1.49}{n}\ \frac{(Z^{2/3}h^{2/3})/2^{2/3}}{(\sqrt{1+Z^2}+1)^{2/3}}\cdot I^{1/2}\cdot\frac{Zh^2}{2}$$

$$=\frac{0.47}{n}f(Z)h^{8/3}I^{1/2}\cdots\cdots(a)$$

$$(a)式中 f(Z)=\frac{Z^{5/3}}{(1+\sqrt{1+Z^2})^{2/3}}\cdots\cdots(b)$$

計算例2，假設K＝0.02cm之砂形成之坡度 $i=\frac{1}{50}$，

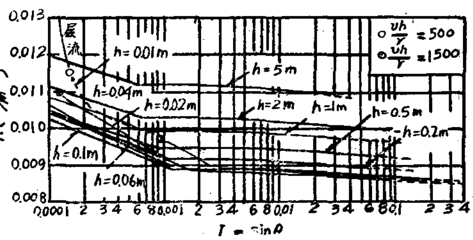
流量爲$q=30cm^3/sec/cm$，求曼寧式之粗度係數。

解：步驟 1，先假定 $v=0.01cm^2/sec$，則 $R_e=\frac{vh}{v}$

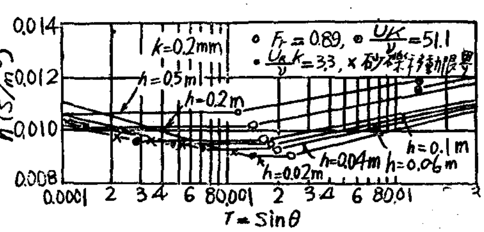
$$=\frac{q}{v}=3000$$ 。可知此爲完全亂流之狀態。

步驟 2，假定$\frac{K_S}{K}=1$，水深爲1cm左右，則由圖 5 求知$n \doteq 0.01 s/m^{1/3}$，因此$n=0.01$

從$q=\left(\frac{1}{n}\right)h^{5/3}\cdot I^{1/2}$計算h，



圖五：滑面粗度係數n與坡度I之關係($r=0.01cm^2/$)



圖六：粗面之粗度係數n與坡度I之關係(K=0.2mm)

$$1=\left(\frac{1}{0.01}\right)h^{5/3}\left(\frac{1}{50}\right)^{1/2}$$

$h=0.625cm$

將 h 代入曼寧公式得 $V=48cm/sec$ (平均流速)

步驟 3，由上述再求$U=\sqrt{ghI}=3.5cm/sec$

$$\frac{UK}{v}=7.0$$

又因$\cos\theta \doteq 1$故$F_r=\frac{V}{\sqrt{gh}}=1.94$

從圖2求得$A_r=7.5$

將上式再代入(21)式得$K_S=0.0298cm$

步驟 4，上述之相當粗度 K_S 於圖 6 查出 $n=0.01006$，此值與步驟 1 所假定者近似，故可決定所求之 n 值爲正確者。

三、結　　　論

如公路兩側之排水溝，山地邊坡之山邊溝，具有一定淺而寬之斷面，每遇雨水，水由橫向流入水路情形下，以前通常引用橫溢流型之溢流堰或急速渡槽之水流條件爲例，研究其水流之特性。然由雨水所引起之水流，常與溢流堰，渡槽等情況不同，必須另行研究，由此專對雨水所產生之淺水流進行一般之解析研究。本文所研討之問題只對雨水所形成之淺水流水流情形加以理論上之演算，如應用於道路側溝排水，飛機場之飛行道排水或丘陵地山邊溝排水等，均須將本文所導出之理論公式化爲應用式，採用圖表解析方法解出所求之諸問題。如此才能獲簡速之解法。

參　考　文　獻

(1) Powell. R.W.; Flow in a channel of definite roughness, ASCE Vol. 111 (1946)

(2) 石原藤次郎：薄層流に關する研究　土木學會論文第6號(1951)

(3) 石原藤次郎：應用水理學中Ⅱ

(4) V.T. Chow Open channel Hydraulics 1959