

最大拉強 $S=18,000$  PSI

此公式與 Fanning 公式，稍加變化，二者完全相同。

#### 4 Fairchild 公式

$$\text{原來之公式 } t = \frac{fd(P+P')}{2S} + \frac{0.03}{d^3}$$

$f$  為安全係數，用 4

$S$  為最大拉強用 20,000 PSI

$$\text{修改之公式 } t = \frac{fd(P+P')}{2S} + \frac{0.28}{d^{16}}$$

$f$  用 5，用  $S$  而 25,000 PSI

$P'$  亦為水錘之增壓，小管之數值與 Bracket 氏用者相同，16"至24"口徑則用 5 至 10 PSI。

此 Fairchild 公式曾見於美國軍工團 (Corps of Engineers) 某項工程計劃書中規定抽機之外殼必須符合該公式，但陸軍檢驗不知有此公式，致無法檢驗，詢諸其他製造廠，無人能知，請示上舉又有不便，適作者有此項資料在手，問題得以解決，

當時頗有一番搜索，不虛此舉之感。

#### 參考文獻

1. ASA A21.1-1957 American Standard Practice Manual for the Computation of Strength and Thickness of Cast Iron Pipe
2. T.H. Wiggin et al, A Proposed New Method for Determining Barrel Thickness of Cast Iron Pipe. Journal A. W. W. A., Vol. 31, pp 841-909, May 1939
3. Marks Mechanical Engineers' Handbook, 5th Edition
4. Maurice Grandpierre & C. C. Reynolds Ductile Iron—A New Material for Petroleum Pipe. The Oil and Gas Journal Nov. 21, 1955

## 動量原理及其在水利工程上之應用 單向度分析法

### Theory of Momentum and Its Application to Hydraulic Engineering—One Dimensional Method of Analysis

周 裕 民

#### 目 錄

##### 壹、前言

##### 貳、動量原理

##### 一、流型 (Flow Pattern)

1. 旋轉流與非旋轉流
2. 分離現象

##### 二、流線網分析法 (Flow net)

##### 三、流速分佈之影響及其改正值

##### 四、壓力分佈之影響及其改正值

##### 五、單向度分析法

##### 六、動量之原理及一般在明渠中之應用式

##### 七、動量原理與能量公式之關係

##### 參、在水利工程上之應用

##### 一、閘門水流與堰上水流

##### 二、垂直跌水 (Free overfall)

##### 三、渠底摩擦力與推移力

##### 四、排岸式溢洪道 (Ski-jump)

##### 五、虛變流 (Spatially varied flow) 側渠式

##### 六、溢洪道

##### 六、水躍

##### 七、驟變断面之理論分析

##### 肆、展望——高等流體力學中之應用

##### 伍、尾語

# 壹、前言

自從牛頓博士創其運動三定律以來，至今仍為工程力學之基礎，應用力學早已視為工程者之基本課程，物體分子之運動與動力，為其中重要之一部份，在剛體與彈性體中之力學中，物體可視為保持其原態，或僅發生極有限之變形，但液體或氣體，則無法包括於此力學之範圍之內，此在邏輯上亦視為工程物質之流體，若受剪力則會繼續變形，實非用特別之力學分析不可。如設計橋墩、溢洪道、靜水池等，無論明渠或管流，均須了解流體行為之原理，如探討固體之強度一樣。現世紀各種形態之工程手冊、列表、圖解、公式等，對於設計工作者，為極有用之工具，但皆應詳知其演證與應用之範圍，始可應用自如，而水工結構實無二相同者，比照已有之設計路徑實不易得，故每一工程，必在對流體運動原理異常熟練之情況下，分解其為最原本之形式，各一解之，至所需之精確度，再集合為一體而成，茲在基本理論上將動量原理加以探討，僅在應用時，才以經驗公式配合，以求在分析過程上因忽視某些未知因素所造成的誤差，儘可能予以消除，而使各斷面中各水力因素互變之關係，明顯表出，以供判斷。

## 貳、動量原理 (Principle of Momentum)

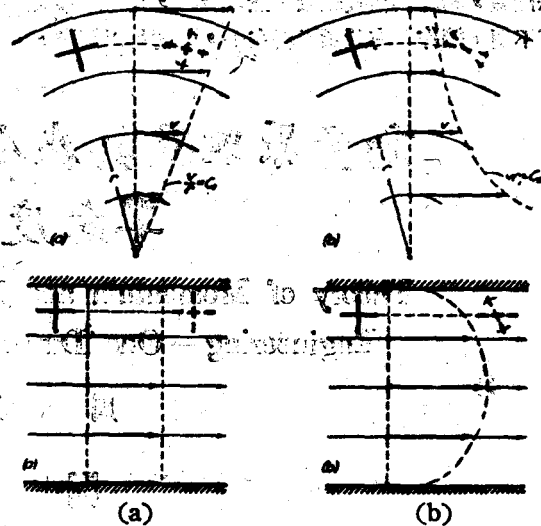
能量公式 (Energy Equation) 和動量公式 (Momentum Equation) 為近世紀來解決流體問題之兩大利器，但均須在理論上，以非旋轉流 (Irrotational Flow) 為基礎，在些分離現象發生之情況，應研討應用之，但實例中，上述情況實不易多得，所幸者可在甚為近似之情況下，明瞭其誤差量之後，應用單向度流分析法解答之，蓋因流體之運動，大多數簡視為單向流 (One-dimensional flow)。

### 一、流型 (Flow Pattern)

#### (1) 旋轉流與非旋轉流 (Rotational and Irrotational flow):

如有一開口之圓盤，內盛液體，繞其心軸，以一定角速旋轉，經過相當長之時間後，則液體將呈現與水盤相同之旋轉特性，如圖一 (a) 所示，盤中之液體任何點之切線速度，均與半徑向之距離成正比，且均與盤以相同之一定角度旋轉，如於液體表面置兩垂直之火柴棒，則切線向之棒以相同之速度，繞心旋轉，而內徑向之棒亦如此，故如僅以兩組火柴棒之位置，來研究其運動，則次一棒組為經順鐘向繞中心軸旋轉而連成者，是謂之旋轉流。

如再觀圖一 (b)，係由於水盤不旋轉，而在盤中心底部開一小孔，由此孔向外洩水，因而生一種螺旋流體運動，其切線速係隨其半徑向之距離成極近似之反比，此種運動可視為液體之任何小積分



圖一 旋轉流與非旋轉流示意圖

元素 (Element) 均阻止液體之運動，其切線向之火柴棒，以同樣之方法旋轉如前一樣，但半徑向之棒則因內圈速度快，而外圈速度較慢，恰似以相同之速率向反方向旋轉，此兩種旋轉特性有互相消去之趨勢，此種運動特性，是謂非旋轉流。

此運動若以 A, B 兩點之運動代表全棒，則甚似鏈狀結構之運動 (Link Motion)，即該棒以 A 點之速率運動至次一位置再加上同時間內 B 點對 A 點之相對運動 (Relative Motion)，惟此相對運動為反向之旋轉也。

又如圖一(C)所示，在二平行壁間之流體，若斷面上任何點均以相同之速率運動，則棒將不旋轉。圖一d，則因流體之速度隨點在斷面上之位置而變，棒將旋轉矣；平行壁間運動之流體，在任一斷面上，其流速極少有為一定值者，但愈接近此情況，則愈接近非旋轉流。

(2) 分離現象 (Separation):

流體流經擴張或收縮之斷面時，流體呈曲線運動，在收縮斷面邊壁突轉點（兩直線邊壁之交角點）流體呈滯流狀態，該點是謂停滯點 (Point of stagnation)，如交角過大，則該區有迴流發生，在擴張斷面情形之下，如真為理論上之非旋轉流時，邊壁流速驟減，則流體勢必與擴張後之邊壁分離。但實際上，擴張角較小時，因亂流之特性使流體仍隨邊壁變化而行，但擴張角甚大時，則自擴張點開始向下游發生一股迴流，迴流沿壁向上游倒流，直至斷面初擴點止，迴流區流況極亂，漩渦叢生，在主流與迴流間可定出一分離線，是謂自由流線 (Free stream line)，線上流速可視為定值。

在水工結構物之設計時，壁線係為引導流體流動而設，尤以高速射流時，分離現象之發生，實為漩渦，負壓，穴蝕，震動各破壞現象之起因，故有分離現象嚴重出現之水工物，實不能謂之為極佳之設計，關於漸變段之設計，皆以緩變扭曲邊壁為佳，又超臨界流漸變段之水流，橫波 (Cross wave) 與分離現象之產生，常導致設計之失敗，實不得不謹慎為之。

## 二、流線網 (Flow Net)

流線網法係分析流體在曲線運動中流速分佈及壓力分佈情況之方法。

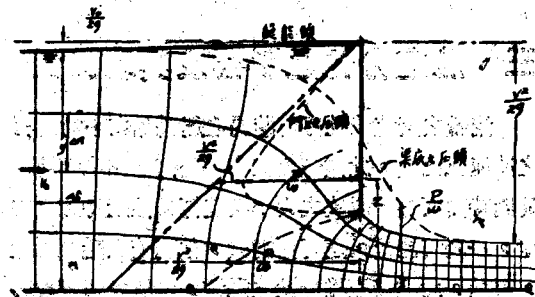
流線網由包括兩組相交之曲線所成，一為等勢能線 (Equipotential line)，在其線上之能均相等。一為流線 (Stream line)，為正交於等勢能線者。理論上有無限數目之流線與等勢能線存在，但為了方便起見，可繪出有限數目之兩組線而能達到所需求之設計精度即可。如繪出一族流線，使其相鄰兩線間之流量  $q$  相等，其圖可視出該情形之流況，其流向與相對之速度分佈情形皆明顯表出，因為

$$q = u \cdot \Delta n_1 \quad \text{則} \quad v_1 \Delta n_1 = v_2 \Delta n_2$$

式中  $\Delta n$  為兩流線間之距離， $v$  為相鄰兩線間流體之流速，若流線為數甚少，則受兩相鄰線間之

流速分佈影響，其平均流速之數值，並非絕對的與線間中線之流速相等，故上式僅能近似的相等，其程度視流線之數值而變。

在非旋轉流之流型下，無分離現象發生之時，用等勢線作為繪流線之引導時，在等勢線與流線均為正交之情形下，若又使等勢線間之距離  $\Delta s$  亦等於  $\Delta n$ ，則可造成無數的網狀之方網，由於無此網方之形成，對於繪出之流線網之正確度，甚為有助，此種流網，可由數學方法證出，若四壁形狀一定，流線間距  $\Delta n$  亦取某定值，則繪出之網狀方網僅有一種，故任何問題用此法求解，僅有唯一之答案。



圖二 閘下水流之流線圖

依據上述原理，以初步之近似方法繪圖，可使

$$\Delta s = \Delta n, \quad \text{則可有:} \quad \frac{V}{V_0} = \frac{\Delta n_0}{\Delta n} = \frac{\Delta s_0}{\Delta s}$$

式中  $V_0$ ,  $\Delta n_0$  及  $\Delta s_0$  某已知流況段根據數據，此段內流線皆為直線，且互相平行，因此，方網為正方形，相反時，若在不平行壁間正方網之求得，僅能當流線間之距離趨近於極小時，流線始以趨近於直線為極限，在實用上言，方網內各等勢線間距離，可用方網中心之距離比表  $\frac{V}{V_0}$ 。同樣的，流線間距亦可用方網中心各流線間距離之比表之。圖中，以閘流之流線網例示，可用來表各壁處之流速，

$$\text{由流速-壓力關係原則，} \quad \frac{P - P_0}{\rho v_0^2 / 2} = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2$$

式中  $P_0 \cdot V_0$  為模塊段內之壓力與流速， $P \cdot V$  為未知處之壓力與流速， $P$  為單位體積之質量，可繪出各壁上之壓力分佈曲線，此圖中，底部之壓力係由正常水深時之壓力，逐漸由接近門口之流速分佈變化，而漸減少，直到經口門射流之處，始漸與下游水深相等。又閘門上之壓力分佈曲線，較靜力分佈

狀況下小。又在門口斷面內，在閘門尖處為零（等於大氣壓力），急增而呈下凹之曲線以達底部。在閘門頂端，水面與總能線齊平，水面線由根據段（等速流段）漸向上直達閘門。

上述係由流線網分析，閘門附近各壁壓力分佈及各處流速分佈之情形，其他任何一種特殊之四壁形狀，亦可以同法分析之。

流線網之繪製，可用下列各法為之：(1) 電流相似法；(2) 數學計算法；(3) 圖解法；(4) 特殊之沙質模型法，以注入之色線繪出；(5) 隨手描繪法 (Free hand sketching)；經逐漸之改正，直到等勢線與流線正交時為止。

### 三、流速分佈之影響及其改正值

流體之紊流特性可用漩渦之運動加在平均前行之流速上而成，此種流動使得在任何某點之流速向量隨時而變，渦流之大小與旋轉特性隨時隨地在變，一渦流能量經運行而消失，他渦流又隨之而生，因此，此種極複雜特性之亂流，僅能以靜力法 (Statistical means) 分析之，故任何點之流速向量和  $v$ ，可以暫時之流速平均值  $\bar{v}$  及瞬時之偏差值  $v'$  和表之， $\bar{v}$  值即代表該點流速而用之於連續法或加速流基本原理上者，而瞬時偏差值  $v'$  之變動 (如圖三示) 雖為三向度，但並不影響於主流之平均值，圖中為某點之主流與某側方向流速之紀錄，主流向之  $v'$  在  $\bar{v}$  上下變動，而側方向之  $v'$  在零坐標上下變動，若次兩方向之平均流速 (在垂直於主流向之斷面內) 並非為零時，則將在斷面上發生有螺旋運動流 (Spiral motion)，此種運動常在彎曲之流路上產生，為非常重要之一種水流現象。

#### (1) 流速分佈之影響：

無論是層流或亂流，在任何斷面上各處之流速平均值，均非為定值，在管流中前者之最大流速為平均流速之兩倍，後者之差數稍小，如在邊壁之幾何形狀不規則之狀況下，使流速分佈甚為不勻，則使用平均流速 (全斷面) 所求出之動量值，常以改正值  $\beta$  修正之， $\beta$  值在 1 至 1.33 之間，同理用於速度之改正值  $\alpha$ ，可大到 2 (經試驗室證實，在水輪機上之螺旋水流值  $\alpha$  可大至 7.4)。

邊壁之糙率與彎曲之水流，亦使斷面上流速分

佈改變，粗糙之渠壁使近壁處之流速大減，因而最大流速與渠底流速差值增大，彎曲之水流使內彎部份流速大增，故斷面形狀處處變化之流路中，流路彎曲之情況下，與受阻之水流， $\beta$  值常大於 1。

#### (2) 流速分佈係數之求取法：

在單位時間內流經斷面積  $\Delta A$  之動量為質量  $wv\Delta A/g$  與  $v$  之乘積 ( $wv^2\Delta A/g$ )，全斷面之動量和可用積分求其和， $\sum wv^2\Delta A/g$ ，式中  $\Delta A$  為微小之斷面內， $v$  為該斷面內之流速， $w$  為單位體積之重量， $g$  為重力加速度，故流速分佈之改正值  $\beta$  為：

$$\beta = \frac{\int v^2 dA}{V^2 A} = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA$$

上式可由微積分原理經圖解法求解，另近似值公式可由假定流速為對數分佈情況而得：

$$\beta = 1 + \xi^2$$

式中  $\xi = V_m/(V-1)$ ， $V_m$  為最大流速， $V$  為平均流速。

例二：某圓管內，流速分佈曲線為拋物線  $v = V \max(1 - r^2/R^2)$  試求改正值  $\beta$ 。(圖四)

$V$  = 平均流速

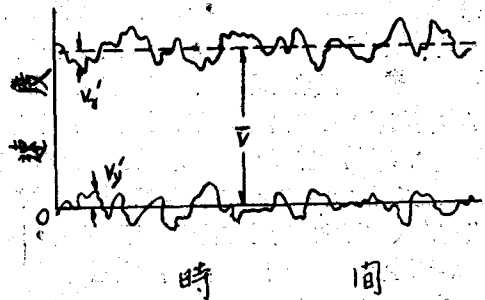
$V_{\max}$  = 最大流速

單位時間流過斷面①之體積為：

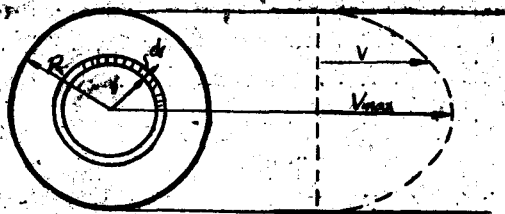
$$V \cdot R^2 \pi = \frac{1}{2} R^2 \pi \cdot U_{\max}$$

$$\therefore V = \frac{1}{2} v_{\max}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA \\ &= \frac{1}{R^2 \pi} \int_0^R \left[ \frac{v_{\max}(1 - r^2/R^2)}{1/2 v_{\max}} \right]^2 2\pi r dr \\ &= \frac{8}{R^2} \int_0^R (R^4 r - 2R^2 r^3 + r^5) dr = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



圖三 紊流中速度之變動

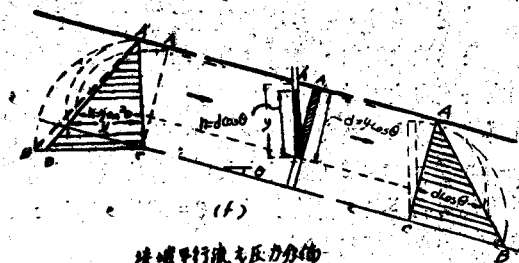
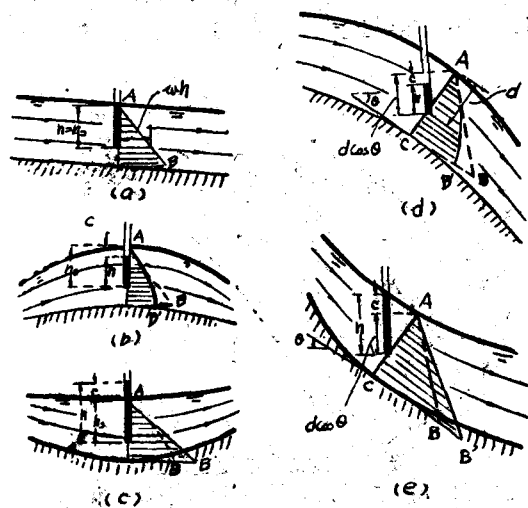


圖四

#### 四、壓力分佈之影響及其改正值：

若略視紊流之影響，明渠在坡度甚小時，任何點之壓力水頭均為該點至水面之距離，故壓力之分佈係隨水深成正比，即同靜水壓力定律之線方程式，此種靜壓定律應用於水流之情形下，係在垂直於主流向無任何加速度產生，即流線在理論上為不彎曲之平行流 (Parallel flow) 時，若在垂直於主流向之斷面內有加速度發生，則流體內之壓力分佈受其影響而須加以改正。一般緩變流 (Gradually varied flow) 之明渠流線，在各種迴水曲線如：M類，S類曲線，均可因流線之曲率變化甚小，而視為平行流以靜壓分佈律用之。

但在急變流 (Rapidly varied flow) 時，如洩降曲線、水躍、滾水壩壅流，捲屏式溢洪道 (Ski-jump) 等，因水分子在短距離內作曲線運動，因而向心力或離心力將擾亂流體內之壓力分佈情況，如圖五中之壓力分佈線以曲線 AB' 代替直線分佈之 AB。 (圖五 c, e)，示離心力使渠底壓力大於靜壓力， (圖五 b, d)，則小於靜壓力。



渠底彎曲之壓力分佈

圖五 各型水流之壓力分佈圖

設任一點之靜壓壓力水頭以  $h_s$  表示之，因曲線水流影響壓力分佈之偏差值以  $c$  表之，故壓力之真值  $h = h_s + c$ ，若渠道之縱坡係曲線變化，則離心力可由牛頓定律質量乘加速度而得，茲欲求得某處單位面積上 (平方英尺)，其上之水柱高  $d$  之壓力為：

$$P = Ma = \frac{Wd}{g} \left( \frac{v^2}{r} \right)$$

式中  $v$  為流速， $r$  為曲率半徑，故壓力水頭之改正值  $c$  為：

$$c = \frac{d}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

實用上，求渠底處壓力水頭之改正值  $c$  時可用  $r$  表渠底之曲率半徑， $d$  為流水水深， $v$  可設其等於平均流速，故渠底為凹面時， $C$  為正值，凸面時為負值，平行流時則為零。

由上所述，在曲線流時壓力並非為靜態分佈，若簡化之則壓力水頭在曲線流時用  $\alpha'$  改正之，則為  $\alpha'y$ ，前述  $\alpha'$  為壓力分佈之改正係數也。可簡稱壓力係數：(Pressure cos.)

$$\alpha' = \frac{1}{Qy} \int_0^A hvdA = 1 + \frac{1}{Qy} \int_0^A cvdA$$

式中  $Q$  為總流量， $y$  為流水水深， $\alpha'$  在凹形曲線流時大於 1，凸形時小於 1，平行流時等於 1。

在動量公式使用時，上下游兩斷面之壓力若因壓力分佈異於靜態時，則亦須改正之，改正後之壓力以  $\beta'P$  示之 ( $P$  為靜態分佈之壓力值)， $\beta'$  為壓力分佈改正係數簡稱作力係數 (Force coe.)。

$$\beta' = \frac{1}{A\bar{z}} \int_0^A hndA = 1 + \frac{1}{A\bar{z}} \int_0^A cidA$$

式中  $\bar{z}$  為自水面至水流斷面積之重心之距離， $h$  與  $c$  同前，凹形曲線流時  $\beta'$  大於 1，凸形時小

於 1，平行流時等於 1。

坡度甚陡時，壓力分佈亦受影響（圖五 f 所示）， $Q$  為坡之斜角，則因重力之作用分解為平行及垂直於流向之兩分力，使壓力分佈異於靜態分佈，故單位面積上之壓力為  $wycos^2\theta$ （圖中  $d = y\cos\theta$ ， $h = d\cos\theta = y\cos^2\theta$ （圖五 f 中），各曲線與說明可示明其間之關係，當坡度斜角  $\theta = 6^\circ$  時，即 10 : 1 時，壓力水頭可差 1%。

一般陡坡常因流速過大，而致生挾氣之現象，由挾氣之結果，斷面內水之單位體積重亦不同，故亦影響水流中之壓力分佈。

### 五、單向度流分析法 (One dimensional method of analysis) :

任何流體積分原素之運動均須以立體三坐標表示之，但在若干實例之中，某一方向之運動甚小幾乎完全忽略不計，因此流型可以簡化為二向度流，可用流線網 (Flow net) 方法，以數學計算、模型、電氣法或手劃法表示出，同樣的，在某些情況中流體某兩方向之運動比較他方向之運動幾無重要性，則此種運動可簡視為單向度流，其分析法則甚簡單了。

但如純為單向度流時，則顯為等速流，則流線上任何點與他點情況，均無變化，如又為等量流 (Steady flow) 時，則更無加速度之問題在內，但如流體作近似之單向度流時，忽視垂直向之任何變化是可能的，而只考慮主流向之變化即僅取流體中心線之變化而以平均流速計算之。故單向度流是一個最便利且最迅速之近似方法，如此法應用到二向度或三向度流時，顯然地會產生些誤差，故此誤差極限須仔細研討了解之，始能應用自如。

### 六、動量之原理及一般在明渠中之應用式：

衝量 (Impulse) 在力學上之定義為作用於某物體之力對時間之增量之乘積，所以衝量和力一樣是向量，為立體三坐標內各分向量之和。動量之定義，則是該物體之質量與即時速度之積，動量與速度一樣，亦為向量，亦有三坐標任何方向之分向量。

流體之運動極難知，而極明以整體為對象，

這一點在研討流體問題之初，是應先有的觀念，因為任何某積分原素 (Element) 幾乎絕不可能對另一積分原素在運動之過程中保持某一固定之相對位置。因為要表出在某原素 ( $\Delta M$ ) 之重心處之加速度，所以須先表示其作用於該原素，使其發生加速度之分力 ( $\Delta F$ ) (Elementary force components)，又如若將牛頓定律轉變為在流體內某一定點處之應用形式，則可將等號兩端均被該原素之體積除之：

$$\frac{\Delta F}{\Delta V} = \frac{\Delta M}{\Delta V} a$$

若此原素之體積  $\Delta V$  趨近於零時，則上述對某定點 (Point) 之加速運動公式可變成： $f = ga$

式中  $f$  為單位體積流體之極限作用力， $g$  為流體單位體積之質量。

如取某任一假想之方向  $x$  為發生力與運動之軸向，則： $f_x = g \frac{dv_x}{dt}$

兩端同乘以  $dt$ ，則

$$f_x \cdot dt = d(gv_x)$$

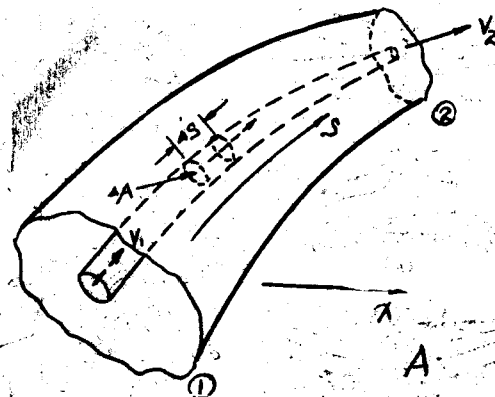
上式係表示單位體積之衝量，等於對該衝量所產生之單位體積之動量之變率，此二者均為向量，若上式兩端乘以某流管 (Stream tube) 上之某積分原素之體積 ( $dS \cdot dA$ ) 如圖六 A 所示，則變為：

$$f_x(dS \cdot dA)dt = (dS \cdot dA)d(gv_x)$$

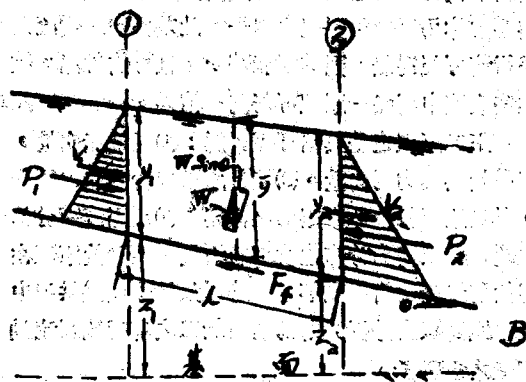
此式之左端可簡用 ( $dF_x \cdot dt$ ) 表之，若在一特殊情形之定常流 (steady flow) 時，又因  $ds = vat$ ，則右端可轉化為：

$$[d(gv_x)/ds] ds = [d(gv_x)/ds] vat$$

將上變化式及  $vdA = dQ$  代入前式，再除以  $dt$ ，則  $dF_x = dQ \frac{d(gv_x)}{ds} ds$



圖六 A. 動量原理定義示意圖



B. 動量原理應用於明渠水流

明顯地，上式為單位時間之質量等於在某假想  $x$  軸上單位時間內相對之動量變化。因為在定流管中，任何斷面內  $dQ$  均相等，上式可在二垂直於流向之斷面內沿流路而積分之。在積分時應注意，因為任何作用於一積分原素之力，均被次一積分原素之反作用力所平衡，由於此種內力之作用與反作用力，各互抵消，則上式左端之積分結果，僅存作用於定長度之流管上所有方向之外力，以  $\Delta Fx$  示之，則：
$$\Delta Fx = g(vx)_2 dQ - g(vx)_1 dQ$$

如以  $dQ = v dA$  代入，且對整個斷面積分之，並同因作用力與反作用力之關係，消除無數流管間各互作用之力，故結果僅餘流路中各壁上作用於流體之外力及作用於二末端斷面上之外力，於假想力方向者，可以  $\Sigma Fx$  表之。若斷面內壓力分佈非靜力分佈，須改正之，又  $v$  隨各斷面上之流速分佈情況而變，故以下列數學式表出。

$$\Sigma Fx = P_1 A_1 v_1 - P_2 A_2 v_2 + \Sigma Fx$$

欲求上二積式之數值，除非流速分佈之情況為已知，或假設橫斷面內各點之流速均為定值而無巨大誤差時，並須有：(一) 各斷面均在等速流區域內。(二) 流型須極接近於非旋轉流。在多種水流現象中，補償用平均流速代替時，流速分佈改正係數之  $\beta$ ，皆接近於 1，故省去此種改正之動量公式可列為：
$$\Sigma Fx = Qg(Vx)_2 - Qg(Vx)_1$$

$$\text{簡化之為：} \Sigma Fx = Qg \cdot \Delta Vx$$

上式即為在假想軸向  $x$  之動量公式，左端表衝量（單位時間內在  $x$  軸向作用外力之總和），右端為單位時間內在  $x$  軸向，動量之變化，即為經過二斷面動量之差。

若將上式應用於定斷面之明渠水流中，設渠底坡甚小，兩斷面間距離甚近，則邊壁之摩擦力與水流本身之重力分解於主流向之分子，均可略去不計，並  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ，則動量公式為：

$$P_1 - P_2 = Qg(V_2 - V_1)$$

式中  $P = \frac{W}{g}$ ， $w$  為單位體積水重， $g$  為重力加速度， $P_1 = w \bar{z}_1 A_1$ ， $P_2 = w \bar{z}_2 A_2$ ， $\bar{z}_1$  及  $\bar{z}_2$  為水流斷面  $A_1$  及  $A_2$  之重心至水面之距離。

又因連續流公式  $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ ，則可簡化上式為：

$$\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{z}_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{z}_2 A_2$$

上式為明渠中緩變流應用之一般公式，在使用標準階步法時(Step-method)，尤為方便，式中第一項為單位時間流經某斷面之動量除以單位體積之流體重，第二項則為某斷面上之壓力除以單位體積之流體重，該二項之和稱為比力(Specific foree)，與能， $H$ (Specific energy) ( $H = y + Q^2/2gA^3$ ) 形式甚為相似，由該二式可各繪出曲線，此兩曲線為研討水躍前後共軛水深與能量消失之圖解工具。

## 七、動量原理與能量公式之關係：

由上節所述在緩變流時依動量原理，各斷面內動量與壓力之和不變，與能量公式之各斷面內位能，勢位及速能之和不變極為相似，又由各流體力學理論之推演能量公式，均與前節推演動量理論方法相似，並均以牛頓第二定律為依據，但雖其來源相同，其應用則大異，茲述演其間之關連如次；根據動量公式：(圖六B)

$$\frac{Qw}{g}(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1) = \beta_1^2 P_1 - \beta_2^2 P_2 + W \sin \theta - Ff$$

式中 1 與 2 為上下游兩斷面之指標， $P$  為斷面上之壓力， $W$  為水重， $Q$  為渠底斜角， $Ff$  為整個渠底摩擦外力之和，故  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ， $\beta_1^2 = \beta_2^2 = 1$ ，且以矩形斷面為例，並設其寬為  $b$ ，則如圖六B 示：
$$P_1 = 0.5 w b y_1^2$$

$$P_2 = 0.5 w b y_2^2$$

$$Ff = w h f \cdot b y$$

式中  $hf$  為摩擦損頭， $y$  為平均水深即：

$$(y_1 + y_2)/2, \text{ 又 } Q = 0.5(V_1 + V_2)by$$

$$W = wbyL$$

$$\sin\theta = (Z_1 - Z_2)/L$$

式中  $L$  為兩斷面間之距離，若將上列各式代入並簡化之可得：

$$Z_1 + y_1 + \beta_1 \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + y_2 + \beta_2 \frac{V_2^2}{2g} + hf$$

此式在實用上可視為於能量公式相同，理論上言，上式所用之流速改正係數非能量公式中之  $\alpha$ ，而為動量公式中之  $\beta$ ，此兩值雖在某些水流情況中極相近，但在理論上則決不可混為一談，又上式中摩擦損失之意義則大異，在能量原理中  $hf$  為整個

流路中流體內能之消失，而動量原理則為邊壁上摩擦外力作用流體而引起之損失，此差異在緩變流與平行流可視為無，因其損能甚少，且可估計出，故某些水流中用任一原理可得同一結果。

上二原理之差異點可扼要為：(1) 能量無向量，而動量與壓力為向量。(2) 能量原理包含內能之損失，動量原理包含外摩擦力之作用。(3) 又因流速分佈之改正值及壓力分佈之改正值均異，故動量原理在能量消失無法估得或不重要時（如側渠或溢洪道中與水躍現象之分析）則為唯一無二之解析流體流動現象之原理了。

### 叁、在水利工程上之應用

水利工程中主要分管流與明渠兩大類，其中以明渠水流種類較為繁多，且水力因素間之關係較為複雜，在各種幾何形狀中之水流，以突變之斷面與流路之分合及途中之阻塞等水流現象之分析較為複雜，如包含有大量能量之消失時，則多應用動量原理分析之。

明渠水流之種類可分：

1 恒流：

(1) 等速流。

(2) 變速流：包括緩變流 (Gradually varied flow)

急變流 (Rapidly varied flow)

2 變流 (Unsteady flow)：

其中等速流分析最易可使用曼寧類之公式求解，緩變流則雖因加速度而稍引起水面線之彎曲，但長距離中仍可視為平行流，可由能量原理藉微積分之功而分析之，蓋此類水流短距離之能量損失甚微，或可略而不計也。在急變流之中，則用天然或人為之人工結構物構成控制斷面，使水流大多呈曲線運動，甚至使水流剖面斷離，故發生分離現象，旋轉流及高度之亂流使流速分佈與壓力分佈呈特殊之情況， $\alpha, \beta$  將大於一，此種短距離發生之大量能量損失，尚無法確估，邊壁之摩擦損失相對的則甚微，可略不計。故動量原理為解析此類問題最近似之唯一利器，如再配以試驗係數，可使大多數問題能在工程界之掌握之中，此實動量，原理之功也。

急變流中之曲線運動，有以無滯性流體之勢流

(Potential flow) 為依據，推演成之數學方程式，其求解尚須曲流之曲率資料，故有設曲率在縱剖面內由渠底而水面，為直線變化者，以動量原理解之，亦有設為變指數方程式之變化者，以能量原理解之，其求解方式又可分为圖解與數字法兩種，前者即流線網法，後者多用繼續近似法 (Method of Relaxation)，無論上述何法，至今尚未有滿意之解法，皆待將來之發展與研究，故下列之研討，均照近年來之方法，將各個別急變流，單獨地以上述理論為依據，配以試驗之係數，以為水利工程設計之依據。

#### 一、閘流及堰流：

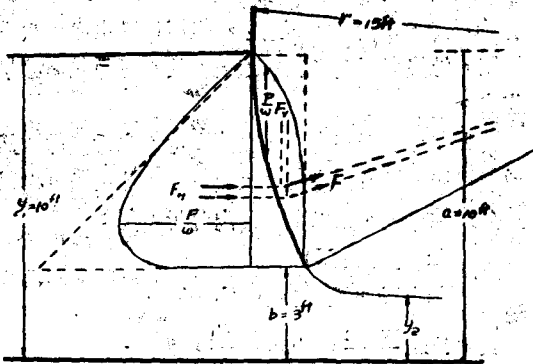
在設計矩形閘門與弧形閘門時，以流量水位曲線與閘門上壓力分佈情況最為重要，前者係操作之依據及設計控制出水量之目的，可由各種已知之原型與試驗圖表計算，或單一試驗模型試驗求之。後者則受流速分佈與接近閘門水流之曲線運動而發生之加速度之影響，使壓力分佈曲線甚為複雜。又門開之位置，門緣之幾何形狀亦影響門上之壓力，但尤應注意振動之發生。

閘門上之壓力分佈曲線可參閱圖二所示，其水平面之分力可由動量公式分析之。茲舉例述明靜壓分佈，動量公式之計算值與流線網法，或直接模型試驗之結果，互為比較，至於堰壁上壓力之分佈與旋門甚為相似，可同法分析之。

例：某弧形閘門離底高10呎，半徑15呎，跨度



(門寬度) 25 呎, 若上游水深 10 呎時, 門開度 3 呎, 求門上壓力。



圖七 弧形閘門上之壓力分佈

1 若在水流情況不能充分明瞭之時, 可假定門上壓力係靜壓分佈狀態, 而略估之, 如圖上虛線所示, 可由此面積乘門寬度再乘以水之單位體積之重即得:

$$FH = 38,200 \text{ 磅} \quad Fy = 12,800 \text{ 磅}$$

力之作用線係經過該等虛線面積之重心, 合力則經過轉軸。

2 設取門中部之單位寬度分析, 垂直於圖紙上方向流速可略去, 又若不計非主流向之運動, 而以單向度流分析法應用到主流之動量變化時, 可求得閘門上水壓力之水平分力, 如  $Cd = 0.605$  (該係數隨上游水深, 轉軸離高, 門開度及門緣切線與水平所作夾角  $\theta$  而變, 可由試驗圖查得之。)

$$V_1 = \frac{9}{y_1} = \frac{Cdb\sqrt{2gy_1}}{y_1} = \frac{0.605 \times 3}{10} \sqrt{64.4 \times 10} = 4.61 \text{ fps}$$

由能量公式 (設無能量損失):

$$y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 10 + \frac{4.61^2}{64.4} = 10.33 \text{ ft}$$

$$\text{又 } y_2 V_2 = y_1 V_1 = 10 \times 4.61 = 46.1 \text{ fps}$$

$$\text{解得 } y_2 = 1.98 \text{ ft} \quad V_2 = 23.2 \text{ fps}$$

動量公式之應用:

$$\frac{wy_1^2}{2} - \frac{wy_2^2}{2} - \frac{FH}{L} = qP(V_2 - V_1)$$

解之得閘門上之水平分力:  $PH = 33,400$  磅, 較靜態時小甚多, 但其作用線則不能求得, 又其垂直向壓力可由渠底壓力減去水重而得。更精確之求算門上之壓力, 須由流線網或模型試驗求得其壓力

分佈曲線, 使可解出:  $Pv = 10000$  磅, 水平壓力亦可由同法求出:  $PH = 31,800$  磅, 較上二值均為小。

頂寬堰之水流, 亦常用動量公式分析, 如圖八, 設臨界水流發生於堰頂之上, 則在臨界流之斷面內:

$$y_c = 2 \frac{V_c^2}{g} = Hc/1.5 \quad V_c = \sqrt{gHc/1.5} \quad \text{即式}$$

中  $Hc$  為臨界斷面內之比能, 以水頭表之, 則單位寬度頂堰之流量為:

$$q = V_c y_c = 2/3 Hc \sqrt{gHc/1.5} = 3.09 Hc^{3/2}$$

因為臨界流之斷面, 甚難測定, 故上述之理論寬頂堰流公式不甚適用, 在應用時常見以  $q = CH^{3/2}$  表之,  $C$  為係數, 可由動量理論求得之。

在推演該公式之時, 先作下列各假設:

- (1) 圖中渠底之摩擦外力, 因距離甚短, 均略去不計。
- (2) 在寬頂堰中頂部, 斷面②內發生之水深設為最小值。
- (3) 在應用動量原理關係式之斷面附近為平行流。茲將上游斷面①與堰頂部斷面②應用於動量公式中可得:

$$\frac{qW}{g} \left( \frac{q}{y_2} - \frac{q}{y_1} \right) = \frac{1}{2} wy_1^2 - \frac{1}{2} wy_2^2 - Pw$$

因為下游水深並未使堰淹沒為潛流, 故理論上堰下游邊緣處之水深應為臨界位, 但由該處水流並非平行流, 故由平行流理論推斷之結果與試驗稍異, 即臨界水流斷面發生於堰下游邊緣向上游向距離為  $3y_c - 4y_c$  處,  $y_c$  為臨界水深, 而邊緣處之水深為  $0.72y_c$  左右 (試驗值)。

上式中若需求  $Pw$  之值, 則可假使斷面②適取為臨界之斷面, 由於流量為已知, 則  $Pw$  之值可解出, 知其值與靜壓值稍異, 蓋由於流體在該處呈曲線運動也。

但若已知堰高為  $h$ , 上游水深  $y_1$  與堰上水深  $H$ , 又設  $Pw$  與靜態之水壓力同,

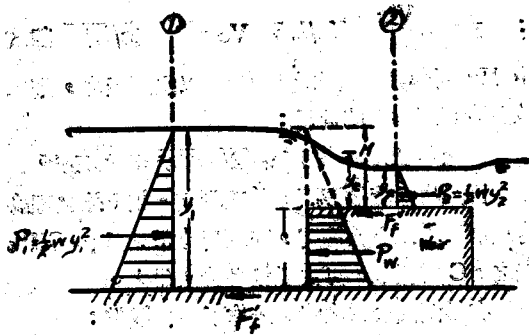
即  $Pw = 1/2 wh (y_1 + (y_1 - h)) = 1/2 wh (2y_1 - h)$  並取試驗結果:  $y_1 - h = 2y_2$ , 代入上式, 得

$$q = 0.433 \sqrt{2g} \left( \frac{y_1}{y_1 + h} \right)^{1/2} \frac{3}{2} H^2$$

式中  $h$  為堰高, 當堰高變化之時, 上式可由  $q = 3.47H^{3/2}$  變至  $q = 2.46H^{3/2}$ , 而試驗之結果證明, 係數  $C$  值可由 3.05 至 2.67, 由此觀之, 在應用動量公式求解寬頂堰問題時, 堰壁可設為靜壓分佈

又可知因入口處所發生之分離現象與其他內能之損耗，均可略而不計。

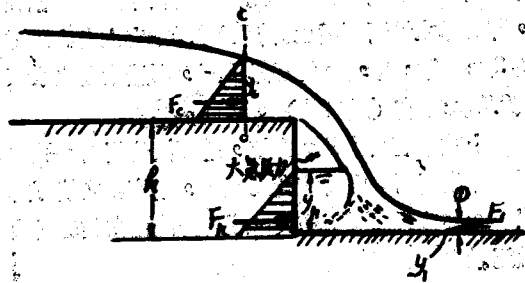
在堰上游，上游堰壁，下游堰壁或下游均可取為斷面，應用動量原理求解。



圖八、動量公式應用於寬頂堰

## 二、跌水 (Free over fall) :

當地勢不允許渠道有適宜之坡度，而落差甚大時，則需應跌水類之建築物，加以消能之後，再保持不沖刷之流水，使渠道內之流況均為緩變流，蓋容易控制及防沖也。在跌水建築物前，水面線由正常水深下降經臨界水深而入 (Supercritical flow) 急流跌下，其水理可簡由連續流公式與能量公式表示，如圖，取單位寬度之水流分析之。



圖九 垂直跌水

如設其壓力為靜態分佈，流速分佈均勻，則：

$$E_0 = h + \frac{3}{2}yc \quad (E_0 \text{ 為原有比能 Specific Energy})$$

又  $V_1 = \phi \sqrt{2g(E_0 - y_1)}$  (應用能量公式， $\phi$  為流速係數)

$$V_1 y_1 = yc \sqrt{gyc} \quad (\text{臨界水流與連續公式})$$

由上三式可得在無束縮狀況之自由跌水之關係式：

$$\left(\frac{y_0}{y_1}\right)^3 - \phi^2 \frac{yc}{y_1} \left(\frac{2h}{yc} + 3\right) + 2\phi^2 = 0$$

上式中設略去能量之損失，則  $\phi=1$ ，可因  $q, h$  已知，求解  $yc$  及  $y_1$ ，但縱使跌水之尾水為射流，仍將有可觀之能量損失，故  $\phi$  可由試驗結果得之。

1 在尾水深甚小之射流情況時，水舌後部雖然通氣甚佳，但仍有甚深之水頭存在，此水頭可由動量公式推求之。茲以主流方向分析，得：

$$F_x = \rho Q(\Delta V)$$

$$F_c + F_h - F_1 = \rho \cdot q \cdot (V_1 - V_c)$$

式中  $F_c = \frac{\rho y_1^2 c}{2}$ ,  $F_h = \frac{\rho y_1^2 h}{2}$ , 及

$$F_1 = \frac{\rho y_1^3}{2} \text{ 為該三}$$

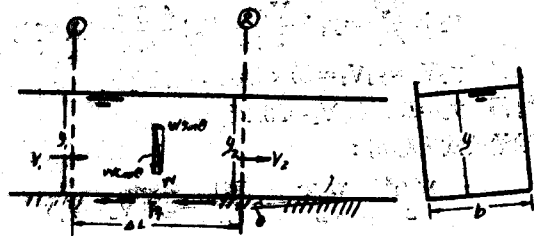
斷面內之水壓力，將上列關係代入動量公式中可得：

$$\left(\frac{y_1 h}{yc}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{yc}\right)^2 + 2\left(\frac{yc}{y_1}\right) - 3$$

在  $y_1$  已知之時，代入上式則  $y_1 h$  可解出矣。

2 當尾水漸漸增高以後，水舌漸被淹沒，上列由動量公式推算之結果，只要臨界水深未受影響，仍為控制斷面之時，斷面①已非射流，上式仍能成立，若尾水深繼續增加，至水深與  $h$  相近，則水舌後部空隙消失，若上游臨界水深仍存在，動量公式在  $x$  方向之分析仍同，僅式中  $F_h$  之壓力分佈情況已變為梯形，則與寬頂堰下游流況相同。又尾水深過大，臨界狀況消失，堰上水流已知條件減少，動量公式中之未知項隨之增加，除非列其他條件之方程式，或另取斷面，由已知斷面之情形下，將上式求解。

## 三、渠底摩擦外力與推移力：



圖十 渠底摩擦力

上圖中表示任其種明渠之水流，斷面①與②處之水深為  $y_1, y_2$  與平均流速為  $V_1, V_2$ ，在兩斷面

間之流體所受重力為  $W$ ，渠底之摩擦外力為  $F_f$ ，渠底坡斜角為  $\theta$ ，則此在断面①與②間之自由體，應用動量公式之後可簡列為：

$$\frac{wy_1^2}{2} - \frac{wy_2^2}{2} + W \sin \theta - F_f$$

$$= \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1)$$

上述式中如断面①與②之各水力因素為已知，則甚易解出  $F_f$  值， $F_f$  值為在上圖中之渠底與水接觸全面積上之力，以磅數計。

1 如係等速流時，則  $y_1 = y_2$ ， $V_1 = V_2$ ，代入上式簡化之：

$$F_f = W \cdot \sin \theta$$

在矩形断面之渠道中：

$$W = (by) \Delta L \cdot w$$

$$\sin \theta = \frac{V_1}{C_f R} \text{ (by Chezy's formula)}$$

$$V = C_f \sqrt{R (\sin \theta)}$$

$$\text{則 } F_f = \frac{q^2 (b+2y) \Delta L \cdot w}{C_f^2}$$

式中之  $C_f$  為 Chezy 氏公式中之摩擦係數，故渠底摩擦係數隨  $C_f$  值成反比，與  $q$  及  $\Delta L$  成正比。

2 上圖中之明渠係在加速流或減速流時，則  $y_1 \neq y_2$ ， $V_1 \neq V_2$ ，惟如係緩變流，水深與平均流速在短距離  $\Delta L$  內相差極微，仍可由上關係求之。但式中之  $y$  可用平均值  $\frac{y_1 + y_2}{2} = y_m$  代之。

3 由上述動量公式之關係：

$$F_f = W \cdot \sin \theta = wALS$$

$$T = \frac{F_f}{PL} = \frac{wALS}{PL} = wRS$$

$$T = wyS \text{ (在渠甚寬時 } R=y)$$

式中  $T$  為渠底單位面積上所受之水流推移力， $R$  為水力半徑， $A$  為流水面積， $L$  為兩断面間之距離， $S$  為比降， $P$  為潤周。

#### 四、捲屏斗式溢洪道 (Ski-jump)

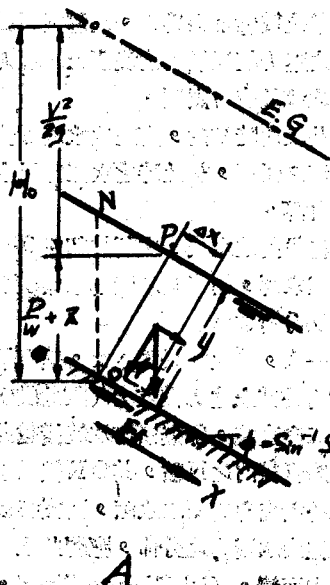
設計捲屏式溢洪道，多着重於堰頂形式，捲屏之結構及邊牆之設計，包括堰頂拋物線之剖面，水舌之水面線，橋墩之影響，和流量水頭曲線等，在捲屏式堰頂以其曲線之下，常接以甚大坡度之陡槽，斜度約在  $30^\circ$  至  $60^\circ$  之間，其下再接以適宜半徑之圓弧，使水流轉向射入空氣之中，呈拋射體曲線降落於下游溢道之河內，造成噴流之射時，結構

安全而不危及水之結構物。

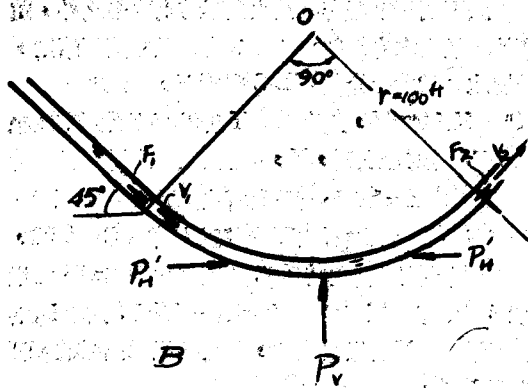
臥箕剖面除應避免發生負壓防止穴蝕之外，並應注意最大水力效率，易施工，安定及經濟等原則，美國水道試驗所介紹 WES 型剖面，

$X^* = KHd^{1.85} - Y$ ，式中  $X$ ， $Y$  為以堰頂為原點之坐標， $Hd$  為設計水頭， $K$ ， $n$  為係數，上游面垂直時， $K=2$ ， $n=1.85$ 。該型剖面之流量  $Q = CLH^{1.85}$ 。在堰高於溢流水頭  $H$  之 1.33 倍以上時， $C=4.03$ ，4.03，異於設計情況時， $C$  值隨溢水頭而變。橋墩之影響使有效堰寬減少， $L = L_0 - KNH$ 。式中  $L_0$  為堰頂淨寬， $N$  為墩之邊數， $K$  為橋墩收縮係數，可大至 1%。

堰上之壓力，在設計水頭時，接近於大氣壓力，小於設計水頭時，壓力增加，大於設計水頭時，則常產生負壓，若設為二向度外旋轉流時，可用數字法求值，圖解流線網分析，更可精確地用模型試驗測出，陡槽上壓力之分佈如前所述，邊牆之壓力亦同，均須加以壓力改正，惟捲屏內之壓力，則因動力影響而大增，捲屏之半徑： $R = 10KH$ ， $K$  內包含平均速度與溢流水頭等因， $R$  值過小，則發生凹型曲線流（如圖十一所示）經過捲屏中部之水深特深，流線如前所述之曲率隨水深而變，如水深甚小，相對的半徑甚大，則在捲屏內水深變化時甚微，各水力因素可由能量原理求解。



圖十一 捲屏式溢洪道



在超臨界進入擋厚時，水流受堰之水頭、落差、陡坡斜角及渠底糙率等之影響，故其水力特性甚有研討之必要，水流受擋厚之影響而變更流向，其變更流向所需之向心加速度係受擋厚之反力，故擋厚內受力可用動量公式或分析之，茲先假設由於陡槽段之水力情況如下：

1 在急流槽中，垂直於槽面之水深度，並不能代表該斷面內之壓力水頭，即此斷面內水壓分佈雖仍為直線分佈，但其直線方程式中之係數並非靜壓時之值，而應加一改正值，(參閱圖十一A及圖十一B)。

2 因為高速之水流在渠底坡有曲線變化之時，其動壓力常遠較靜壓力為大，故靜壓與動壓之和將使擋厚受之壓力超過最大之混凝土之應力，而使單位寬度上之流量有所限制。

3 在甚長之陡槽內，高速之水流可使挾帶空氣而影響水流之體積，故此時之水深應以水及空氣混合之體積計算。

4 陡槽段內之水底，在斜坡超過0.6:1時，可用能量原理求解，超過該斜度則摩擦損頭將增大，可用階步法分析之。

見圖十一A，某水柱長為 $\Delta x$ ，垂直渠坡之水深為 $y$ ，作用於其上之力僅重力(設此段水流係等速流，並為二向度流，即無任何水流橫越其縱剖面)，O點上鉛直線內之N點，其ON線已不能近似表示為垂直於主流向斷面之水深，而實替以OP表之，此OP線內水壓力之分佈，應視此水柱受重力後之垂直分力而變，(因 $F_f = w \sin \phi$ ，即重力之水平分力由渠底摩擦所平衡)即：

$$\frac{P}{w} = y \cos \phi$$

此式表示P(壓力)隨 $y$ 而正變，但式之常數為 $w \cos \phi$ ，故其總能頭如： $H_0 = \frac{V^2}{2g} + y \cos \phi$ ，故在此斷面內之壓力應為： $P = (w \cos \phi) \cdot \frac{y}{2}$ 。

如渠底曲線變化時，向上彎曲者，凹而上壓力視動壓力值而增加。即  $\frac{P}{w} = y \cos \phi + \frac{V^2 y}{yr}$ ，如下列中擋厚底中心處之壓力如求為P，則該處邊牆之壓力將由水面為零起直增為P而達底部。

式中V為平均流速，r為曲率半徑，如曲線向下彎則適反，但後者易發生分離現象，負壓力隨之而生。

關於挾氣之現象，由於在超臨界流中，受橋墩尾橫波(Diagonal wave)及漩渦(Vorted)立波(Standing wave)等之影響，使空氣隨水流而挾水流之中，氣泡受水流之混合作用而有由水面擴散到整個水流之趨勢，但氣泡受之浮力作用則適相反，如二現象平衡後，則水流中挾氣形成，根據Delapp之指出。

$$q_{aw} = q \cdot K \cdot F$$

式中 $q_{aw}$ 係空氣與水流混合之流量，K為粗糙係數，F為福祿指數( $F = V/\sqrt{gy}$ )，故水與氣混合之流量隨粗糙度及平均流速而正變，與水深 $y$ 成反比，故該狀況之水，單位體積重減少。

例：設某擋厚式壩道如圖十一B所示，若不計及受挾氣之影響，試求擋厚內所受之壓力，若單位寬度上之流量為500cfs，其進入擋厚處之水深為5ft，陡坡為45°，並不計陡坡上渠底所受之摩擦力。又擋厚之半徑為100呎，圓弧夾角為90°。

$$V_1 = V_2 = 500 \div 5 = 100 \text{fps}$$

(如在擋厚中之損頭不計，可由連續流公式與能量公式求得)

$$y_1 = y_2 = 5 \text{ft}$$

在兩端之水壓力：

$$\begin{aligned} F^1 = F^2 &= w \cdot \cos 45^\circ \cdot \frac{y^2}{2} \\ &= 62.4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5^2}{2} = 550 \text{ lb} \end{aligned}$$

在AB段內水之重量W，可由水之體積乘以單位體積重，並設擋厚半徑甚大，其內水深略等(由

能量公式掩屏中心底部水深將較小。

$$W = \frac{62.4}{4}(100^2\pi - 95^2\pi) = 49,000 \text{ lb}$$

由動量公式： $\Sigma FH: F_1 \cos 45^\circ - F_2 \cos 45^\circ + FH$   
 $= 1.94 \times 500(100 \cos 45^\circ - 100 \cos 45^\circ)$

$$\therefore FH = 0$$

蓋因掩屏內左半與右半之力互相平衡之故，若取任一半為自由體，可求其水平力。

$$\Sigma FV: FV - F_1 \cos 45^\circ - F_2 \cos 45^\circ - W$$

$$= 1.94 \times 500[100 \cos 45^\circ - (-100 \cos 45^\circ)]$$

$$\therefore FV = 186,770 \text{ lb}$$

故在垂直向之壓力除水重 49,000 磅外，所受動力影響之力為 137,770 磅，在需要任一部份之壓力影響時，可取任何某一小段為自由體，以同法分析之。

## 五、虛變流 (Spatially varied flow) 側渠式溢洪道

水流之途中，沿其流路上連續的增加或減少，其流量謂之虛變流。此種水流各斷面之水力因素，並不隨時間而變化，應與可變流分論之。如公路邊溝，傾渠式溢洪道，濾水池及旁溢流之灌水渠等，此種增與減之流量，常引起極多漩渦之亂流，使能量與動量變改，尤以增量虛變流為甚，故增減兩流常分別研討之。

增流量之虛變流，常用流量之增加而引起無法確估之大量能量損失，故用動量公式求解此類之問題極為便利。減流量之虛變流，常在分水建築物處應用，如庫底式取水口，渠道內有溢水側堰段等，此類流況並不影響能頭，理論與試驗均可證實，故可用能量公式分析之（亦可用動量公式推出）。

因虛變流流況複雜，推演其動量公式關係時，須先作下列之假定：

(1) 主流向之流速不變，實際上有極強之螺旋流及橫流 (Croze Current) 存在，此種狹氣且水面未滿小波浪之亂流，水力因素實無法詳求，但若用動量公式求解，則內力均已自相平衡矣。

(2) 流速分佈在任一斷面為定值，並設為 1，如流速分佈已知，可用其改正值。

(3) 壓力分佈與靜水壓力同，即設為平行流也，

如壓力分佈已知，可用其改正值。

(4) 渠坡甚緩，對壓頭與壓力分佈均無影響，如渠坡大時可加改正值。

(5) 渠周邊之摩擦損失以曼寧公式計算之。

(6) 狹氣之影響不計，若有可靠之資料，可將各水力因素依此改正之。

1. 增流量虛變流公式之推演：

參閱圖十二中之側渠，取斷面①與斷面②研討之，其通過斷面①之動量為  $QV$ ，其中  $Q$  為單位體積之質量， $V$  為流速，同理通過斷面②之動量為  $Q(Q+dQ)(V+dV)$  其中  $dQ$  為斷面①與②間增加之流量，故動之差為：

$$Q(Q+dQ)(V+dV) - QV$$

$$= Q[QdV + (V+dV)dQ]$$

其兩斷面間之水重  $W$  在主流向之分力為：(將兩項微分乘者不計)

$$W \sin \theta - WS_0(A + 1/2dA) dx$$

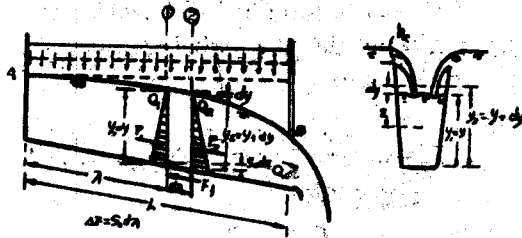
$$= WS_0 A dx$$

兩斷面間摩擦損頭  $hf$  為摩擦坡度與距離之乘積：

$$hf = Sf dx$$

式中之  $Sf$  可由曼寧公式表出：

$$Sf = \frac{V^2 n^2}{2.48 R^{4/3}} = \frac{Q^2 n^2}{2.48 A^3 R^{4/3}}$$



圖十二 增流量虛變流

渠壁之摩擦外力可設為摩擦損頭引起之壓力乘以平均面積

$$Ff = W(A + 1/2dA) S_f dx = WA S_f dx$$

兩斷面之壓力差，設為靜壓分佈：

$$P_1 - P_2 = W \bar{z} A - [W(\bar{z} + dy)A + \frac{W}{2} dA dy] = -W A dy$$

將上列各值代入動量公式中：

$$Q[QdV + (V+dV)dQ]$$

$$= P_1 - P_2 + W \sin \theta - Ff$$

不計  $dV \cdot dQ$ ，又  $V=Q/A$  及  $V+dV$

$=Q+dQ/(A+dA)$   
並省去分子內之  $dA$  和分母內之  $dA \cdot dQ$ ，再化簡：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - 2Qq/(gA^3)}{1 - Q^2/(gA^3D)}$$

式中  $q$  為  $dx$  段內外增之流量， $D=A/T$ ，為水力深度，為斷面被水面寬除，上式為增流量之虛變流公式，若  $q=0$  時則為緩變流之公式。

2 減流量虛變流可用同法推求之，可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - Qq/gA^3}{1 - Q^2/gA^3D}$$

上式亦可用能量公式推求，可得同樣之結果，將減流量公式與增流量公式比較：僅在分子上相差一個係數而已，如渠道斷面條件已知，可將上式求解其微分方程式，可得該渠道內水面線方程式；由於斷面，渠坡及水力因素之變化，該類水面可分為四大類，隨  $G$  與  $F$  之值而定， $F$  為福祿指數，為隨  $F$  變之參變數。

在實用上，常列動量公式，取捨各外力之作用以斷面①與斷面②各動量值分列式之左右兩端，用階步法 (Step method) 由某已知斷面開始，逐次推算至全渠，茲設其寬度不變，外增流量在單位渠長內均相等，以矩形斷面為例：

$$F_1 - F_2 + F_f = gQ(V_2 - V_1) + M'$$

$$= \frac{gQ_2^3}{b_2 y_2} - \frac{gQ_1^3}{b_1 y_1} + M'$$

式中  $F_1 = \frac{w b_1 d_1^3}{2}$ ， $F_2 = \frac{w b_2 d_2^3}{2}$  為斷面上之壓力

$$F_f = w \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \left( \frac{b_1 + b_2}{2} \right) \Delta Z$$
 力為平均  
摩擦力

$$M' = \text{Cos } \phi \left[ \frac{\Delta Q^3}{12hc} \right] g$$
 為外加之流量引起  
主流向動量之增加

$\text{Cos } \phi$  為增流量進入主渠之偏角  $\Delta x$ ，為  
計算段內渠底總落差。

$\Delta Q$  為其計算段內增加之流量。

$L$  為計算段之長。

$hc$  為增流量經堰頂時之臨界水深。

$g$  為單位體積之質量。

若設增流量流入主渠之流向與主流向垂直，則  
 $\text{Cos } \phi = 0$  即  $M' = 0$ ，並不計其直達邊壁上之壓力，  
則上式可簡為：

$$\frac{Q_1^3}{g b_1 d_1} + \frac{b_1 d_1^3}{2} + \frac{d_1 + d_2}{2} (b_1 + b_2) \Delta Z$$

$$= \frac{Q_2^3}{g b_2 d_2} + \frac{b_2 d_2^3}{2}$$

由上式，其間渠寬，水深，渠底降坡  $\Delta Z$  等可  
互為假設，求取某單一未知數，用試驗法求值，並  
列表以階步法推算全渠，惟假設數據須有豐富之經  
驗，以免解出之斷面，渠之幾何形狀，水流狀況，  
發生不良現象。

## 六、水 躍：

1 水躍現象自十八世紀初由意大利科學家 Bi-  
done 觀察以來，至今已有一百餘年，試驗研究，  
數學分析以及應用模型試驗，均日臻完善。現  
今水躍除應用在堰壩或其他水工結構物內作消能設  
備用外，還在量水建築中恢復為緩流 (Tranquil  
flow) 之高水面水流，及石壩下游尾水加深後上浮  
力可減低，又上升閘門 (Sluice gate) 尾水淹沒不  
深，可用水躍使閘流射出平衡下游尾水而成自由流  
，以增加有效水頭及在清潔用水時之化學拌混等均  
採用之。

2 水躍之種類以其強弱與特性分：波浪型水躍  
( $F_1=1-1.7$ )，微弱水躍 ( $F_1=1.7-2.5$ )，振  
盪流水躍 ( $F_1=2.5-4.5$ )，良好水躍 ( $F_1=4.5-9$ )  
) 與強力水躍 ( $F_1=9$  以上)，上列各型均以福祿  
指數為介數由弱而強，依次而定名。

3 水躍之基本水理關係，係藉動量原理推演而  
得，茲以矩形渠槽為例，以福祿指數為參變數，可  
由：

$$\sum F_x = P_1 - P_2 = g \cdot Q \cdot (V_2 - V_1)$$

$P_1$  與  $P_2$  為兩端斷面之靜水壓力，因水躍變化  
段之渠道甚短，在坡度甚小時，故外力中之摩擦力  
及水之重力，皆可省去不計，將靜水壓力值與連續  
流公式代入：

$$\text{則 } \frac{Q^3}{g A_1} + \bar{Z} A_1 = \frac{Q^3}{g A_2} + \bar{Z}_2 A_2$$

式中  $A_1, A_2$  兩端水之斷面積， $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$  為該兩  
面積重心距水面之距離，又由  $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ ，  
若其寬為  $b$  時， $A_1 = b y_1$ ， $A_2 = b y_2$ ， $\bar{Z}_1 = y_1/2$ ，  
 $\bar{Z}_2 = y_2/2$  又  $V_1 = V_2/\sqrt{g y_1}$ ，將上列各關係代入  
上式中，化簡可得：

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)^3 - (2F_1^2 + 1) \left( \frac{y_2}{y_1} \right) + 2F_1^2 = 0$$

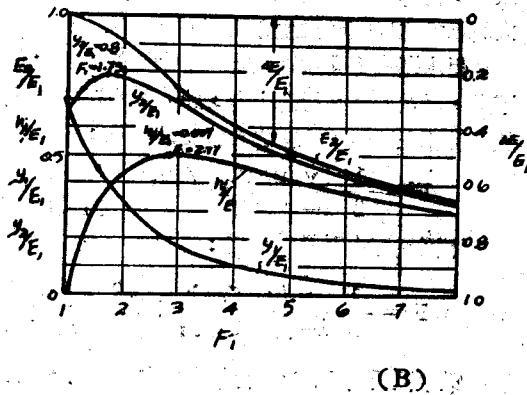
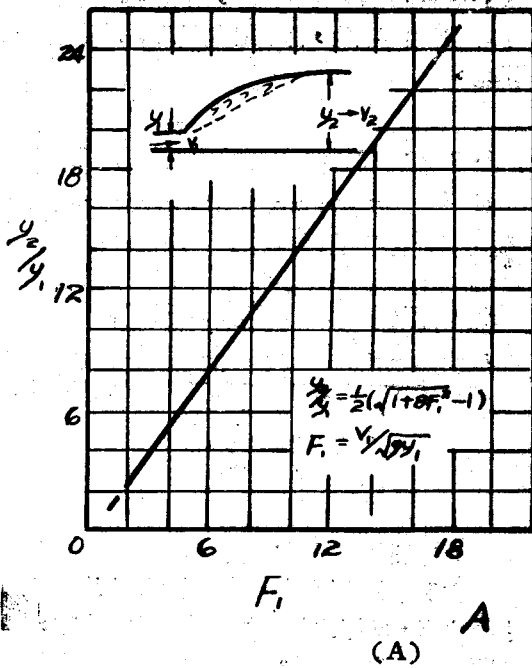
將因子提出：

$$\left[ \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 + \frac{y_2}{y_1} - 2F_1^2 \right] \left( \frac{y_2}{y_1} - 1 \right) = 0$$

將前項令之等於零，移項可得：

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1+8F_1^2} - 1)$$

是為水躍前後水深，藉 $F_1$ 參變而表出之公式也，若來水之福祿指數已知，則其共軛水深可由上式求之，圖十三A中，即以該式繪出之圖，此曲線會由數試驗所證明。



圖十三 水躍

水躍之各種特性：(圖十三B中。)

消能特性：消失之能量等於水躍前與水躍後之能量差：

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2}$$

水躍消能效率：

$$1 - \frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{(8F_1^2 + 1)^{3/2} - 4F_1^2 + 1}{8F_1^2(2 + F_1^2)}$$

水躍之高度：水躍前後水深之差，為 $hj = y_2 - y_1$ ，以無單位之數 $hj/E_1$ 表之。

$$hj/E_1 = \frac{\sqrt{1+8F_1^2} - 3}{F_1^2 + 2}$$

將上三式，以 $F_1$ 為橫坐標，他變數為縱坐標繪出。

該曲線等可得出水躍特性如次：

①最大相對水躍高度 $hj/E_1$ 為0.507，發生於 $F_1 = 2.17$ 時。

②在 $y_2/E_1 = 0.4$ 時 $F_1 = 1.73$ ，最大相對共軛水深 $y_2/E_1 = 0.8$ 。

③ $F_1 = 1$ 時，為臨界狀態流， $y_1 = y_2 = \frac{2}{3} E_1$ 。

由上圖可觀出任何一種來水條件下，所能發生之水躍形態，故設計工程師可憑此控制任何水工結構中發生水躍之情形，至於水躍之長度與水躍段內水面之升斜度，均可由試驗求得。

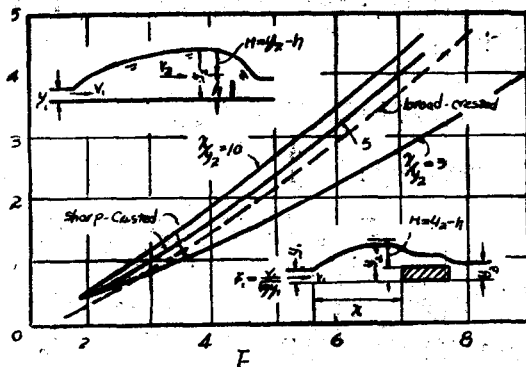
#### 4、用門檻控制水躍：

水躍可藉不同型態之門檻(Sill)予以控制，如銳緣堰、寬頂堰、渠底突升及突降等，門檻之功用為確保在不同水流情況下水躍皆能發生功效，並控制其發生之位置。

在門檻上壓力之分佈，由於水躍中之流速分佈極不規則，在極紊亂之分佈情形之断面內，動量將增加，但理論上言，動量公式可用為極近似之分析，而由模型試驗值驗證之。

由尺度分析知： $\frac{h}{y_1} = \phi \left( F_1 \frac{X}{y_1}, \frac{y_2}{y_1} \right)$ ，式中

各值如圖十四中所示， $X$ 為靜水池長，圖十四中之曲線係由模型試驗所得者，可知 $F$ 愈大，堰高愈高，始可確保水躍之發生。



圖十四

### 5、用銳緣堰控制水躍：

圖十四中，若來水水力因素已知， $F$ 可求出，堰前水深  $y_1$  已知，而下游水深  $y_2$  並未使銳緣堰成淹沒狀況，則  $h/y_1$ 、 $F$ 、 $X/y_1$  之關係可由曲線查出，如銳緣堰高度不足由圖中查得之數，則水躍會掃流出靜水池，即於堰附近產生立水波 (Standing well)，若堰高超過時，則水躍向上游行進，直到動量在波前 (射流) 與波後 (緩流) 之兩斷面內相等，始能停止。

### 6、用寬頂堰控制水躍：

寬頂堰較銳緣堰結構安定，且挖方價款較渠底突升為廉，故常為採用。

如寬頂堰下游水深不影響堰頂上臨界水深，則下游水流不影響靜水池內之水流情況，即  $y_2 < (2y_1 + h)/3$  時，故寬頂堰上流過之流量可依前述之公式：

$$q = 0.433 \sqrt{2g} \left( \frac{y_1}{y_2 + h} \right)^{1/2} H^{3/2}$$

因  $q = V_1 y_1$ ， $H = y_2 - h$ ，而  $F_1 = V_1 / \sqrt{g y_1}$

上式可變為

$$2.66 F_1^2 \left( 1 + \frac{h/y_1}{y_2/y_1} \right) = (y_2/y_1 - h/y_1)^2$$

若堰作控制靜水池內水躍時，則可代入：

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1)$$

上式可變為：

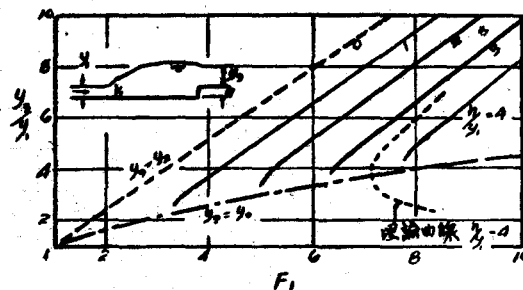
$$\frac{21.3 F_1^2}{\sqrt{1 + F_1^2} - 1} = \frac{(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 - 2h/y_1)^2}{(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 + 2h/y_1)}$$

此式繪入圖十四中，可作此類靜水池原理之分析與設計之用。

### 7、突升渠底控制水躍之方法：

圖十五中表示  $F$ 、 $y_2/y_1$  及  $h/y_1$  各值間之關係，可用寬頂堰同法以動量原理演證出各水力因素之關係式，圖中理論曲線即由此繪出，設計時可用多種流量求出渠底之升高值，用其中之最大值。

圖中  $y_2 = y_1$  為抬高渠底之極限，在線之上方各點表示抬高後水躍會湧向上游，如在  $y_2 = y_1$  及  $y_2 = y_0$  之間則可得出  $h/y_1$  之值因而抬高值  $h$  可解出，若升高值較解出值為大，則水躍湧前，較小則易被掃流出靜水池，即水躍沖向下游可能消失於下游也。



圖十五

### 8 用跌降渠底控制水躍：

當下游水深小於共軛水深時，同上述抬高各法控制水躍，但若下游水深大於共軛水深之時，則非用跌降渠底控制不可，否則水躍會湧前向上游淹沒水源，使靜水池失效，此控制常用於閘門出口之擴大断面中之射流所發生之水躍。

但水躍發生此控制中時，尾水過低則水躍影響下游，尾水極高又湧向上游，此兩尾水深之限界內又可分為三區域，上區之公式可演證為：

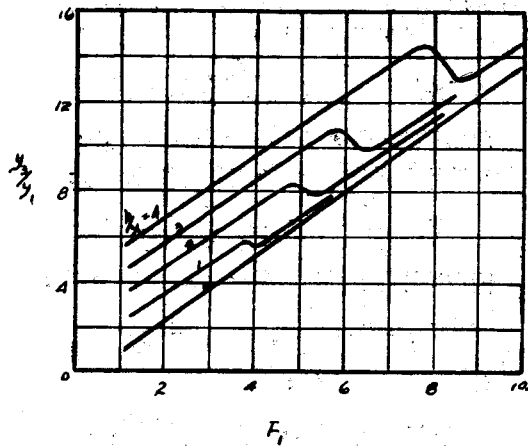
$$F^2 = \frac{1}{2} \frac{y_2/y_1}{1 - y_2/y_1} \left[ 1 - \left( \frac{y_2}{y_1} - \frac{h}{y_1} \right)^2 \right]$$

下區又可由動量演出為：

$$F^2 = \frac{1}{2} \frac{y_2/y_1}{1 - y_2/y_1} \left[ \left( \frac{h}{y_1} + 1 \right)^2 - \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^3 \right]$$

惟中區為湧浪區，若尾水深在此區內，水面會發生無限之浪湧入下游，由上兩式可繪出圖十六。

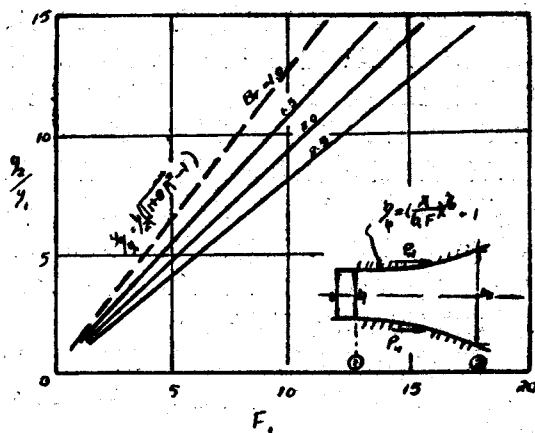




圖十六

### 9 擴大斷面中之水躍：

射流漸變段之設計甚為不易，因為縮小渠寬會引起橫波 (Cross wave)，擴張之斷面則常引起負波 (Negative wave) 及震波鋒。若擴大過速則邊壁失却效用：因水流在中心線甚深，向兩邊壁行則水深減低，呈下降之曲線，以致於邊壁無水存在，此為射流之曲線運動特性之一，故設計時由試驗知邊壁曲線宜為  $\left[ \frac{b}{b_1} = \left( \frac{x}{b_1 F_1} \right)^{3/2} + 1 \right]$  之曲線，如圖十七所示：



圖十七

式中  $b$  為未擴張前之寬度， $b_1$  為軸向上任一

點之寬度， $P^H$  為壁壓力分於主流向者，在此漸變段內之水躍，由動量公式可演證出：

$$F_x = P_1 - P_2 + P^H = \rho Q (V_2 - V_1)$$

式中  $P^H$  為兩邊壁作用於水之壓力，此值因水躍段內水分子運動極不規則，並有迴流及漩渦，故其值之水流向分力將甚小，若假設可略去不計，則如上述公式得：

$$F_1 = \sqrt{\frac{Br}{Z} \cdot yr \cdot \frac{1 - Br y^2 r}{1 - Br y r}}$$

式中  $yr = y_2/y_1 \cdot Br = b_2/b_1$ ，繪其曲線如圖十五，若  $Br$  愈大則所需之尾水深愈小， $F_1$  愈大，則尾水深需要愈深。

### 10 斜坡上之水躍：

在水平渠底上之水躍或底坡甚小時，水本身之重力可省略不計，若渠底甚陡時，動量原理中之外力，應包括水重之影響，茲以矩形渠道其寬為單位長時為例，斜坡與水平交角為  $\theta$  如圖十八，由動量公式，取平行於斜坡之方向為  $x$  軸。

$\sum F_x = P_1 - P_2 + W \sin \theta - F_f = \rho Q (\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1)$  式中  $W$  為水重， $F_f$  為渠底之摩擦阻力， $F_f$  略去不計  $\beta_1$  與  $\beta_2$  因流速分佈關係之改正取為 1 時。從  $Q = V_1 d_1$ ， $V_2 = V_1 d_1/d_2$ ， $P_1 = 0.5 w d_1^2 \cos \theta$ ， $P_2 = 0.5 w d_2^2 \cos \theta$ ，又假定水躍段內水面呈一直線（其水面實因泡沫翻花等影響而水面線之形狀隨福祿係數而變），茲設其影響改正值（包括斜坡之影響）為  $K$

$$W = 0.5 K w L (d_1 + d_2)$$

將上列各關係代入動量公式，以福祿係數為參變數，化簡後：

$$\left( \frac{d_2}{d_1} \right)^3 - (2G^2 + 1) \frac{d_2}{d_1} + 2G^2 = 0$$

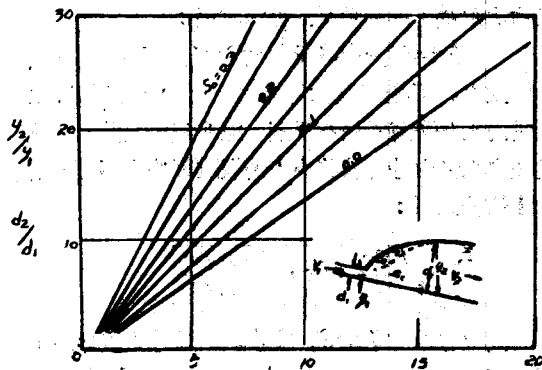
分解因式，令因式等於零，則

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8G^2} - 1)$$

$$\text{式中 } G = \frac{F_1}{\sqrt{\cos \theta - \frac{KL \sin \theta}{d_2 - d_1}}}$$

及  $d_1 = y_1 \cos \theta$   $d_2 = y_2 \cos \theta$

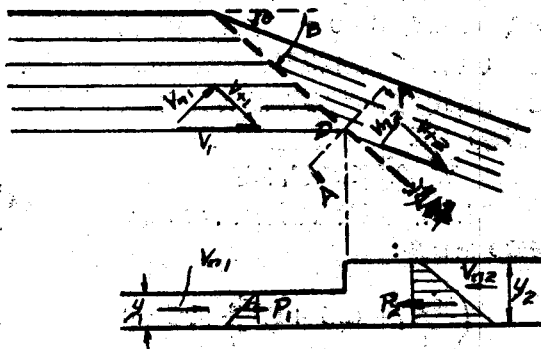
上式中  $K$  隨  $F_1$  與  $\theta$  而變，所以  $G$  為  $F_1$  與  $\theta$  之函數，即  $G = f(F_1, \theta)$ ，由各家試驗之證明，可由下圖中看出，斜坡愈大需尾水深愈大。



圖十七

### 11. 偏斜向水躍 (Oblique jump):

當超臨界流受傾斜直立之障阻擋之後，來水水深  $y_1$  會由超臨界流突變為次臨界流之水深  $y_2$ ，躍起之波面與傾斜之障壁成  $\beta$  角，此  $\beta$  角視障壁之傾斜角  $\theta$  而變，如圖十九所示，與壁成  $\beta$  角之鋒面又稱震波 (Shock wave)，其解析法係似超音速空氣流分析而得來，若  $\theta=0^\circ$ ，即無壁障內斜之情形，則  $\beta=90^\circ$  即正常之水躍也。



Section A-A

圖十九

由速度分向量之關係分析，垂直於波鋒之分速度為：

$$V_{n1} = V_1 \sin \beta$$

式中  $V_1$  為來水流速 (超臨界流  $V_1 > V_c$ )，垂直於波鋒之水流其福祿係數為：

$$Fn_1 = \frac{V_{n1}}{\sqrt{gy_1}} = \frac{V_1 \sin \beta}{\sqrt{gy_1}} = F_1 \sin \beta$$

茲切一斷面 AA 垂直於波鋒，斷面圖十九顯示

由速度分向量所引起之變化，適與正常水躍相似，可用前述同法以動量理論分析之，以  $Fn_1 = F_1 \sin \beta$  之關係代入水躍公式得：

$$y_2/y_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{1+8F_1^2 \sin^2 \beta} - 1)$$

此為偏斜水躍，以  $F_1$  為參變數關係式，又波鋒向之分速度在水躍前後可分解為：

$$V_{t1} = \frac{V_{n1}}{\tan \beta}, \quad V_{t2} = \frac{V_{n2}}{\tan(\beta - \theta)}$$

因在波鋒向無動量之變化，該速度應相等：

$$V_{t1} = V_{t2}, \quad \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)}$$

又由連續流公式得：

$$y_1 V_{n1} = y_2 V_{n2}, \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)}$$

將此式  $\frac{y_2}{y_1}$  自偏斜水躍公式中消去，則得：

$$\tan \theta = \frac{\tan \beta (\sqrt{1+8F_1^2 \sin^2 \beta} - 3)}{\tan^2 \beta + \sqrt{1+8F_1^2 \sin^2 \beta} - 1}$$

式中若  $F_1$  與  $\theta$  已知，則  $\beta$  可解出，試驗證明，實際上  $y_2/y_1$  之值甚小， $Fn_1$  亦甚小，故係在波浪型水躍之內。又一般渠道內複式偏斜水躍之發生會反射在渠道兩壁間形成為橫波 (Cross wave) 往復波動不止。

## 七、驟變段之理論分析 (Sudden Transitions):

急變流在驟變段所發生之水流現象，如水流途經銳緣堰，寬頂堰，控制閘門，渡槽或虹吸管之入口或出口，波水壩和靜水池出等，應用動量理論分析方法皆略述於前，渠道中突擴或突縮斷面，發生之水流現象，隨其擴縮度，應用動量理論可顯示出上下游驟變前後之水力因素間之關係，若其他因素影響不大，則理論值將甚為近似，若須將未知因素包括在內，則應從模型試驗中或原型中觀測得來，一般設計所依據者大多為用理論演證出公式，而式中之係數則由實際或試驗得來。

漸變段之距離甚短者係屬急變流之範疇，包括突擴大，突收縮，渠底突升或突降等，如圖二十在斷面①與②間應用動量原理，則：

$$Q(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1) = P_1 - P_2 - P_3 - Ff$$

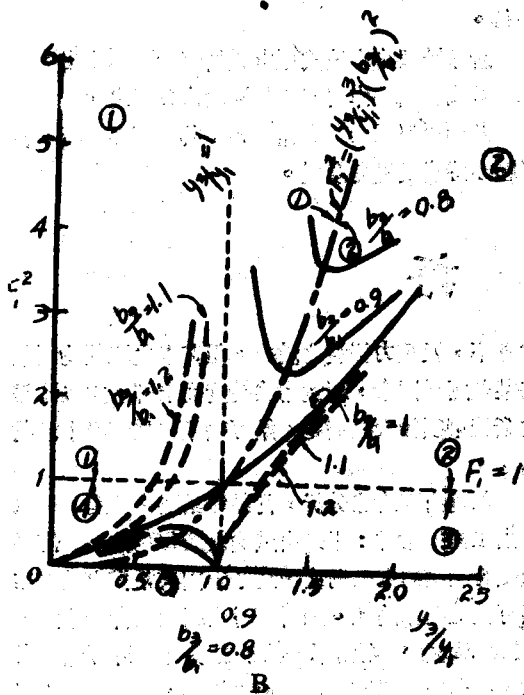
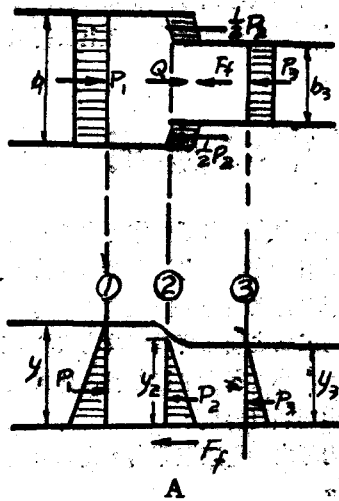
$$= 0.5wb_1 y_1^2 - 0.5w(b_1 - b_2) y_2^2 - 0.5wb_2 y_2^2 - Ff$$

式中  $b_1$ 、 $b_2$  為斷面 ①與② 處之寬度，若設

$Ff=0, \beta_1=\beta_2=1, y_2=y_3$ , 又以連續流關係代入  
 $Q=V_1 b_1 y_1=V_2 b_2 y_2$ , 則由上述簡化得:

$$F_1^2 = \frac{y_2/y_1((y_2/y_1)^3 - 1)}{2((y_2/y_1)^3 - 1)/(b_2/b_1)}$$

式中  $F_1$  若以爲縱坐標,  $(y_2/y_1)$  爲橫坐標, 以  
 $b_2/b_1$  爲參變數, 則一組曲線族可繪出如圖廿中, 曲  
 線極似高次之雙曲線, 茲分析其特性如次:



圖二十

1、曲線組僅考慮  $F_1$  及  $y_2/y_1$  爲正值者, 因實例  
 無負值也。

2、雙曲線均經過  $(F_1=0, y_2/y_1=0)$  和  $(F_1=0$   
 中  $y_2/y_1=1)$  兩點。

3、曲線均以  $y_2/y_1=b_1/b_2$  爲漸近線。

4、如  $b_2/b_1=1$ , 則渠斷面並無變化, 式可化  
 爲:

$$F_1^2 = \frac{1}{2} (y_2/y_1)((y_2/y_1)+1)$$

即水躍之標準式也 (參閱水躍公式之推演)

5、當點位於  $F_1^2=1$ , 即  $F_1=1$  線以上時, 則  
 上游爲超臨界流 ( $V_1 > V_c$ ), 因  $F > 1$  也, 若點位  
 於  $F_1=1$  線以下時, 則上游爲次臨界流 ( $V_1 < V_c$ )。

6、點位於  $F_1^2=(y_2/y_1)^2(b_2/b_1)^2$  以上時, 下  
 游爲超臨界流, 在線以下時, 下游爲次臨界流, 因

$$F_1^2 = \frac{V_1^2}{g y_1} = \frac{Q}{g y_1^2 b_1^2}$$

$$F_2^2 = \frac{V_2^2}{g y_2} = \frac{Q}{g y_2^2 b_2^2}$$

以上兩式消去  $Q$  則得:

$$F_2^2 = \frac{F_1^2}{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3}$$

故點在  $F_1^2=(y_2/y_1)^2(b_2/b_1)^2$  線上時,  $F_2=1$   
 即下游爲臨界流。點在線之上方時, 下游爲超臨  
 界流 ( $F_2 > 1$ ); 點在下方則相反。

因此, 圖廿上之四區域, 分爲四種流型:

區域一: 水流在超臨界流狀況流經驟變段。

區域二: 水流由超臨界流進入而變爲次臨界流  
 入下游。

區域三: 水流在次臨界流狀況流經驟變段。

區域四: 水流由次臨界流入而變超臨界流入下  
 游。

7、理論分析結果: 上述某部份曲線所表示之  
 水流狀況實不存在, 因在順水流之方向向下游增加  
 能量也。水力學定理證實任何水流情況, 如非有外  
 來之能量加入, 則能量線永向下游降低, 故流經驟  
 變段能量之損失爲  $\Delta E$ :

$$\Delta E = y_2 + \frac{V_1^2}{2g} - y_3 - \frac{V_2^2}{2g} \quad (\text{由比能公式})$$

$$\text{可寫爲 } \frac{\Delta E}{y_1} = 1 + \frac{F_1^2}{2} - \left[ \frac{y_2}{y_1} + 2 \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 \left( \frac{b_1}{b_2} \right)^2 \right]$$

如以此式應用於上述曲線，在 $\Delta E$ 為負值時，則實無此種水流發生。

同理可演證出突擴大断面之公式：

$$F_1^2 = \frac{\left( \frac{b_2}{b_1} \right) \left( \frac{y_2}{y_1} \right) \left[ 1 - \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right]}{2 \left[ \frac{1}{\left( \frac{b_2}{b_1} \right)} - \left( \frac{y_2}{y_1} \right) \right]}$$

## 肆、展望：—高等流體力學中之應用

以牛頓第二定律為流體動力學之依據，而推演出包含立體三方向之運動公式，且不受壓縮、滯性剪力及紊流等之限制，進而將該運動公式遍乘以單位體積質量，再對流體之體積 $V$ 積分，並化簡，又藉 Gaussian Equation 之助，一般性之動量公式可由下式表出：

$$\begin{aligned} & \frac{b}{dt} \int v \rho u dv + \int_s \rho u \left( v \frac{\partial x}{\partial n} + w \frac{\partial y}{\partial n} + \dots \right) dS \\ & = \int_V \rho X dv - \int_s p \frac{\partial x}{\partial n} dS + \int_s \left( \sigma' x \frac{\partial x}{\partial n} + \tau y x \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial y}{\partial n} + \tau z x \frac{\partial z}{\partial n} \right) dS \end{aligned}$$

式中 $u, v, w$ 為 $x, y, z$ 三方向之速度， $X$ 為勢能 $Q$ 之推演值 $p, \sigma, \tau$ ，為靜止壓力，正向應力及切向應力，上式中之動量係三方向向量之變化，其衡

此曲線組用虛線繪於圖廿之中。

就理論上言，動量原理可應用各種與上述相之情況，而藉幾何圖形推斷水力因素於斷面前後相關之變化，進而應用於實際之問題上，使水流之趨勢在掌握之中。

上述之理論，為漸變段，河渠中橋墩之束縮影響，排水短暗渠，水流中之阻碍物，河流分合點及人為之控制断面處等試驗結果分析之依據，藉此理論與試驗互相配合，以解決實際上水利工程之問題。

量之正向及切向之應力可由作用之外力表出。

近世紀來，流體三向流之理論及試驗各競發展，經近年來學者之揉合，使理論之應用進入燦爛之一頁，水利工程之最經濟最有效之設計，亦邁向三向流之途，茲略以高等流體力學動量原理之應用為例，舉其主要類目於後：

曳引力可由動量原理算出，曳引力係數可隨此關係演得。

亂流藉雷諾公式表示，其線動量公式由此推演而得。

邊界層理論之公式可由動量原理關係證出。

射流之擴散作用亦藉動量理論分析之。

其他流體動力之專題尚多，其應用亦日廣，各專題亦待繼續研究發展。

## 伍、尾 語

流體之運動係非常複雜之自然現象，數世紀來理論學者與試驗學家努力之結果曾收獲甚多之成果，但細讀其發展史則不難得知每一新發現均經甚緩慢之發展，其原因多為研究者皆各自個別研討之關係，且理論學者責備試驗結果不健全，而試驗家嘲笑那些空洞不合實際之理論，幸者，本世紀來理論與試驗之合作，使已有之流體運動資料，解為一爐，而應於甚多之領域之中。

理論分析係根據基本原理藉數學而求解，但複雜之流體運動現象使其應用受極大之限制，它雖可解出非平行流壓力之分佈，層流之阻力，球狀落體

之速率，及重力微波之波速，但甚多之現象均須忽略某些運動因素，視實用之精度而求解，尤以流體之紊流則須極大之簡化，始可藉「理想流體」求其結果，

如純由理論之分析，當易得錯誤之結論，是以過去工程師常言：「既由試驗永能得到結果，何必浪費時間去研究空洞之理論？」因其常僅由試驗結果可整理得結論也。如所研討之問題僅含一「量」(Quantity)，則由單一精確之觀測，即可滿足所需，但若包含二互依據而變之量時，則常需四至五種觀測始能指示出其函數間之關連，故變數增加，

試驗求解之困難驟增，而流體之運動其變數常難限制三、四種之內，如管流中之阻力即含六變數：直徑、糙率、流速、密度、滯性及壓力坡度，因此而使純試驗之方法求解，（由試驗觀測水流現象而得所需之資料）或僅憑已存之試驗結果中，由互無關連之曲線組，去尋求阻力定律時，常浪費精力不少，且無甚成果。但經理論之引導，藉尺度之觀念，則可得此現象甚明顯之關連。

#### 主要參考書目：(Bibliography)

- (1) Rouse & Howe: Basic Mecchanics of Fluids 1953
- (2) Rouse: Elementary Mechanics of Fluids 1946
- (3) Rouse: Advanced Mechanics of Fluids 1959
- (4) Bakhmeteff: Hydraulics of Open Channels 1932
- (5) Woodward d Posey: Hydraulics of Steady Flow in Open Channels 1941
- (6) Chow: Open Channel Hydraulics 1959
- (7) Jaeger: Engineering Fluid Mechanics 1956
- (8) Rouse: Engineering Hydraulics 1950

## 農工消息

### 一、本會會員可申請去法國深造

准中國工程師學會轉教育部函略以法國擬於近數月內舉辦機械工具，衛生技術，原子能及建築四種講習班，邀我國選員參加。

- 1 參加者，以熟諳法語及大專畢業後，曾任實際工作數年以上之工程師為限。
- 2 除赴法單程旅費應自備外，其抵達後之研習費用及回程旅費均由法方補助。
- 3 有志深造之本會合格會員可逕向法國大使館申請。

### 二、中國工程師學會明年為成立五十週年紀念決定擴大慶祝

中國工程師學會明年（民國五十年）適為創立五十週年紀念決定擴大慶祝，本會明年年會依照慣例亦參加該會舉行聯合年會，定於民國五十年十一月十四日至十六日舉行，十七日至十九日分組參觀，屆時將東邀世界各友好國家工程學術團體推派代表參加，並邀請僑居國外知名工程師、學者、教授回國參加並提出論文，此次慶祝規模宏大，希我會員早日預備。

### 三、本會常務理事金城率領農田水利技術團赴越

綜上所述，理論須經試驗之證實，而試驗須有理論為之導向，故只有兩者之配合始能使效率增高，且可得有健全理論之結論，並使應用推廣，故本文簡介之動量原理，係供水利工程設計，在有關流體動力影響之範圍內，其間各因子互變之趨勢，作為使用各手冊等試驗圖表時之參考，使設計更經濟，效率更增高，且更臻完善。

四十九年五月初稿

本會常務理事金城教授率領團員薛觀瀛、楊學凍、王恭堂、李柏齡、黃海洲等一行六人於十一月十八日動身赴越協助越南農田水利技術問題，定名為「中國駐越農田水利技術團」由金常務理事任團長，時間暫定半年，預定中心工作為水源壩址調查，渠道及灌溉構造物之規劃與設計，工程材料供應之規劃，及加強訓練技術人員等工作。

### 四、本會暨事暨大陸光復後農業工程計劃委員會召集人沈百先教授考察中南美各國

經濟部主辦之中南美農業友好訪問團，十一月六日由團長趙連芳博士率領團員沈百先、顧元亮、湯惠霖、劉溢芝、郁英彪等五人赴中南美墨西哥等八個國家考察該等國家之一般農業，土地利用，農業水利，商品貿易等項目為時十週預定十二月中返國。

### 五、本會候補理事孫清波教授兼任考試委員

本會候補理事孫清波原任臺灣大學農業工程系教授，於今年八月經總統提名監察委員投票同意兼任考試院第三屆考試委員，任期依照規定為六年，特此誌慶。