

以共變異函數探討抽水作用引起之倒轉現象

Using Covariance Function to Investigate the Reverse Phenomena under Groundwater Pumping

王 士 榮	徐 國 錦*
Shih-Jung Wang	Kuo-Chin Hsu
國立成功大學	國立成功大學
大地資源研究中心	資源工程學系
博士後研究員	教授

摘要

水井抽水或停抽引致土層中水壓在短時間內與地下水流概念相反之行為，稱之為水壓之倒轉行為，分別以Noordbergum與Rhade效應稱之。倒轉行為之發生主要來自於土體的應力傳遞速度與水體流動速度差異之交互作用所引起，可以使用耦合孔彈性理論來解釋。倒轉行為的作用機制為土體與水體的交互作用所引起，因此，本文使用一階二動差序率方法，建構一維度序率孔彈性理論模式，從二階統計量的觀點來探討Noordbergum與Rhade效應的倒轉現象。研究結果顯示，共變異函數比位移與水壓之平均值，更容易觀察到土水耦合關係中的倒轉現象，且使用一維度序率孔彈性模式即可觀測到土水交互作用的倒轉行為。而較小之水力傳導係數與楊氏模數較容易引起倒轉現象，且倒轉行為之發生與時間及空間之尺度有關。本研究為倒轉行為首次在一維度模式中預測出來，並首次使用二階統計量進行倒轉行為分析，而倒轉行為可用來了解土水交互作用之機制並可修正抽水或注水試驗時之參數推求結果。

關鍵詞：倒轉現象、地下水抽水、序率孔彈性理論、共變異函數、耦合

ABSTRACT

The reverse behavior caused by a groundwater pumping was observed in the field for decades. The mechanism is believed in the difference of the propagation velocity between

* 通訊作者，國立成功大學資源工程學系教授，70101 台南市大學路1號，kchsu@mail.ncku.edu.tw

mechanic pass and fluid flow under a coupled system. This coupled behavior can be well described by the poroelastic theory. In the physical viewpoint, the reverse behavior indicates an anomaly relationship between displacement and pore pressure, and it can be, theoretically, explained by the covariance function of displacement and pore pressure. Therefore, a stochastic approach called the first-order second-moment (FOSM) method is adopted to construct a stochastic poroelastic model. The second moment solution is used to describe the reverse behavior of Noordbergum and Rhade effects. This is the first time to use a one-dimensional stochastic poroelastic model to explain the reverse phenomena. The results show that the one-dimensional FOSM stochastic poroelastic model can easily detect the reverse phenomena under both a constant discharge and a sudden stop of discharge conditions. The reverse phenomena are dominant under a small hydraulic conductivity and Young's modulus and depend on both the spatial and temporal scales. The results also imply that one-dimensional poroelastic model under a constant discharge condition is a coupled system. The proposed FOSM method provides an approach to detect the reverse phenomena under discharge conditions. This phenomenon can be used in parameter inverse in the pumping test.

Keywords: Reverse phenomenon, Groundwater pumping, Stochastic poroelastic model, Covariance function, Couple system.

一、前言

抽水引致含水層（或阻水層）之水位在短時間內先上升後下降之現象，已在世界各地觀測到（Barksdale et al., 1936; Mandel, 1950, 1953; Ferris et al., 1962; Andreasen and Brookhart, 1963; Van Eyden et al., 1964; Verruijt, 1969; Schiffman et al., 1969; Wolff, 1970a, 1970b; Gambolati, 1974; Rodrigues, 1983; Langguth and Treskatis, 1989），其初始水位上升之行為與一般熟知的抽水引起土體之孔隙水壓下降行為相反，因此被稱為倒轉行為（reverse behavior），此行為最早在荷蘭的 Noordbergum 被觀測到（Verruijt, 1969），因此亦稱為 Noordbergum 效應（Noordbergum effect），而學者 Mandel 與 Cryer 最早從數學理論中發現此行為（Mandel, 1950, 1953; Cryer, 1963; Schiffman et al., 1969），因此此行為亦稱為 Mandel-Cryer 效應（Mandel Cryer effect）。對此倒轉行為的發生機制，有許多不同的看法與解釋，目前認為主要在於土體力平衡與水流作用時間尺度不同所致。應力之傳遞可如波速一般，每秒達到數公里，而水流之速度受到土體特性之影響而有不同，如未膠結砂的水力傳導係數約每秒 10^{-3} 公尺，由此可看出兩者在速度上有好幾個數量級（order）的差異。因此在有限距離內，當土層受到外力作用而瞬間改變其應力狀態時，孔隙中之

水壓變化受到土層特性之限制而有相對較慢之反應。在抽水狀態下，因為土體變形速度快於水流，使土層中之應力在距離抽水點一定距離處產生壓縮（compression），而造成雖然抽水卻水壓上升的現象。相反的，在持續抽水一段時間後突然停止抽水，孔隙水壓亦會有倒轉的現象，即水壓會先再繼續下降一段時間後才恢復上升，此現象最早在 Rhade 觀測到（Langguth and Treskatis, 1989），因此稱為 Rhade 效應（Rhade effect）。近年關於此倒轉效應的文章亦持續的發表與提出（Kim and Parizek, 1997, 2005; Burbey, 1999; Selvadurai and Shirazi, 2004），雖然其討論的現象相似或相同，但其採用名詞則如上所述略有不同，本文章則統稱此與傳統熟知相反的行為，為倒轉行為。

倒轉行為之模擬與預測，主要是以孔彈性理論（poroelastic theory）為基礎，而土壤力學中常用的 Terzaghi 壓密沉陷理論，則無法預測與模擬出此倒轉行為。主要原因在於 Terzaghi 理論採用非耦合（uncouple）方式，先計算流體的孔隙水壓變化力分佈，再代入土體的力平衡方程式中來估算土體的沉陷量，因此非耦合模式無法展現水壓倒轉的現象（Yin et al., 2007）。孔彈性理論考量土體與水體的耦合（couple）行為，採用土體與水體的互制機制，同時求解土體的變形與孔隙水壓的變化，因此可以模擬出貼近真實情況的行為。孔彈性理論最早由 Biot（1941）所提出，主要採用土體位移與水體的孔隙水壓變化變化為變數（variable），考慮土體的力平衡與水體的質量守衡方程，推導出三維度的耦合壓密理論。

從前人的研究中發現，倒轉行為僅在二維度與三維度的孔彈性理論中被討論，主要原因在於，一維度的孔彈性理論一般被視為與 Terzaghi 的壓密理論相同，認為其在一維狀態下可以簡化為非耦合狀態。然而，異質場中耦合的孔彈性理論，僅在四種情形下會成為非耦合模式（Wang, 2000）：（1）穩態（steady state），（2）軸向應變且固定垂直應力，（3）高壓縮性的流體，（4）無限域或半無限域，不考慮體力（body force）且位移場為不可轉動（irrotational）情況下。因此，並非一維度的孔彈性模式即為非耦合模式。而在文獻的現地觀察與數值模擬中亦發現，倒轉行為發生在靠近抽水點附近，並且主要沿著垂向一維度的方向上（Kim and Parizek, 1997），而以倒轉行為的解釋機制來看，可以由一維度的土體變形與孔隙水壓變化的相關性來解釋。因此，若以序率（stochastic）的概念來進行孔彈性理論的抽水模擬，將可以由位移與孔隙水壓變化的共變異函數（covariance function）來解釋此倒轉現象。

序率方法可以將參數、變數以及邊界條件和模式的不確定性納入考慮，其不僅可以

估算定率式方法中的平均行為，還可以獲得變數的二階以上統計特性，提供模擬結果更多的有用資訊。而其中以前二階統計量—平均數（mean）與變異函數（variance）最為人所知與使用。序率方法以蒙地卡羅法（Monte Carlo）之應用最為廣泛，主要在於其使用原始之控制方程式來做運算，沒有加入其他額外假設且簡單易行，目前亦已經應用在孔彈性理論的模擬中（Frias et al., 2004; Ferronato et al., 2006; Wang and Hsu, 2009a）。而動差方程法中的一階二動差法（first-order second-moment, FOSM）為近年來常被提出來使用的序率方法之一（Gelhar, 1993; Zhang, 2002; Rubin, 2003; Wang and Hsu, 2009b），其計算迅速且可在一次的運算中便得到與蒙地卡羅法多次運算相近的結果，比蒙地卡羅法節省許多電腦資源並且可有效率地求得機率式之解答。因此本文將採用 FOSM 序率方法來建構序率孔彈性理論模式。

本文假設達西水力傳導係數為隨機變數的情況下，建立一維度 FOSM 序率孔彈性理論模式，模擬垂向土體的底端排水情況下（下方含水層抽水），土體與水體耦合作用下之倒轉現象，並藉由二階統計量之結果來探討變數間之相關性與變異性，再由參數之敏感度分析了解倒轉行為發生的條件，最後也將模擬抽水停止時產生之 Rhade 效應。

二、序率孔彈性理論模式建構

2.1 序率孔彈性理論

FOSM 序率孔彈性理論最早由 Wang and Hsu（2009b）所建立，其假設孔彈性理論參數中，變化量最大的達西水力傳導係數為隨機變數（random variable），採用 FOSM 方式推導序率偏微分方程之控制方程式與初始邊界條件，其中平均值方程式（mean equation）與原始控制方程式相同，而擾動項方程式（perturbation equation）則可以用來估算各變數間的相關性與變異性。在一維度狀態下，可獲得 FOSM 序率孔彈性理論的平均值方程式：

$$\begin{cases} a^{-1} \frac{\partial^2 \langle w(z,t) \rangle}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial \langle P(z,t) \rangle}{\partial z} = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 \langle w(z,t) \rangle}{\partial t \partial z} + Q^{-1} \frac{\partial \langle P(z,t) \rangle}{\partial t} - \kappa_G \frac{\partial^2 \langle P(z,t) \rangle}{\partial z^2} - \langle q(z,t) \rangle = 0 \end{cases} \quad (1)$$

與擾動項方程式：

$$\begin{cases} a^{-1} \frac{\partial^2 w'(z,t)}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial P'(z,t)}{\partial z} = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 w'(z,t)}{\partial t \partial z} + Q^{-1} \frac{\partial P'(z,t)}{\partial t} - \kappa_G \frac{\partial^2 P'(z,t)}{\partial z^2} - \kappa_G \frac{\partial}{\partial z} \left[Y'(z,t) \frac{\partial \langle P(z,t) \rangle}{\partial z} \right] = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 w 為位移， P 為孔隙水壓變化， a 為最終壓縮係數 (final compressibility, $a^{-1} = \lambda + 2\mu$, λ 與 μ 為拉梅常數)， α 為無因次有效應力係數， Q^{-1} 為 Biot 壓縮係數， κ 為達西水力傳導係數 (Darcy hydraulic conductivity, $\kappa = K / \gamma_w$, 其中 K 為水力傳導係數， γ_w 為水的單位重， $\gamma_w = 9,810 N / m^3$)， κ_G 為達西水力傳導係數之幾何平均 (geometric mean)， Y 為對數達西水力傳導係數 ($Y = \ln \kappa$)， q 為源流項 (sink and source, 表單位時間下單位體積的流體變化量)， z 為垂向位置， t 為時間， $\langle A \rangle$ 與 A' 分別表示 A 之平均值項與期望值為零的微小擾動項。分別對式 (2) 乘上 $Y'(z,t)$ 、 $P'(Z,\tau)$ 與 $w'(Z,\tau)$ 並取期望值，可得到三組共變異偏微分方程組：

$$\begin{cases} a^{-1} \frac{\partial^2 C_{Yw}(z,t;Z,\tau)}{\partial Z^2} - \alpha \frac{\partial C_{YP}(z,t;Z,\tau)}{\partial Z} = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 C_{Yw}(z,t;Z,\tau)}{\partial \tau \partial Z} + Q^{-1} \frac{\partial C_{YP}(z,t;Z,\tau)}{\partial \tau} - \kappa_G \frac{\partial^2 C_{YP}(z,t;Z,\tau)}{\partial Z^2} \\ - \kappa_G \frac{\partial}{\partial Z} \left[C_{YY}(z,t;Z,\tau) \frac{\partial \langle P(z,t) \rangle}{\partial Z} \right] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{-1} \frac{\partial^2 C_{wP}(z, t; Z, \tau)}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial C_{PP}(z, t; Z, \tau)}{\partial z} = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 C_{wP}(z, t; Z, \tau)}{\partial t \partial z} + Q^{-1} \frac{\partial C_{PP}(z, t; Z, \tau)}{\partial t} - \kappa_G \frac{\partial^2 C_{PP}(z, t; Z, \tau)}{\partial z^2} \\ - \kappa_G \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{YP}(z, t; Z, \tau) \frac{\partial \langle P(z, t) \rangle}{\partial z} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{-1} \frac{\partial^2 C_{ww}(z, t; Z, \tau)}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial C_{Pw}(z, t; Z, \tau)}{\partial z} = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 C_{ww}(z, t; Z, \tau)}{\partial t \partial z} + Q^{-1} \frac{\partial C_{Pw}(z, t; Z, \tau)}{\partial t} - \kappa_G \frac{\partial^2 C_{Pw}(z, t; Z, \tau)}{\partial z^2} \\ - \kappa_G \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{Yw}(z, t; Z, \tau) \frac{\partial \langle P(z, t) \rangle}{\partial z} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

其中 Z 與 τ 分別為與 z 和 t 不同位置與時間之變量， $C_{AB}(z, t; Z, \tau)$ 為共變異函數（ A 與 B 可為 w 、 P 或 Y ），定義為：

$$C_{AB}(z, t; Z, \tau) = \langle (A(z, t) - \langle A(z, t) \rangle)(B(Z, \tau) - \langle B(Z, \tau) \rangle) \rangle \quad (6)$$

當 $A=B$ 表示自我共變異函數（auto-covariance）， $A \neq B$ 表示交叉共變異函數（cross-covariance），可代表兩變數在不同時間與位置下之相關性；而若當兩變數處於相同位置與時間下（ $(z, t) = (Z, \tau)$ ），則 $C_{AB}(z, t; z, t)$ 為變異函數（variance）。

2.2 模式建構

Langguth and Treskatis（1989）於現地觀測到 Noordbergum 與 Rhade 效應，其抽水井與含水層型態可簡化為圖 1 之概念模式，在距離抽水井一段距離之水層系統，可視為垂向水流，因此研究區可以一維度模式來表示如圖 2 所示。假設此研究區之圓柱土體高 $h=15m$ ，初始狀態處於靜態穩定（初始位移與孔隙水壓變化皆為零），上方不受力為自由變形，並設定土體底部位移量為零，側向不排水且不可膨脹（側向無限延伸且無水平流），水可從上方自由進出（固定水壓變化），底邊為固定排水 $F=10^{-5}m/s$ （模擬下方

為含水層抽水)，且土體中無任何源流（ $q=0$ ）。設定應力張力為正壓力為負，孔隙水壓變化之正負表相對於初始水壓之狀態，正表示水壓增加，負表示水壓減小，並指定 z 軸向下為正。則初始與邊界條件可以平均值與共變異函數形式分別寫為（Wang and Hsu, 2009b）：

$$\begin{cases} \langle P(z, t) \rangle = 0 & \langle w(z, t) \rangle = 0 & z \in \Omega \\ \langle P(0, t) \rangle = 0 & \frac{\partial \langle w(0, t) \rangle}{\partial z} = 0 & z = 0 \\ -\kappa_G \frac{\partial \langle P(h, t) \rangle}{\partial z} = F & \langle w(h, t) \rangle = 0 & z = h \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} C_{Y_P}(z, 0; Z, 0) = 0 & C_{Y_w}(z, 0; Z, 0) = 0 & Z \in \Omega \\ C_{Y_P}(z, t; 0, \tau) = 0 & \frac{\partial C_{Y_w}(z, t; 0, \tau)}{\partial Z} = 0 & Z = 0 \\ \frac{\partial C_{Y_P}(z, t; h, \tau)}{\partial Z} + C_{Y_Y}(z, t; h, \tau) \frac{\partial \langle P(h, t) \rangle}{\partial Z} = 0 & C_{Y_w}(z, t; h, \tau) = 0 & Z = h \end{cases} \quad (8)$$

假設固體顆粒相對於介質本身為不可壓縮，可適用於未固結之沖積扇含水層材質，此時 α 值為 1 且 Q^{-1} 可簡化為 $n\beta_f$ （Wang, 2000），而水的壓縮係數 β_f 取 $4.4 \times 10^{-10} m^2 / N$ （Gelhar, 1993），其餘參數設定如表 1 所示，採用之參數為未固結之細砂沉積物。

求解 FOSM 方程組時，需給定對數達西水力傳導係數之理論共變異函數 C_{Y_Y} ，一般認定達西水力傳導係數符合對數常態分配（log-normal distribution）（Gelhar, 1993），假設其與時間無關（time-independent），則對數模式之共變異函數 C_{Y_Y} 可寫為

$$C_{Y_Y}(z, Z) = \sigma_Y^2 \exp\left(-\frac{|z-Z|}{I_Y}\right) \quad (9)$$

其中 I_Y 與 σ_Y^2 分別為 Y 之相關尺度 (integral scale) 與變異數, 在此分別設定為 1 公尺與 1.0。而在現地模擬時, 則需先建構 Y 之半變差函數圖 (semivariogram), 從圖中擬合出 Y 之相關尺度與變異數值, 再代入方程式中計算相對應的 C_{YY} 值。

本文之方程式求解採用全隱式 (fully implicit) 有限差分 (finite difference) 數值方法, 以網格節點 (mesh center) 概念離散控制方程式, 並對空間偏微分採用中央差分法, 對時間偏微分則採用向後差分法, 以 Fortran 程式語言撰寫程式, 使用 Thomas 演算法進行求解。由於平均值方程式與共變異方程式具有相同形式, 可使用相同步驟與程式進行求解。設定網格間距 $\Delta z = 0.2$ 公尺, 時間尺度則分為兩部分, 初始採用時間間隔 $\Delta t = 0.05$ 秒, 共模擬 60 分鐘, 之後改用時間間隔 $\Delta t = 6$ 秒, 共模擬 60 小時的暫態 (transient) 行為, 探討初始排水與達到穩定狀態下, 倒轉現象和位移與孔隙水壓變化之平均與共變異行為之變化。

三、結果與討論

3.1 抽水引致一維度序率孔彈性模式之倒轉行為

圖 3 為土體底邊固定排水狀況下, 深度分別為 3.7 公尺、7.5 公尺與 11.3 公尺之位移與孔隙水壓變化平均值解, 位移為正表示土體壓縮, 孔隙水壓變化為負表示低於初始水壓狀態。位移與孔隙水壓變化的一階統計變量, 在時間域不同深度中均未發現任何異常現象, 然而, 在空間域中若計算每個網格的單獨變形量可以發現, 在排水狀態下的初始時間時, 靠近上邊界的網格會有些微膨脹現象 (如圖 4 所示)。圖 4(a) 表示平均位移解, 在時間為一分鐘且深度為 7.5 公尺內之放大結果, 若以每個網格計算該網格的壓密狀況則如 4(b) 所示, 可發現在深度約 4 公尺以內之土體為膨脹, 4 公尺深度以下才為壓密狀況。發生此倒轉行為的主要原因為, 底端剛開始排水時, 靠近排水邊界的網格因孔隙水壓變化下降導致有效應力上升, 因此此處土體發生壓密作用且有效應力瞬間傳遞到整個土體。此時, 遠離排水邊界網格中的水壓尚未受到排水作用驅動, 但靠近排水端之有效應力增加使得土體單元壓縮, 而造成遠離排水邊界之土體受到張力, 引起上端土體發生些微膨脹現象並導致水壓降低; 當時間增加, 上端土體因膨脹引起之水壓下降接著也造成土體壓密, 且排水作用漸漸傳遞到整個土體, 因此在時間稍長時皆恢復到水壓下降且土體壓密之預期行為。然而, 平均位移之解若以時間尺度來看, 不同深度之位移代

表該點相對於底端之位移變化量，因此在開始排水後，各深度之位移受到底端壓密影響皆為向下沉陷之正值，不同深度僅在沉陷速度上有所差異，故在圖 3(a)中深度 3.7 公尺之曲線，仍然沒有發現倒轉行為。

本文案例中之倒轉行為發生在位移而非孔隙水壓變化，與前人研究報告中所指水壓倒轉行為之 Noordbergum 效應不相同，主要原因在於本文案例之上邊界設定為零水壓與自由變形邊界，且無水平向位移之結果。以 Langguth and Treskatis (1989) 現地之水層分佈情況來看，若在本文案例之上方有一束制之土層且考慮側向變形，則底端排水造成上方土體之膨脹現象將會受到侷限與壓縮，進而轉變為水壓上升之現象。因此可推測在此狀態下，將會產生土體中水壓上升之 Noordbergum 效應，其可以在二維度孔彈性模式中展現 (Kim and Parizek, 1997)，唯此模式已在文獻中探討且不在本文討論範圍之內。

圖 5 為共變異函數解在時間域中之結果，圖中可明顯發現 $C_{YP}(z, z)$ 與 $C_{PW}(z, z)$ 在初始時間時，兩者皆發生與後來行為相反的現象。共變異函數 $C_{YP}(z, z)$ 表示相同位置水力傳導係數與孔隙水壓變化相對於平均值之微小擾動的相關性。圖 5(a) 顯示，初始時水力傳導係數之擾動與孔隙水壓變化之擾動為反向，主要受到底端排水作用之影響，即當水力傳導係數相對於平均值較大時，相同位置的孔隙水壓變化相對於平均值較小，或水力傳導係數相對較小時，相同位置的孔隙水壓變化相對較大。水力傳導係數之擾動控制孔隙水壓變化的大小，其值越大則流動速度越快消散越快，造成水壓越低，反之則水壓越高。時間較長時， $C_{YP}(z, z)$ 為正值表示正相關，即當水力傳導係數相對於平均值較大時，孔隙水壓變化相對於平均值亦大，反之則變小，主要為受到上端補注作用之影響。當水力傳導係數相對較大時，底端穩定排水造成上端注水相對較多，使土體中之孔隙水壓變化相對較大；反之，較小的水力傳導係數造成上端補注較小而水壓相對較低，時間更長時則會達到一個穩定值。圖 5(b) 顯示 $C_{PW}(z, z)$ 之行為，在初始時 $C_{PW}(z, z)$ 為正值而後轉為負值。 $C_{PW}(z, z)$ 表孔隙水壓變化與位移相對於其平均值之微小擾動的關係，正值代表兩者關係為正向，即孔隙水壓變化相對於平均值較高時，位移也相對較高，反之則較小。初始時 $C_{PW}(z, z)$ 為正值，但底端排水作用造成水壓下降理應造成位移量上升，為負相關，因此 $C_{PW}(z, z)$ 為正值可視為倒轉行為。當時間增加時， $C_{PW}(z, z)$ 值則回復到負相關，即孔隙水壓變化相對較低時，位移相對較大之正常現象。 $C_{PW}(z, z)$ 發生倒轉之原

因，為初始時受到上方土體發生些微膨脹之倒轉作用所引起。

由以上結果可知，一維度的孔彈性理論在底端固定排水狀況下的確會發生倒轉現象，即此狀態下應為一耦合模式，但其在位移與孔隙水壓變化的平均值解中，時間域之結果無法顯現倒轉行為，而空間域中之結果因研究時間尺度之關係，不容易注意到短時間內單獨網格之變形情況，因此倒轉行為不容易在一維度孔彈性理論的平均值解中發現。在共變異函數解中，共變異函數 $C_{pw}(z, z)$ 可代表孔隙水壓變化與位移之相關性，而其的確在短時間內產生正相關之倒轉行為，即水壓下降且土體位移也下降（位移量減小），並且可以很容易的在圖中觀察出來。因此本文所提出之一維度 FOSM 序率孔彈性理論模式，提供了一個預測與模擬孔彈性理論中倒轉行為之方法。

3.2 參數敏感度分析

為了探討一維度孔彈性理論倒轉行為之發生機制，本文將分析孔彈性參數之敏感度，以確定控制倒轉行為之因子。孔彈性理論中，影響模式行為較大的參數為楊氏模數與水力傳導係數，不同材質之土體，其楊氏模數與水力傳導係數會有數個量級的差異，其中水力傳導係數更可以達到十個量級（Gelhar, 1993）。而泊松比與孔隙率之變化量相對較小，且其變化對模式的影響不顯著，因此本文僅探討楊氏模數與水力傳導係數之變化，對孔彈性理論中倒轉行的影響，以確定其發生條件。

圖6為楊氏模數在共變異函數解中之敏感度分析結果。圖6(a)與6(b)表示楊氏模數為 $10^7 N/m^2$ 之結果，其顯示倒轉行為極為明顯，可由圖6(e)與6(f)在60小時中的模擬結果驗證，圖6(a)與6(b)之上升或下降行為為到轉行為的初始部份，非持續的上升或下降現象。靠近排水邊界（深度為11.3公尺）之倒轉行為在短時間內即消散，而中央位置（深度為7.5公尺）則較淺處（深度為3.7公尺）有較大的倒轉值，遠離排水邊界，倒轉行為之持續時間相對較長。其中不同深度之 $C_{yp}(z, z)$ ，最後達到穩定狀態之值相近，而 $C_{pw}(z, z)$ 則最後達到各自的穩定值。圖6(c)與6(d)為楊氏模數在 $10^9 N/m^2$ 之結果，倒轉行為不明顯，僅在 $C_{pw}(z, z)$ 極短的時間內有些微上升現象，此亦表示， $C_{pw}(z, z)$ 比 $C_{yp}(z, z)$ 對倒轉行為的觀測更敏感。楊氏模數對倒轉行為的影響，主要在於楊氏模數可視為土體的

軟硬程度，楊氏模數越大則越堅硬，反之越軟。當土體較堅硬時，土體的變形不易，因此土體的些微膨脹或孔隙水受到些微壓縮的倒轉行為不易發生；反之，土體越軟則倒轉行為越明顯，因此倒轉行為一般在較軟的阻水層（aquitard）中被觀測到（Langguth and Treskatis, 1989）。

圖7為水力傳導係數在共變異函數解中之敏感度分析結果，分別以 $10^{-6} m/s$ 與 $10^{-4} m/s$ 作計算，其結果與楊氏模數之敏感度分析相似。圖7(a)與7(b)表示水力傳導係數為 $10^{-6} m/s$ 之結果，可明顯看出倒轉行為，圖7(c)與7(d)表示水力傳導係數為 $10^{-4} m/s$ 之結果，可以發現 $C_{yp}(z, z)$ 的異常情形並不存在，而 $C_{pw}(z, z)$ 之倒轉行為非常不明顯。水力傳導係數對倒轉行為之影響，主要在於水力傳導係數大時，水體流動速度快，底端排水作用在短時間內即傳遞到整個土體，因此在本文模擬時間尺度下倒轉行為非常不顯著。但若以較小的時間尺度來看，倒轉行為理論上同樣會明顯呈現。

由以上結果可知，在水力傳導係數較小或楊氏模數較小時，倒轉行為較為顯著。主要原因在於，水力傳導係數較大造成土體中水流速度較快，可迅速傳遞底端排水作用引起之水壓變化，而消散掉倒轉行為；反之，水力傳導係數較小時，水流速度與土體應力之傳遞速度差更顯著，容易造成倒轉行為的發生。而楊氏模數較大時代表土體相對較硬，即土體不容易變形且其耦合系統極快達到穩定狀態，因此土體在底端排水初期引起的膨脹現象不易發生，造成倒轉行為不顯著。反之，楊氏模數較小時土體易變形，倒轉行為顯著。值得注意的，本文所探討一維度序率孔彈性模式中的倒轉行為敏感度分析，為基於本文之參數設定，而實際上倒轉行為的發生與空間和時間尺度相關。倒轉行為發生的機制在於土體之應力傳遞與水體之水流速度差異，一旦兩者相差到一定程度，即會發生倒轉行為；反之，土體中的水壓消散越快，則倒轉行為會越不明顯，但若縮小觀察的時間尺度，則理論上同樣可以觀察到倒轉的現象。

3.3 Rhade 效應

抽水會引起土體中發生倒轉行為，其機制為流體流速與土體應力傳遞速度的差異所

引起。若在抽水初始狀態下會引起土體的倒轉效應，則理論上在抽水停止一段時間內應該也會發生倒轉現象，即水壓先繼續下降一段時間而後再漸漸回升的現象，此行為稱為 Rhade 效應，且其同樣可以用一維度序率孔彈性理論模式來作機制的解釋。

模式與初始狀態之設定與前面案例相同，但在底端固定排水 30 分鐘後之瞬間停止排水作用，其模擬結果如圖 8 所示。圖 8(a)為位移之平均值解在時間域之結果，當底端排水作用停止後，位移之平均值便立刻開始下降，即土體產生彈性膨脹作用，當時間拉長時漸漸回復到位移為零之結果，即原始狀態。主要因為，上邊界設定水壓變化為零，在底端排水作用下可視為補注邊界，因此在排水作用停止後，上邊界仍然會持續補注，一直到土體達到穩定狀態為止，而本文所採用之模式為線性彈性模式，故最後會回復到位移為零之狀態。此行為中無倒轉現象發生。圖 8(b)為孔隙水壓變化之平均值解在時間域之結果，當底端排水作用停止後，孔隙水壓變化在靠近排水邊界（11.3 公尺處）馬上開始回升，但遠離排水邊界深度為 7.5 公尺與 3.7 公尺處，孔隙水壓變化先繼續略為下降，而後才開始回升。此現象與 Rhade 效應類似。主要發生原因為，底端持續的排水會在土體中建立一水流系統，且當時間夠長時會達到一穩水流。若底端排水作用突然停止時，此邊界即成為無水流邊界（no-flow boundary），因此靠近底端的水流會馬上停止流動，但遠離排水邊界的水體仍然有原本水流系統的速度，故會繼續造成如原本排水作用引起的水壓下降行為，而後上方持續注水來補充排水作用造成下降的水壓，產生水壓上升行為，並將原本負的孔隙水壓變化回填到初始狀態。然而，從平均值解中可發現，此倒轉行為在很短的時間內即消失，非常不顯著而容易被忽略，但若使用二階統計量來觀察水壓與位移變化的相關性，則較有機會發現此倒轉行為。

圖 8(c) 為 $C_{yp}(z, z)$ 共變異函數解在時間域之結果。排水初始時間可看出有前述先降後升之行為，而當底端排水作用停止後， $C_{yp}(z, z)$ 之值不管在任何深度皆發生類似 Rhade 效應之現象，先繼續上升一段時間而後下降，但同樣在靠近排水邊界位置之倒轉行為相對不明顯。圖 8(d) 為 $C_{pw}(z, z)$ 共變異函數解在時間域之結果。其結果可明顯看出倒轉的 Noordbergum 效應與 Rhade 效應，中央深度（7.5 公尺）與淺層深度（3.7 公尺）在排水停止狀態下之倒轉行為較顯著，而靠近排水位置（深度 11.3 公尺）之倒轉行為不顯著。此結果顯示，倒轉行為之發生會與距離排水邊界之距離有關，即倒轉行為會受到空間尺度的影響，距離排水位置過近將會不容易觀察到倒轉行為的發生。

四、結論

本文使用一階二動差序率方法建構序率孔彈性理論模式，從二階統計量的觀點來探討 Noordbergum 與 Rhade 效應的倒轉行為。在本文設定條件下，平均值解可發現，底端固定排水會造成淺層的土體在初始時間發生些微膨脹的倒轉現象。原因在於，當底端剛開始排水時，靠近排水邊界的土體因孔隙水壓下降導致有效應力上升，而靠近排水邊界形成之有效應力成為遠離排水邊界土體的張力，引起上端土體發生些微膨脹現象。然而，在位移與孔隙水壓變化的平均值解中，時間域之結果無法顯現倒轉行為，且空間域中之結果因時間尺度之關係，不容易觀察到位移微小之倒轉行為；而在共變異函數解中，共變異函數 $C_{pw}(z, z)$ 可代表孔隙水壓變化與位移相對於平均值之相關性，其可在短時間內觀察到正相關之倒轉行為，且可以很容易的在圖中展現出來。在參數的敏感度分析中，水力傳導係數或楊氏模數較小時，倒轉行為較為顯著。原因在於，水力傳導係數較大造成土體中水流速度較快，可迅速傳遞底端排水作用引起之水壓變化，而消散掉倒轉行為；而楊氏模數較大時代表土體相對較硬，即土體不容易變形且其耦合系統極快達到穩定狀態，因此土體在底端排水初期引起的膨脹現象不易發生，造成倒轉行為不顯著。然而，實際上倒轉行為的發生和空間與時間之尺度有關，當空間尺度較小或時間尺度較小時，較大的水力傳導係數或楊氏模數所建立的模式中，預期將同樣可以觀察到倒轉行為。在排水作用停止的模擬中，本文所提出之一維度序率孔彈性理論模式，同樣可以觀察到 Rhade 效應。

本文之研究結果，為倒轉行為首次在一維度序率孔彈性理論模式中被提出，且首次採用二階統計量來解釋倒轉現象發生的機制。因此，本文所建立之一維度序率孔彈性模式，提供一個簡單且有效的預測與判視孔彈性理論中倒轉現象之方法。本文採用二階統計量進行倒轉現象之機制解釋與行為預測，然而，二階統計量並非一實際存在之物理量，無法由實際物理行為進行驗證，且本研究目前僅進行基礎研究與探討，未來可針對二階統計量與倒轉行為相關議題進行進一步研究，以獲得更多相關資訊。

誌謝

本文承蒙國科會（計畫編號 NSC 97-2621-M-006-006）與經濟部水利署（計畫編號 MOEAWRA 1000076）補助始得以完成，特此誌謝。

參考文獻

1. Andreasen, G.E., and Brookhart, J.W., "Reverse water level fluctuations: Methods of collecting and interpreting ground-water data," *U.S. Geological Survey Water Supply Paper*, 1544-H, 30-35, 1963.
2. Barksdale, H.C., R.W. Sundstrom, M.S. Brunstein, "Supplementary Report on the Ground-Water Supplies of the Atlantic City Region, State of New Jersey," *State Water Policy Commission Special Report* 6, 1936.
3. Biot, M.A., "General theory of three-dimensional consolidation," *Journal of Applied Physics*, Vol. 12, 155-164, 1941.
4. Burbey, T.J., "Effects of horizontal strain in estimating specific storage and compaction in confined and leaky aquifer systems," *Hydrogeology Journal*, Vol. 7, 521-532, 1999.
5. Cryer, C.W., "A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 16, 401-412, 1963.
6. Ferris, J.G., D.B. Knowles, R.H. Brown, and R.W. Stallman, "Theory of aquifer tests." *US Geol. Survey Water Supply Paper*, 153-E, 1962.
7. Ferronato, M, G. Gambolati, P. Teatini, and D. Bau, "Stochastic poromechanical modeling of anthropogenic land subsidence," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 11-12, 3324-3336, doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.06.090, 2006.
8. Frias, D.G., M.A. Murad, and F. Pereira, "Stochastic computational modelling of highly heterogeneous poroelastic media with long-range correlations," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 28, No. 1, 1-32, doi: 10.1002/nag.323, 2004.
9. Gambolati, G., "Second-order theory of flow in three-dimensional deforming media," *Water Resources Research*, Vol. 10, 1217-1228, 1974.
10. Gelhar, L.W., "Stochastic Subsurface Hydrology," Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1993.

11. Kim, J.M., and R.R. Parizek, "Numerical simulation of the Noordbergum effect resulting from groundwater pumping in a layered aquifer system," *Journal of Hydrology*, Vol. 202, 231–243, 1997.
12. Kim, J.M., and R.R. Parizek, "Numerical simulation of the Rhade effect in layered aquifer systems due to groundwater pumping shutoff," *Advances in Water Resources*, Vol. 28, No. 6, 627-642, doi:10.1016/j.advwatres.2004.12.005, 2005.
13. Langguth, H.R., and C. Treskatis, "Reverse water level fluctuations in semiconfined aquifer systems - "Rhade effect"," *Journal of Hydrology*, Vol. 109, 79-93, 1989.
14. Mandel, J., "Consolidation des sols (Etude mathematique)," *Geotechnique*, Vol. 3, 287–299, 1953.
15. Mandel, J., "Etude mathematique de la consolidation des sols." In: *Acts Du Colloque International De Mechanique, Poitier, France*, Vol. 4, 9–19, 1950.
16. Rodrigues, J.D., "The Noordbergum effect and characterization of aquitards at the Rio Maior mining project," *Ground Water*, Vol. 21, No. 2, 200–207, 1983.
17. Rubin, Y., "*Applied stochastic hydrogeology*," Oxford, New York, 2003.
18. Schiffman, R.L., A.T.F. Chen, and J.C. Jordan, "An analysis of consolidation theories," *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division: Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 95, No. SM1, 285-312, 1969.
19. Selvadurai, A. P. S., and A. Shirazi, "Mandel–Cryer effects in fluid inclusions in damage-susceptible poroelastic geologic media," *Computers and Geotechnics*, Vol. 31, 285–300, doi:10.1016/j.compgeo.2004.02.008, 2004.
20. Van Eyden, W.A.A, H.W. Kuper, and P. Santema, "Some method used in geo-hydrologic survey of the south-western deltaic area in the Netherlands," *International Association of Scientific Hydrology Publication*, Vol. 66, 528-557, 1964.
21. Verruijt, A., "Elastic storage of aquifers," In *Flow Through Porous Media*, Edited by R. De Wiest, Elsevier, New York, 331-376, 1969.
22. Wang, H.F., "*Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology*," Princeton University Press, 2000.
23. Wang, S.J. and K.C. Hsu, "Dynamics of Deformation and Water Flow in Heterogeneous Porous Media and its Impact on Soil Properties," *Hydrological Processes*, Vol. 23, 3569-3582, doi: 10.1002/hyp.7458, 2009a.
24. Wang, S.J. and K.C. Hsu, „The application of the first-order second-moment method to analyze poroelastic problems in heterogeneous porous media," *Journal of Hydrology*, Vol. 369, 209-221, doi:10.1016/j.jhydrol.2009.02.049, 2009b.

25. Wolff, R.G., “Field and laboratory determination of the hydraulic diffusivity of a confining bed,” *Water Resources Research*, Vol. 6, 194–203, 1970a.
26. Wolff, R.G., “Relationship between horizontal strain near a well and reverse water level fluctuation,” *Water Resources Research*, Vol. 6, 1721–1728, 1970b.
27. Yin, S., M.B. Dusseault, and L. Rothenburg, “Analytical and numerical analysis of pressure drawdown in a poroelastic reservoir with complete overburden effect considered,” *Advances in Water Resources*, Vol. 30, No. 5, 1160-1167, doi:10.1016/j.advwatres.2006.10.008, 2007.
28. Zhang, D., “*Stochastic Methods for Flow in Porous Media — coping with Uncertainties*,” Orlando Florida: Academic Press, 2002.

表 1 模式中參數設定值

參數	參數設定值	單位
楊氏模數 (E)	1.00×10^8	N/m ²
泊松比 (ν)	0.25	none
孔隙率 (n)	0.375	none
水力傳導係數 (K)	1.00×10^{-5}	m/s
有效應力係數 (α)	1	none
最終壓縮係數倒數 (a^{-1})	1.20×10^8	N/m ²
Biot's 壓縮係數 (Q^{-1})	1.65×10^{-10}	m ² /N
達西水力傳導係數 (κ)	1.02×10^{-9}	m ⁴ /Nsec

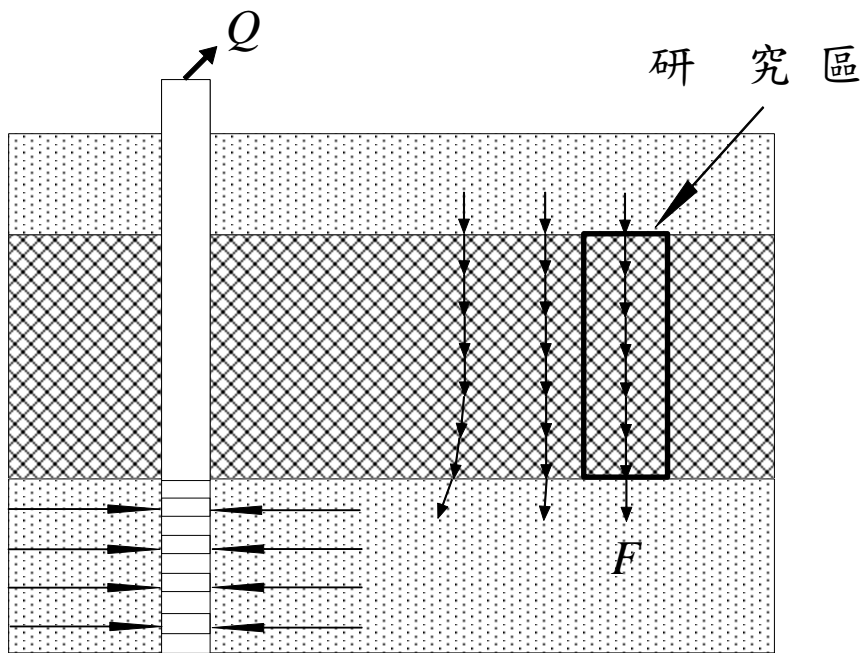


圖 1 含水層抽水狀態下之底端排水概念模式

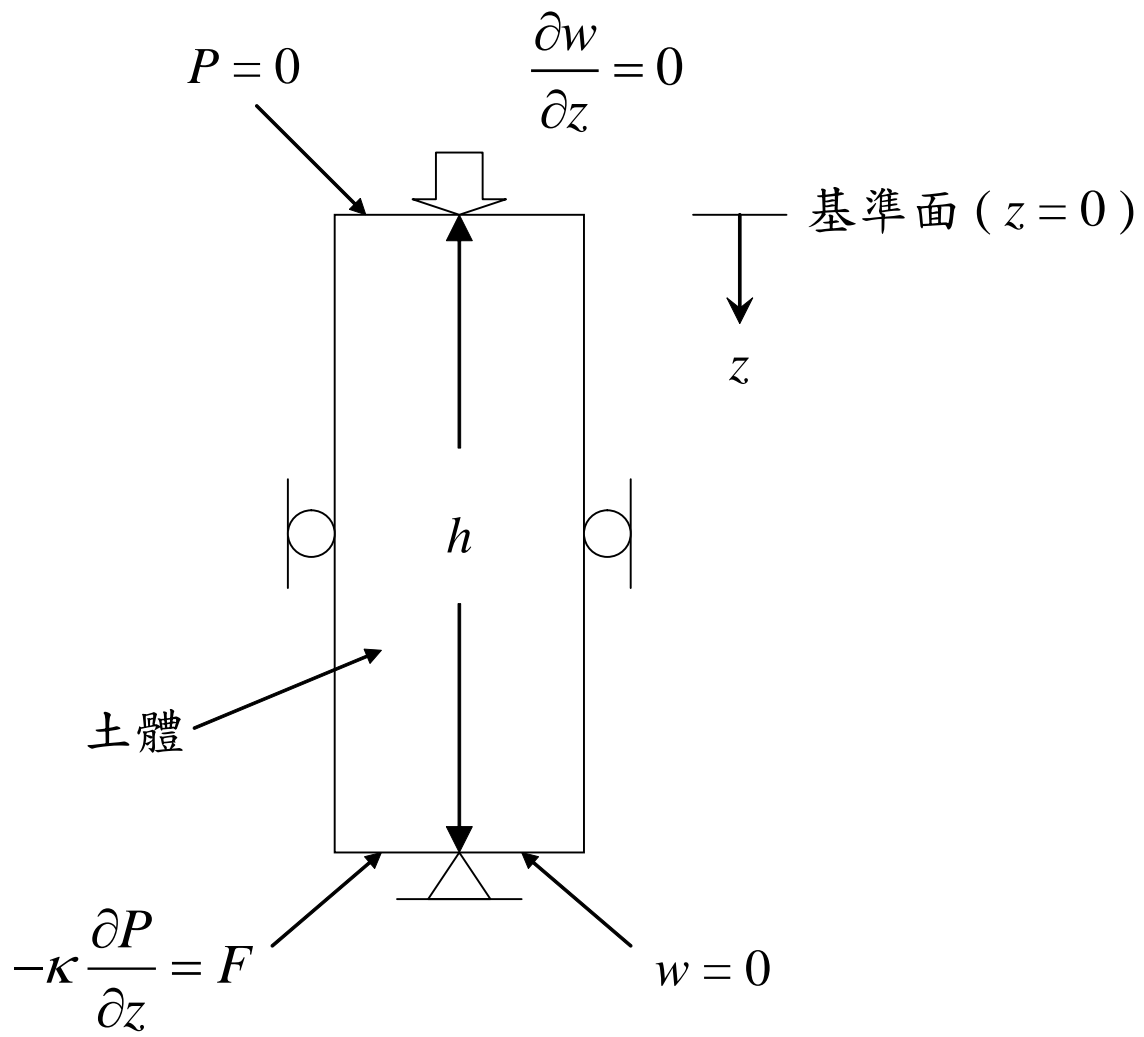


圖 2 一維度底端排水模式示意圖與邊界條件設定

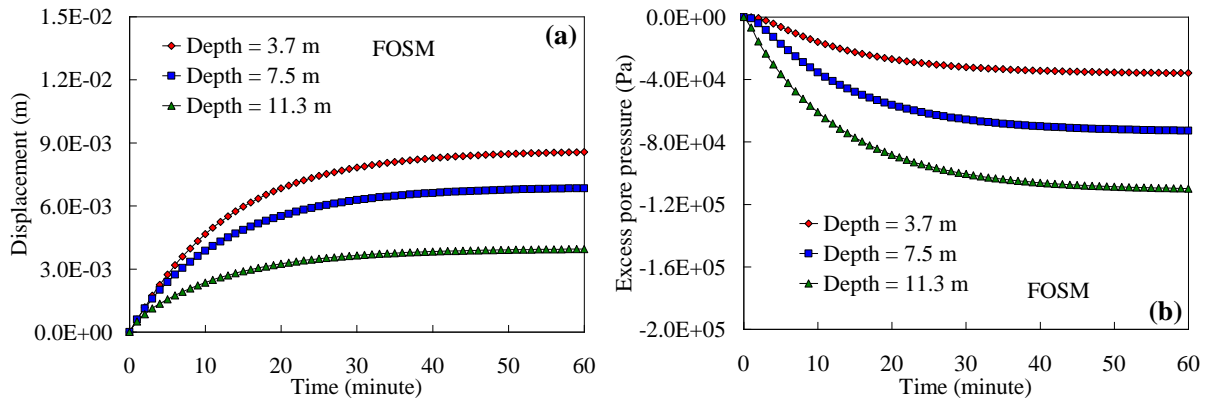


圖 3 底邊固定排水狀態下(a) 位移與(b) 孔隙水壓變化之平均值解。

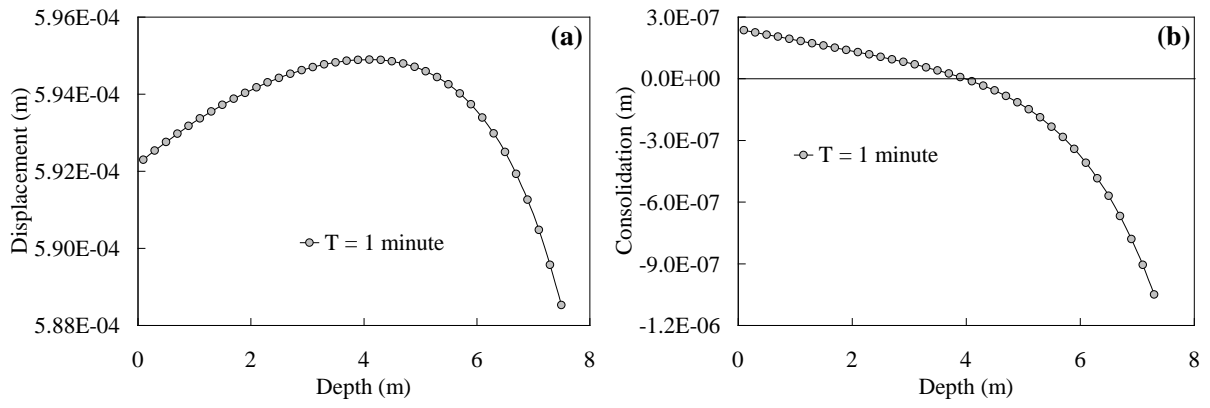


圖 4 底邊固定排水狀態下，時間為 1 分鐘時 15 公尺長土體上半部之(a) 位移與(b) 網格壓密情形。其中網格壓密之正負分別表示膨脹與壓縮，橫線表示壓密量為零之位置。

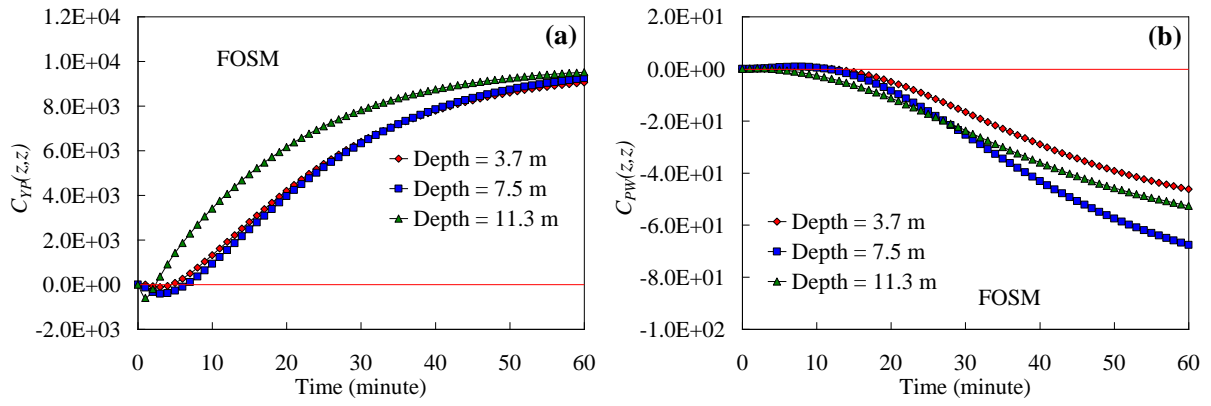


圖 5 底端固定排水情況下之共變異函數解。(a) 水力傳導係數與孔隙水壓變化和(b) 孔隙水壓變化與位移之共變異函數解。橫線表示共變異函數為零之位置。

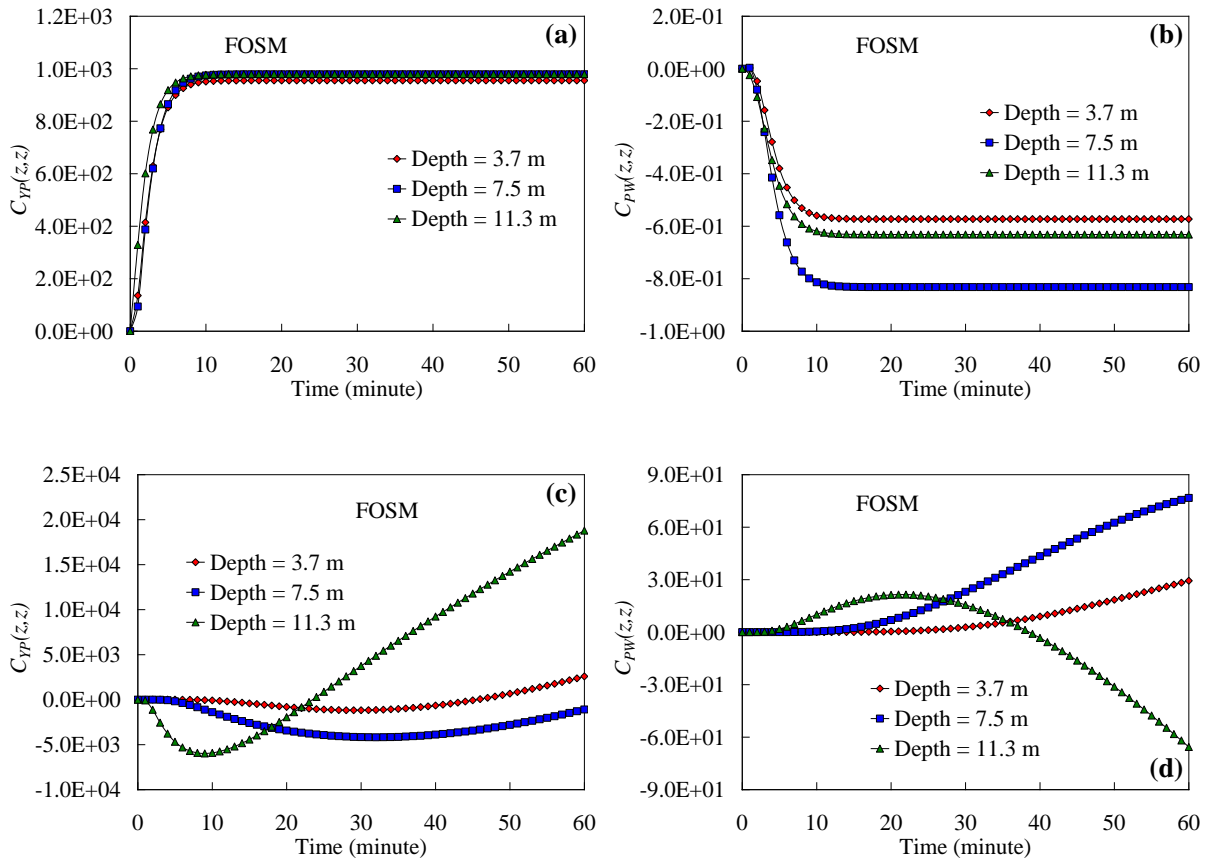


圖6 底端固定排水情況下，共變異函數在楊氏模數分別為 $10^7 N/m^2$ 之(a) $C_{YP}(z, z)$ 和(b) $C_{PW}(z, z)$ 與楊氏模數為 $10^9 N/m^2$ 之(c) $C_{YP}(z, z)$ 和(d) $C_{PW}(z, z)$ ，60分鐘之模擬結果。(e)與(f)則分別為 $C_{YP}(z, z)$ 和 $C_{PW}(z, z)$ 在楊氏模數為 $10^7 N/m^2$ 下，60小時之模擬結果。

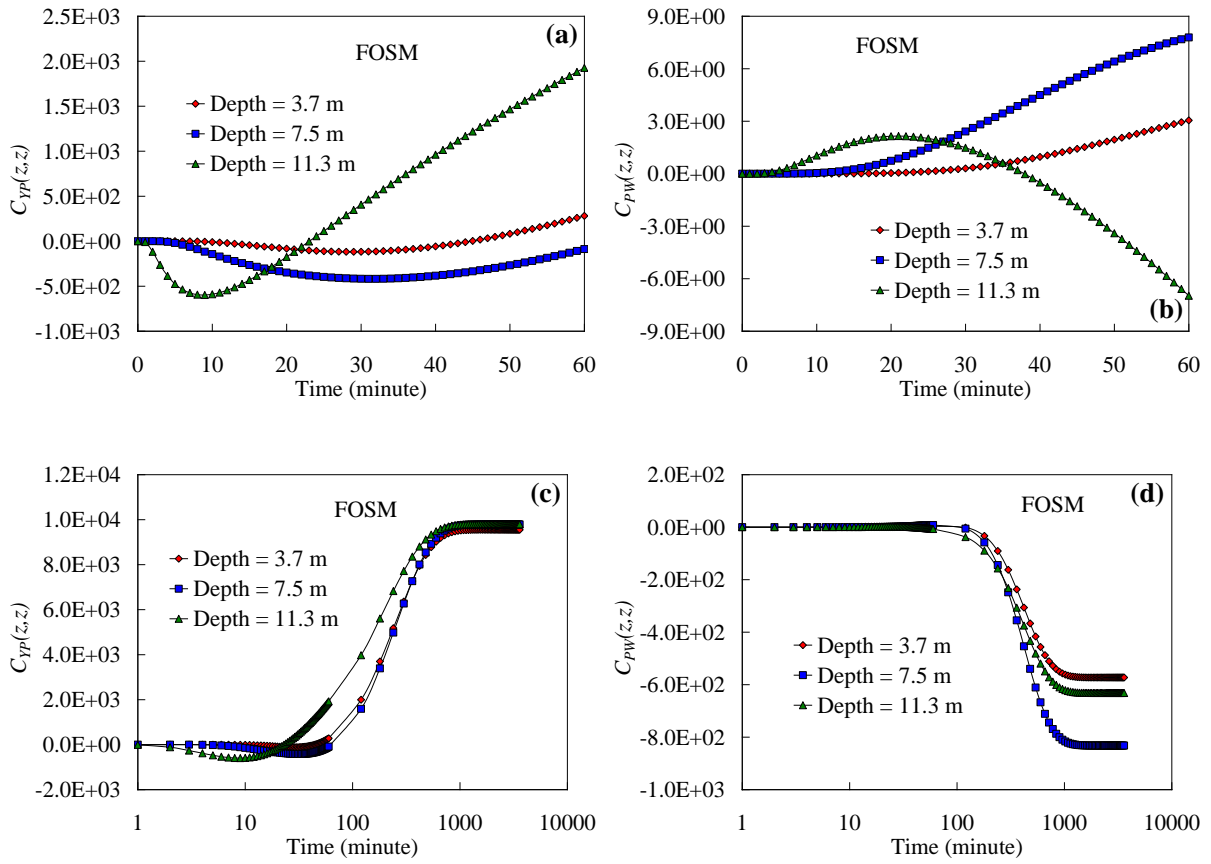


圖 7 底端固定排水情況下，共變異函數在水力傳導係數分別為 $10^{-6} m/s$ 之 (a) $C_{YP}(z, z)$ 和 (b) $C_{PW}(z, z)$ 與水力傳導係數為 $10^{-4} m/s$ 之 (c) $C_{YP}(z, z)$ 和 (d) $C_{PW}(z, z)$ ，60 分鐘之模擬結果。

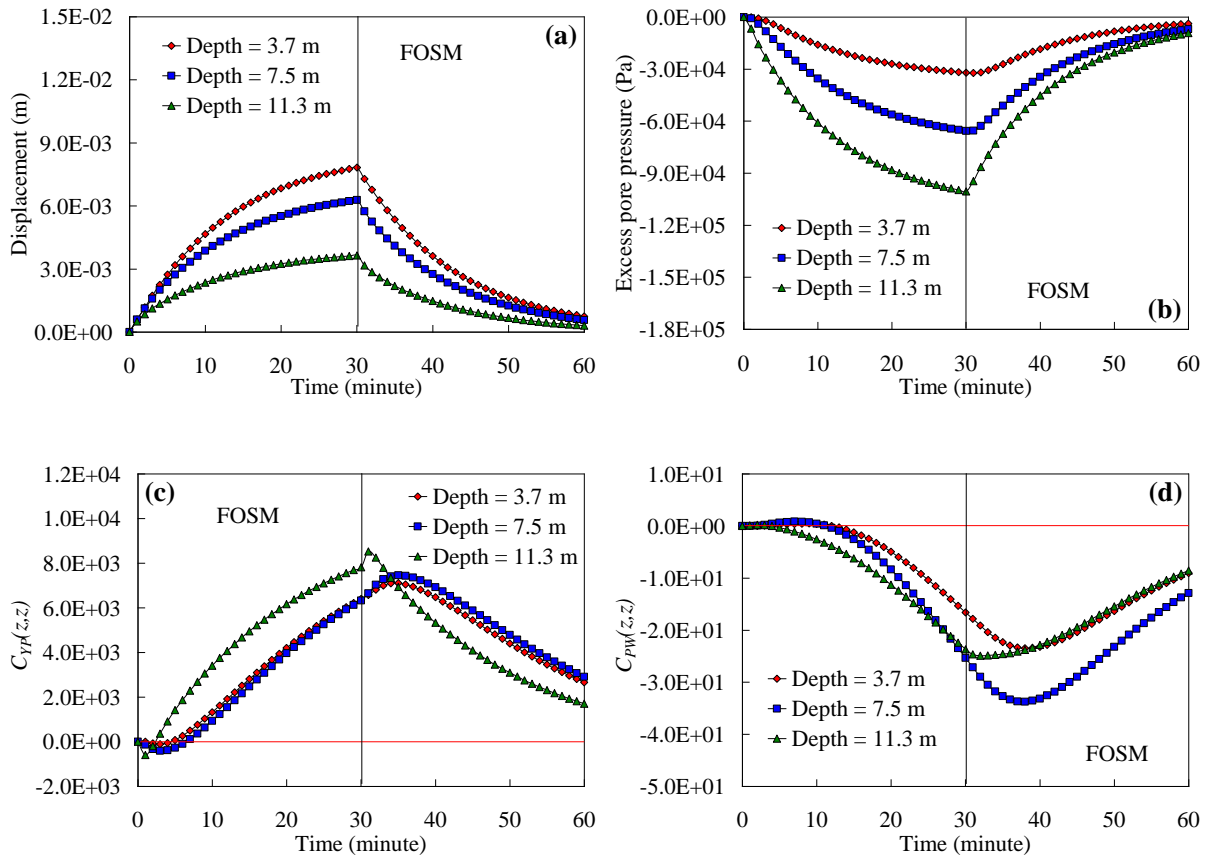


圖 8 底端排水 30 分鐘後停止排水情況下(a) 位移與(b) 孔隙水壓變化之平均值解和共變異函數(c) $C_{YP}(z, z)$ 與(d) $C_{PW}(z, z)$ 之結果。橫線表示共變異函數為零之位置。